Satz von Bayes — Medizinischer Schnelltest

Musterlösung

Gegeben

Prävalenz: $P(I) = 0{,}05$ (5 % der Bevölkerung sind infiziert)

Sensitivität: $P(+|I) = 0{,}95$ (Test erkennt 95 % der Infizierten)

Falsch-pos.-Rate: $P(+|I^c) = 0{,}04$ (4 % Fehlalarm bei Gesunden)

Gesucht

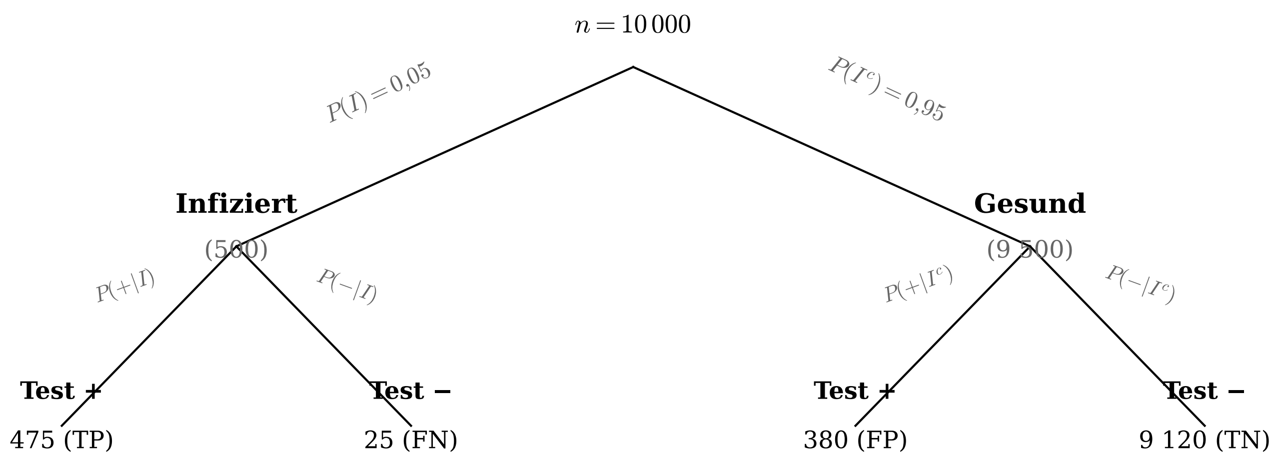
Frage 2: $P(I\,|\,+) = \;?$ — Wie wahrscheinlich ist eine Infektion bei positivem Test?

Frage 3: $P(+) = \;?$ — Wie wahrscheinlich ist ein positiver Test insgesamt?

Vorgehen

Wir betrachten eine fiktive Population von $n = 10\,000$ Personen und berechnen die absoluten Häufigkeiten, um die bedingten Wahrscheinlichkeiten herzuleiten.

Wahrscheinlichkeitsbaum



Vierfeldertafel (n = 10 000)

---

1. Aufteilung der Population:

$10\,000 \times 0{,}05 = 500$ Infizierte, $10\,000 \times 0{,}95 = 9\,500$ Gesunde

2. Testergebnisse der 500 Infizierten:

TP $= 500 \times 0{,}95 = 475$; FN $= 500 - 475 = 25$

3. Testergebnisse der 9 500 Gesunden:

FP $= 9\,500 \times 0{,}04 = 380$; TN $= 9\,500 - 380 = 9\,120$

	Test +	Test −	Summe
Infiziert (I)	475	25	500
Gesund (Ic)	380	9 120	9 500
Summe	855	9 145	10 000

(TP = 475, FN = 25, FP = 380, TN = 9 120)

Beobachtung: Von 855 positiv Getesteten sind nur 475 tatsächlich infiziert.

Lösungen

Frage 3: Wahrscheinlichkeit eines positiven Tests $P(+)$

$$P(+) = P(+|I) \cdot P(I) + P(+|I^c) \cdot P(I^c)$$

1. $P(+|I) \cdot P(I) = 0{,}95 \times 0{,}05 = 0{,}0475$

2. $P(+|I^c) \cdot P(I^c) = 0{,}04 \times 0{,}95 = 0{,}0380$

3. $P(+) = 0{,}0475 + 0{,}0380 = 0{,}0855 = 8{,}55\,\%$

Antwort: a) 8,55 %

Frage 2: Positiver Vorhersagewert $P(I|+)$

Satz von Bayes: $P(I\,|\,+) = \dfrac{P(+|I) \cdot P(I)}{P(+)}$

1. Zähler: $P(+|I) \cdot P(I) = 0{,}0475$

2. Nenner: $P(+) = 0{,}0855$

3. $P(I\,|\,+) = \dfrac{0{,}0475}{0{,}0855} \approx 0{,}5556 \approx 55{,}6\,\%$

Antwort: d) ca. 55,6 %

Erkenntnisse

Ergebnisse

Frage 3: $P(+) = 8{,}55\,\%$ (Antwort a)

Frage 2: $P(I|+) \approx 55{,}6\,\%$ (Antwort d)

Warum ist $P(I|+)$ so niedrig?

- Niedrige Prävalenz (5 %): Nur 500 von 10 000 sind infiziert.
- Falsch-positive dominieren: 380 Fehlalarme vs. 475 richtig Positive.
- Base-Rate-Effekt: Die grosse gesunde Gruppe erzeugt viele Fehlalarme.

Base-Rate-Fehlschluss

Menschen überschätzen typischerweise die Zuverlässigkeit eines positiven Tests und ignorie
die Prävalenz. Ein „95 % genauer" Test bedeutet nicht, dass ein positives Ergebnis zu 95 % k

Einfluss der Prävalenz

P(I)	P(I|+)
0,1 %	2,3 %
1,0 %	19,4 %
5,0 %	55,6 %
20,0 %	82,6 %
50,0 %	95,9 %

Je seltener die Krankheit, desto mehr Fehlalarme unter den positiven Tests.