Chi^2-Tests

Lektion B10 – BSc Wahrscheinlichkeit und Statistik

Digital Finance

Gliederung

Lernziele

Am Ende dieser Lektion werden Sie in der Lage sein:

1. Die Chi^2-Verteilung und ihre Beziehung zur Normalverteilung zu erklären
2. Den Chi^2-Anpassungstest (Goodness-of-fit) durchzuführen und zu interpretieren
3. Kontingenztafeln zu erstellen und erwartete Häufigkeiten zu berechnen
4. Den Chi^2-Unabhängigkeitstest für zweidimensionale Merkmale anzuwenden
5. Freiheitsgrade für beide Testvarianten korrekt zu bestimmen
6. Die Tests in R mit `chisq.test()` umzusetzen

Diese Ziele leiten, was Sie aus dieser Lektion beherrschen sollten.

Die Chi^2-Verteilung

Definition: Seien $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen ($Z_i \sim N(0,1)$). Dann ist

$$\boxed{Q = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2 \sim \chi^2(k)}$$

eine Chi^2-verteilte Zufallsvariable mit k **Freiheitsgraden** (degrees of freedom, df).

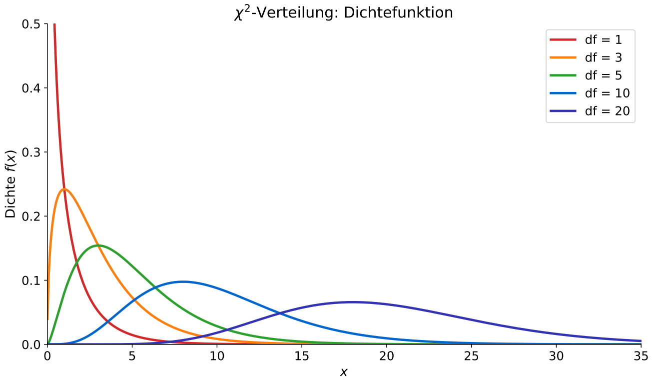
Kennzahlen:

- $E[Q] = k$ (Erwartungswert = Anzahl Freiheitsgrade)
- $\mathrm{Var}(Q) = 2k$
- Die Verteilung ist **rechtsschief** und nimmt nur **nichtnegative** Werte an

Wichtige Eigenschaft: Für großes k nähert sich $\chi^2(k)$ einer Normalverteilung (ZGS).

Die χ^2-Verteilung entsteht als Summe quadrierter Standardnormalverteilungen.

Form der Chi^2-Verteilung



Beobachtungen:

- Bei $\mathrm{df} = 1$: stark rechtsschief, Modus bei 0
- Bei $\mathrm{df} = 3$–5: moderate Schiefe, Modus verschiebt sich nach rechts
- Bei $\mathrm{df} = 10$: annähernd symmetrisch, Modus bei $k - 2 = 8$

Faustregel: Der Modus liegt bei $\max(k - 2, 0)$, der Erwartungswert bei k.

Mehr Freiheitsgrade $\Rightarrow$ Verteilung wird breiter und symmetrischer.

Idee des Anpassungstests (Goodness-of-fit)

Fragestellung: Stimmen die beobachteten Häufigkeiten mit einer *theoretischen* Verteilung überein?

Vorgehen:

1. Daten in k Kategorien einteilen
2. **Beobachtete Häufigkeiten** O_i (observed) zählen
3. **Erwartete Häufigkeiten** E_i (expected) unter H_0 berechnen: $E_i = n \cdot p_i$
4. Abweichung messen mit der **Teststatistik**:

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}}$$

Hypothesen:

- H_0: Die Daten folgen der angenommenen Verteilung ($p_i = p_{i,0}$)
- H_1: Die Daten folgen *nicht* der angenommenen Verteilung

Freiheitsgrade: $\mathrm{df} = k - 1$

Der Test misst: "Wie weit weichen beobachtete von erwarteten Häufigkeiten ab?"

Finanzbeispiel: Monday Effect

Frage: Sind Aktienrenditen gleichmäßig über die Wochentage verteilt?

$n = 500$ Handelstage werden untersucht. Unter H_0 (Gleichverteilung): $E_i = 500/5 = 100$ pro Tag.

	Mo	Di	Mi	Do	Fr
Beobachtet (O_i)	85	108	102	110	95
Erwartet (E_i)	100	100	100	100	100
$(O_i - E_i)^2/E_i$	2,25	0,64	0,04	1,00	0,25

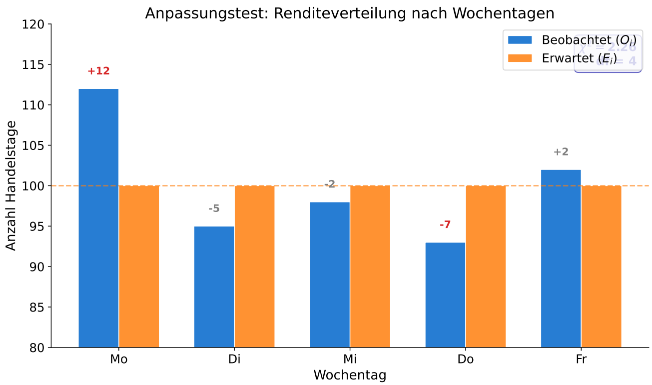
$$\chi^2 = 2{,}25 + 0{,}64 + 0{,}04 + 1{,}00 + 0{,}25 = 4{,}18$$

$\mathrm{df} = 5 - 1 = 4$, kritischer Wert $\chi^2_{0{,}05;\,4} = 9{,}488$.

Entscheidung: $4{,}18 < 9{,}488 \Rightarrow H_0$ **nicht ablehnen**. Kein signifikanter Monday Effect.

Der Monday Effect (niedrigere Montagsrenditen) ist ein klassisches Finanzraetsel.

Anpassungstest: Beobachtet vs. Erwartet



Interpretation:

- Die blauen Balken (beobachtet) weichen nur wenig von den orangenen (erwartet) ab
- Große Abweichungen $\Rightarrow$ großes $\chi^2 \Rightarrow H_0$ ablehnen
- Kleine Abweichungen $\Rightarrow$ kleines $\chi^2 \Rightarrow H_0$ nicht ablehnen

Visuell: Je ähnlicher die Balkenpaare, desto weniger Evidenz gegen H_0.

Voraussetzungen und Faustregel

Voraussetzungen für den Chi^2-Anpassungstest:

1. Daten sind eine **Zufallsstichprobe**
2. Kategorien sind **sich gegenseitig ausschließend** und **erschöpfend**
3. **Faustregel:** Alle erwarteten Häufigkeiten $E_i \geq 5$

Was tun bei $E_i < 5$?

- Benachbarte Kategorien **zusammenfassen** (pooling)
- Exakter Test verwenden (z. B. Fisher)

Wichtig:

- Der Test ist **immer einseitig rechts** (großes χ^2 spricht gegen H_0)
- Wenn Parameter aus den Daten geschätzt werden: $\mathrm{df} = k - 1 - m$
  (wobei $m =$ Anzahl geschätzter Parameter)

Bei zu kleinen erwarteten Häufigkeiten ist die χ^2-Approximation ungenau.

Idee: Unabhängigkeit zweier Merkmale

Fragestellung: Sind zwei kategoriale Merkmale A und B *unabhängig*?

Hypothesen:

- H_0: Die Merkmale A und B sind unabhängig
- H_1: Die Merkmale A und B sind *nicht* unabhängig (es besteht ein Zusammenhang)

Werkzeug: Die Kontingenztafel (Kreuztabelle)

Teststatistik (gleiche Formel wie beim Anpassungstest):

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}}$$

Erwartete Häufigkeiten unter Unabhängigkeit:

$$\boxed{E_{ij} = \frac{R_i \cdot C_j}{N}}$$

wobei R_i = Zeilensumme, C_j = Spaltensumme, N = Gesamtzahl.

Freiheitsgrade: $\mathrm{df} = (r-1)(c-1)$

Bei Unabhängigkeit: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, **also** $E_{ij} = N \cdot \hat{p}_i \cdot \hat{p}_j$.

Kontingenztafel: Kreditrating und Ausfall

Frage: Hängt die Kreditausfallrate vom Rating ab?

	AAA	**AA**	**A**	**BBB**	$\sum$
Kein Ausfall	198	185	165	140	688
Ausfall	2	15	35	60	112
$\sum$	200	200	200	200	**800**

$\longrightarrow R_1 = 688$

$\longrightarrow R_2 = 112$

C_1 C_2

Erwartete Häufigkeit (Beispiel AAA/Ausfall):

$$E_{21} = \frac{R_2 \cdot C_1}{N} = \frac{112 \cdot 200}{800} = 28$$

Beobachtet: $O_{21} = 2 \quad \Rightarrow \quad$ Beitrag: $\frac{(2-28)^2}{28} = 24{,}14$

Grosse Abweichung zwischen O und E $\Rightarrow$ Merkmal und Rating scheinen abhängig.

Rechenbeispiel: Unabhängigkeitstest

Erwartete Häufigkeiten unter H_0 (Unabhängigkeit):

	AAA	**AA**	**A**	**BBB**
Kein Ausfall	172	172	172	172
Ausfall	28	28	28	28

(Alle $E_{ij} = \frac{R_i \cdot C_j}{800}$, z. B. $E_{11} = \frac{688 \cdot 200}{800} = 172$.)

Teststatistik:

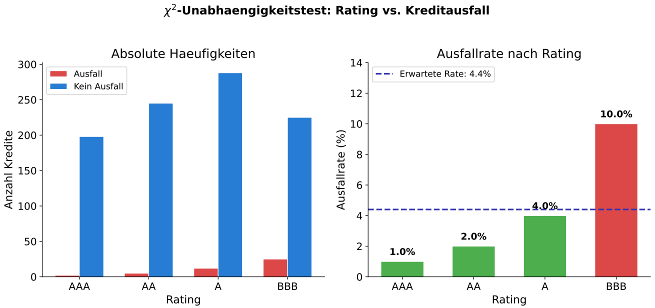
$$\begin{aligned}
\chi^2 &= \frac{(198-172)^2}{172} + \frac{(185-172)^2}{172} + \frac{(165-172)^2}{172} + \frac{(140-172)^2}{172} \\
&\quad + \frac{(2-28)^2}{28} + \frac{(15-28)^2}{28} + \frac{(35-28)^2}{28} + \frac{(60-28)^2}{28} \\
&= 3{,}93 + 0{,}98 + 0{,}28 + 5{,}95 + 24{,}14 + 6{,}04 + 1{,}75 + 36{,}57 \\
&= \mathbf{79{,}64}
\end{aligned}$$

$\mathrm{df} = (2-1)(4-1) = 3, \quad \chi^2_{0{,}05;\,3} = 7{,}815.$

Entscheidung: $79{,}64 \gg 7{,}815 \Rightarrow H_0$ **ablehnen**. Ausfallrate hängt vom Rating ab!

Ein χ^2-Wert weit über dem kritischen Wert zeigt starke Abhängigkeit.

Ausfallraten nach Rating

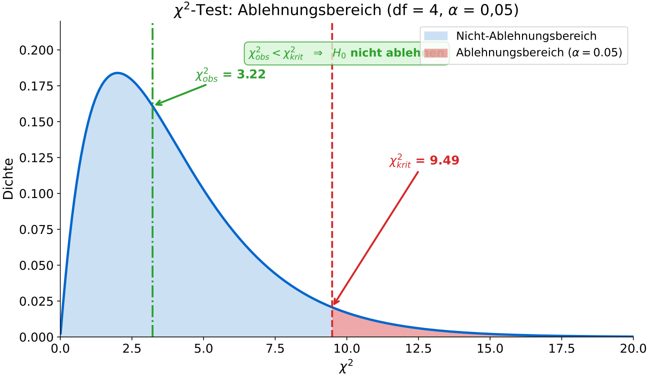


Interpretation:

- Die Ausfallrate steigt deutlich von AAA (1%) über AA (7,5%) und A (17,5%) bis BBB (30%)
- Unter Unabhängigkeit wären alle Raten gleich ($\frac{112}{800} = 14\%$)
- Der Chi^2-Test bestätigt: Der Zusammenhang ist **statistisch signifikant**

In der Praxis ist die Ratingabhängigkeit von Ausfallraten ein zentrales Ergebnis.

Der Ablehnungsbereich



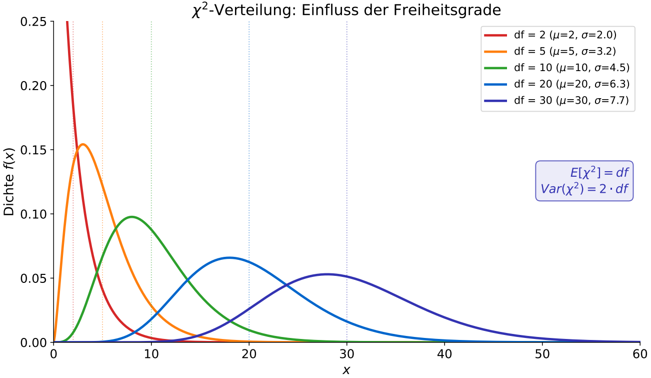
Entscheidungsregel:

- **Ablehnen:** $\chi^2_{\text{beob}} > \chi^2_{\alpha;\,\text{df}}$ (Teststatistik fällt in den roten Bereich)
- **Nicht ablehnen:** $\chi^2_{\text{beob}} \leq \chi^2_{\alpha;\,\text{df}}$
- Äquivalent: Ablehnen, wenn p-Wert $< \alpha$

Beachte: Der Chi^2-Test ist **immer einseitig rechts** – nur große Werte sprechen gegen H_0.

Ein χ^2-Wert nahe 0 bedeutet perfekte Übereinstimmung – kein Grund zur Ablehnung.

Freiheitsgrade: Wirkung auf die Verteilung



Übersicht der Freiheitsgrade:

Testart	**df**
Anpassungstest	$k - 1$ (k Kategorien)
Anpassungstest (mit Schätzung)	$k - 1 - m$ (m geschätzte Parameter)
Unabhängigkeitstest	$(r - 1)(c - 1)$ (r Zeilen, c Spalten)

R-Code: Anpassungstest

Beispiel: Monday Effect (5 Wochentage, Gleichverteilung)

```
# Beobachtete Haeufigkeiten
observed <- c(Mo=85, Di=108, Mi=102, Do=110, Fr=95)

# Erwartete Wahrscheinlichkeiten (Gleichverteilung)
p_expected <- rep(1/5, 5)

# Chi-Quadrat-Anpassungstest
result <- chisq.test(observed, p = p_expected)
print(result)
```

Ausgabe:

```
  Chi-squared test for given probabilities
  X-squared = 4.18, df = 4, p-value = 0.3822
```

Interpretation: $p = 0{,}382 > 0{,}05 \Rightarrow H_0$ nicht ablehnen.

`chisq.test(x, p)` **testet, ob die beobachteten Häufigkeiten zu den Wahrscheinlichkeiten passen.**

R-Code: Unabhängigkeitstest

Beispiel: Kreditrating und Ausfall

```r
# Kontingenztafel erstellen
rating <- matrix(c(198, 185, 165, 140,
                     2,  15,  35,  60),
                 nrow=2, byrow=TRUE,
                 dimnames=list(c("Kein Ausfall","Ausfall"),
                               c("AAA","AA","A","BBB")))
print(rating)

# Chi-Quadrat-Unabhaengigkeitstest
result <- chisq.test(rating)
print(result)

# Erwartete Haeufigkeiten anzeigen
result$expected
```

Ausgabe:

```
  X-squared = 79.64, df = 3, p-value < 2.2e-16
```

Interpretation: $p < 0{,}001 \Rightarrow H_0$ ablehnen. Rating und Ausfall sind abhängig.

`chisq.test(matrix)` **erkennt automatisch: Matrix $\Rightarrow$ Unabhängigkeitstest.**

Vergleich: Anpassungstest vs. Unabhängigkeitstest

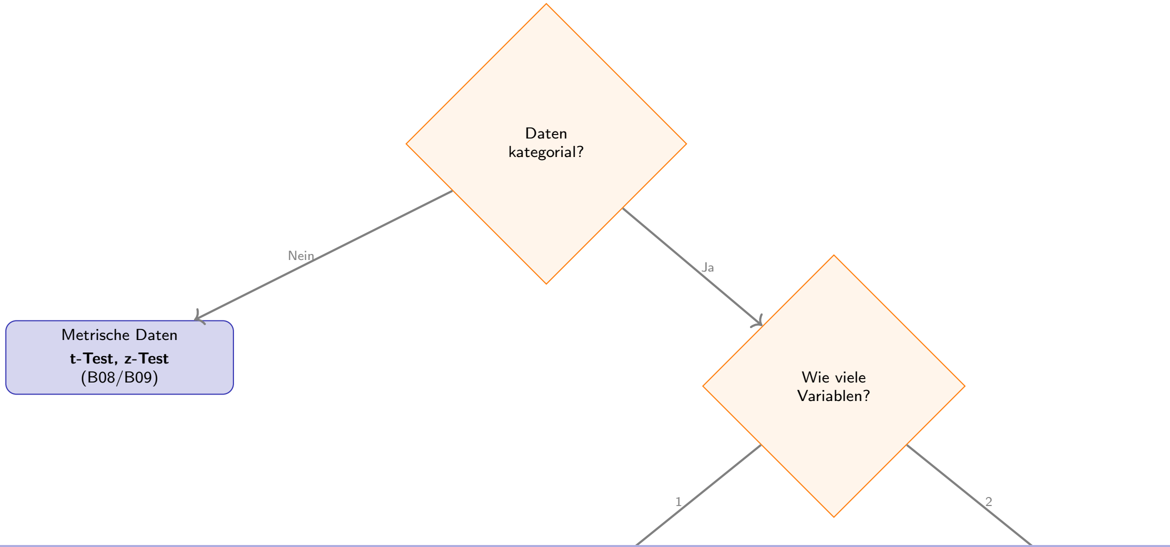
	Anpassungstest	**Unabhängigkeitstest**
Fragestellung	Passt eine Verteilung zu den Daten?	Sind zwei Merkmale unabhängig?
Datenstruktur	k Kategorien (1 Variable)	$r \times c$ Kontingenztafel (2 Variablen)
E_i **berechnen**	$E_i = n \cdot p_i$	$E_{ij} = \frac{R_i \cdot C_j}{N}$
Freiheitsgrade	$k - 1$	$(r-1)(c-1)$
R-Code	`chisq.test(x, p=...)`	`chisq.test(matrix)`
Finanzbeispiel	Monday Effect	Rating vs. Ausfall

Gemeinsamkeiten:

- Gleiche Teststatistik: $\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$
- Beide immer **einseitig rechts**
- Beide erfordern $E_i \geq 5$ (Faustregel)

Zwei Tests, eine Formel – der Unterschied liegt in der Berechnung der erwarteten Werte.

Entscheidungsbaum: Welcher Test?



Lernziele – Checkliste

Prüfen Sie sich selbst:

- ✓ **Chi^2-Verteilung:** Summe quadrierter $N(0,1)$-Variablen, $E = k$, $\mathrm{Var} = 2k$
- ✓ **Anpassungstest:** O_i vs. $E_i = n \cdot p_i$, Teststatistik $\sum (O - E)^2 / E$, df $= k - 1$
- ✓ **Monday Effect:** $\chi^2 = 4{,}18$, df $= 4$, $p = 0{,}38 \Rightarrow$ nicht signifikant
- ✓ **Kontingenztafel:** $E_{ij} = R_i \cdot C_j / N$, erwartete Häufigkeiten unter H_0
- ✓ **Unabhängigkeitstest:** df $= (r-1)(c-1)$, Rating vs. Ausfall: hochsignifikant
- ✓ **Voraussetzungen:** $E_i \geq 5$, Kategorien zusammenfassen bei Bedarf
- ✓ **R-Code:** `chisq.test(x, p=...)` und `chisq.test(matrix)`
- ✓ **Testwahl:** Entscheidungsbaum Skalenniveau $\rightarrow$ Variablenanzahl $\rightarrow$ Test

---

Wenn Sie alle Punkte verstanden haben, sind Sie bereit für weitere Testverfahren!

Schlüsselformeln

Formel	Name
$Q = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 \sim \chi^2(k)$	Chi^2-Verteilung
$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$	Teststatistik
$E_i = n \cdot p_i$	Erwartete Häufigkeit (Anpassung)
$E_{ij} = \frac{R_i \cdot C_j}{N}$	Erwartete Häufigkeit (Unabhängigkeit)
$\mathrm{df} = k - 1$	Freiheitsgrade Anpassungstest
$\mathrm{df} = (r-1)(c-1)$	Freiheitsgrade Unabhängigkeitstest

Diese Formeln bilden das Fundament der Chi^2-Testverfahren.