

Punkt- und Intervallschätzung

Lektion B07 – BSc Wahrscheinlichkeit und Statistik

Digital Finance

- 1 Punktschätzung
- 2 Stichprobenverteilung
- 3 t -Verteilung
- 4 Konfidenzintervall für μ
- 5 Konfidenzintervall für Anteilswert p
- 6 Breite und Einflussfaktoren
- 7 Stichprobenumfang bestimmen
- 8 R: Konfidenzintervalle
- 9 Zusammenfassung

Nach dieser Lektion können Sie:

- 1 Punktschätzer für μ , σ^2 und p benennen und berechnen
- 2 Erklären, was **Erwartungstreue** eines Schätzers bedeutet
- 3 Die **Stichprobenverteilung** von \bar{X} beschreiben und den Standardfehler berechnen
- 4 Konfidenzintervalle für μ (mit z und t) und für p konstruieren
- 5 Den **Einfluss** von Stichprobenumfang und Konfidenzniveau auf die KI-Breite erklären
- 6 Den **erforderlichen Stichprobenumfang** für eine gewünschte Genauigkeit bestimmen

Ziel: Einen unbekanntem Parameter θ der Grundgesamtheit durch einen *einzelnen Wert* aus der Stichprobe schätzen.

Parameter	Symbol	Punktschätzer
Mittelwert	μ	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
Varianz	σ^2	$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
Anteilswert	p	$\hat{p} = \frac{X}{n}$ (Anzahl Erfolge / n)

Frage: Wie *gut* schätzt \bar{X} den wahren Mittelwert μ ?

Ein Punktschätzer ist eine Funktion der Stichprobe – selbst eine Zufallsvariable.

Ein Schätzer $\hat{\theta}$ heisst **erwartungstreu** (unbiased), wenn

$$E[\hat{\theta}] = \theta.$$

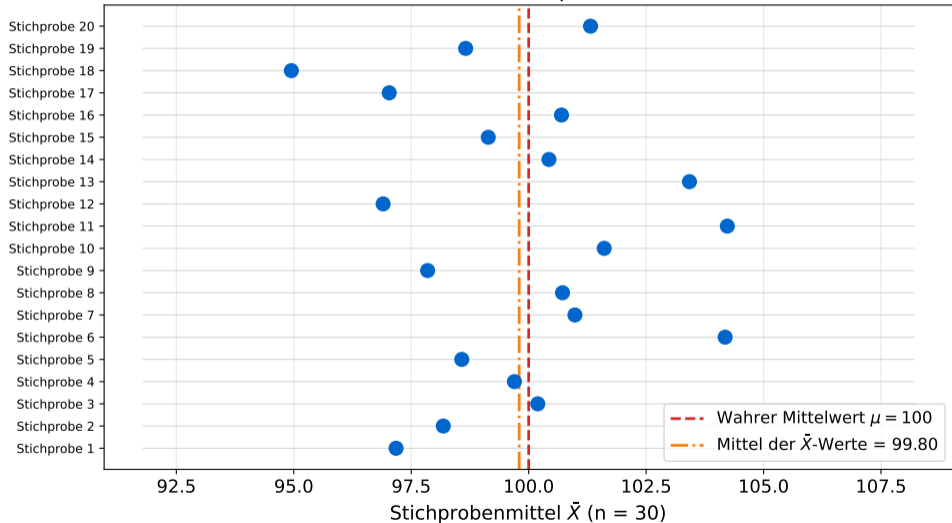
Beispiele:

- $E[\bar{X}] = \mu \Rightarrow \bar{X}$ ist erwartungstreu für μ
- $E[S^2] = \sigma^2 \Rightarrow S^2$ ist erwartungstreu für σ^2
- $E[\hat{p}] = p \Rightarrow \hat{p}$ ist erwartungstreu für p

Warum $n - 1$? Division durch n statt $n - 1$ würde σ^2 systematisch *unterschätzen* (Bias). Die **Bessel-Korrektur** ($n - 1$) kompensiert dies.

Erwartungstreue bedeutet: Im Mittel über viele Stichproben trifft der Schätzer den wahren Wert.

Punktschätzer: Stichprobenmittel \bar{X}



Jeder Punkt = \bar{X} einer Stichprobe ($n = 30$) aus $N(100, 15^2)$.

Wenn $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, dann gilt:

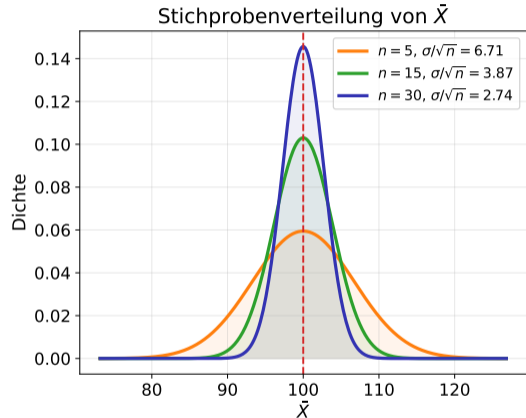
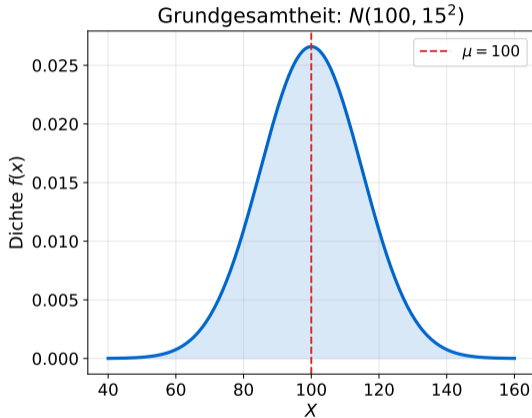
$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Wichtige Kennzahlen:

- **Erwartungswert:** $E[\bar{X}] = \mu$
- **Varianz:** $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
- **Standardfehler:** $\text{SE}(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Konsequenz: Je grösser n , desto *enger* konzentriert sich \bar{X} um μ .

Der Standardfehler misst die Präzision des Schätzers – nicht die Streuung der Einzelwerte.



Links: Grundgesamtheit $N(100, 15^2)$. Rechts: Verteilung von \bar{X} für verschiedene n .
Grössere Stichproben \Rightarrow kleinerer Standardfehler \Rightarrow präzisere Schätzung.

Wann brauchen wir die t -Verteilung?

Problem: In der Praxis ist σ meist *unbekannt*.

Wir ersetzen σ durch die Stichproben-Standardabweichung S :

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Voraussetzung: $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

Freiheitsgrade: $df = n - 1$

- Kleine n ($n < 30$): t -Verteilung hat **schwerere Ränder** als $N(0, 1)$
- Grosse n ($n \geq 30$): t -Verteilung $\approx N(0, 1)$

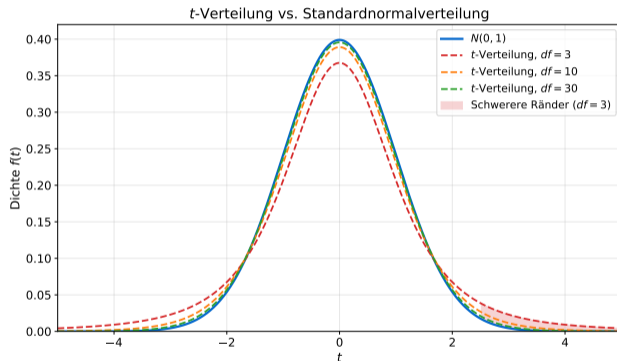
William Sealy Gosset publizierte die t -Verteilung 1908 unter dem Pseudonym "Student".

Eigenschaften der t -Verteilung

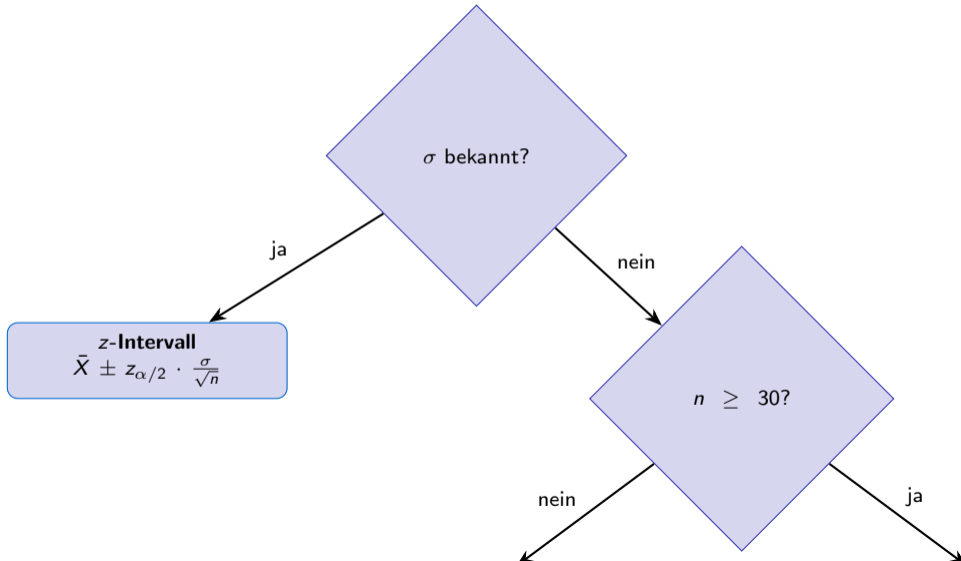
- Symmetrisch um 0
- Glockenförmig, aber **breitere Ränder** als $N(0, 1)$
- Für $df \rightarrow \infty$: $t_{df} \rightarrow N(0, 1)$
- Ein Parameter: $df = n - 1$

Kritische Werte (zweiseitig):

df	$t_{0.025}$	$z_{0.025}$
5	2.571	1.960
10	2.228	1.960
30	2.042	1.960
∞	1.960	1.960



t- vs. z-Verteilung: Wann welche?



Formel:

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Gängige Konfidenzniveaus:

Konfidenzniveau	α	$z_{\alpha/2}$
90%	0.10	1.645
95%	0.05	1.960
99%	0.01	2.576

Interpretation: In 95% aller möglichen Stichproben überdeckt das so konstruierte Intervall den wahren Parameter μ .

Das KI ist ein Verfahren, das mit hoher Wahrscheinlichkeit den wahren Wert einschliesst.

Ein Portfoliomanager analysiert $n = 100$ Tagesrenditen eines Fonds.

Gegeben: $\bar{x} = 0.08\%$, $\sigma = 1.2\%$ (bekannt), Konfidenzniveau 95%.

Berechnung:

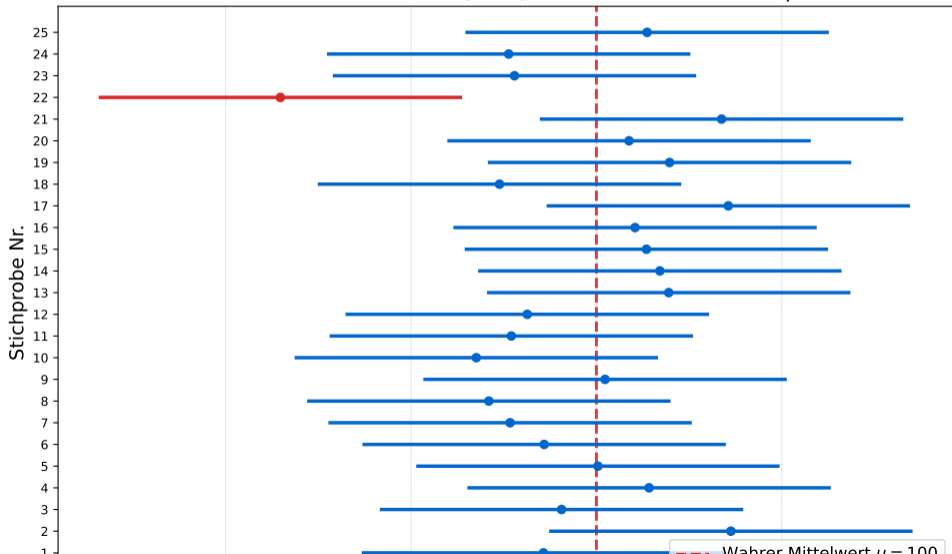
$$\text{Fehlerspanne } E = z_{0.025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1.2}{\sqrt{100}} = 1.96 \cdot 0.12 = 0.2352\%$$

$$\begin{aligned} \text{KI: } [\bar{x} - E, \bar{x} + E] &= [0.08 - 0.2352, 0.08 + 0.2352] \\ &= [-0.1552\%, 0.3152\%] \end{aligned}$$

Fazit: Wir sind zu 95% konfident, dass die wahre mittlere Tagesrendite zwischen -0.16% und 0.32% liegt.

Das KI schliesst Null ein – der Fonds zeigt keine signifikant positive Rendite.

25 Konfidenzintervalle (95%) -- 24 von 25 enthalten μ



KI für $\mu - \sigma$ unbekannt (t -Intervall)

Formel:

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Voraussetzungen:

- Grundgesamtheit *normalverteilt* (oder n gross genug)
- σ unbekannt, wird durch S geschätzt

Unterschied zum z -Intervall:

- Verwendung des kritischen Werts $t_{\alpha/2, n-1}$ statt $z_{\alpha/2}$
- t -Werte sind grösser \Rightarrow breiteres KI (mehr Unsicherheit)
- Kompensiert die zusätzliche Unsicherheit durch Schätzung von σ

Für $n \geq 30$ ist der Unterschied zwischen t - und z -Intervall vernachlässigbar.

Rechenbeispiel: Wochenrenditen (t -Intervall)

Ein Analyst untersucht $n = 15$ Wochenrenditen einer Aktie.

Gegeben: $\bar{x} = 0.5\%$, $s = 2.1\%$, Konfidenzniveau 95%.

Freiheitsgrade: $df = 15 - 1 = 14$

Kritischer Wert: $t_{0.025, 14} = 2.145$

Berechnung:

$$E = t_{0.025, 14} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.145 \cdot \frac{2.1}{\sqrt{15}} = 2.145 \cdot 0.5423 = 1.163\%$$

$$\text{KI: } [0.5 - 1.163, 0.5 + 1.163] = [-0.663\%, 1.663\%]$$

Vergleich: Mit $z_{0.025} = 1.96$ wäre $E = 1.063\%$ – das t -Intervall ist breiter, weil es die zusätzliche Unsicherheit berücksichtigt.

Kleine Stichproben: Immer t -Verteilung verwenden, wenn σ unbekannt!

Situation	Formel	Verteilung	Typisch
σ bekannt	$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$N(0, 1)$	selten
σ unbekannt, n klein	$\bar{X} \pm t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	t_{n-1}	häufig
σ unbekannt, n gross	$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\approx N(0, 1)$	häufig

Faustregel: Für $n \geq 30$ kann man i. d. R. z statt t verwenden.

Empfehlung: Im Zweifel immer t verwenden – schadet nie.

Schätzer: $\hat{p} = \frac{X}{n}$ (Anteil Erfolge in der Stichprobe)

Formel (Wald-Intervall):

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

Voraussetzung: $n\hat{p} \geq 5$ und $n(1 - \hat{p}) \geq 5$ (Normalapproximation)

Standardfehler:

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

Rechenbeispiel: Kundenzufriedenheit

Eine Bank befragt $n = 400$ Kunden. Davon sind 240 zufrieden.

Gegeben: $\hat{p} = 240/400 = 0.60$, Konfidenzniveau 95%.

Prüfe Voraussetzung: $n\hat{p} = 240 \geq 5 \checkmark$ und $n(1 - \hat{p}) = 160 \geq 5 \checkmark$

Berechnung:

$$SE = \sqrt{\frac{0.60 \cdot 0.40}{400}} = \sqrt{0.0006} = 0.0245$$

$$E = 1.96 \cdot 0.0245 = 0.0480$$

$$KI: [0.60 - 0.048, 0.60 + 0.048] = [0.552, 0.648]$$

Fazit: Wir sind zu 95% konfident, dass der wahre Anteil zufriedener Kunden zwischen 55.2% und 64.8% liegt.

Was beeinflusst die Breite des KI?

$$\text{Breite} = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Faktor	Effekt auf Breite	Steuerbar?
Stichprobenumfang $n \uparrow$	Breite \downarrow (Faktor $1/\sqrt{n}$)	Ja
Konfidenzniveau \uparrow	Breite \uparrow (grösseres z)	Ja
Standardabweichung $\sigma \uparrow$	Breite \uparrow	Nein (Natur der Daten)

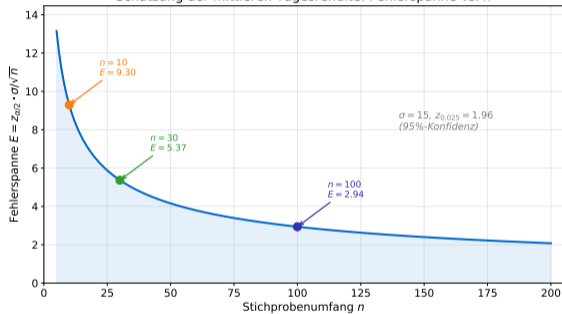
Trade-off:

- Höheres Konfidenzniveau \Rightarrow breiteres Intervall (weniger präzise)
- Grössere Stichprobe \Rightarrow engeres Intervall (teurer)

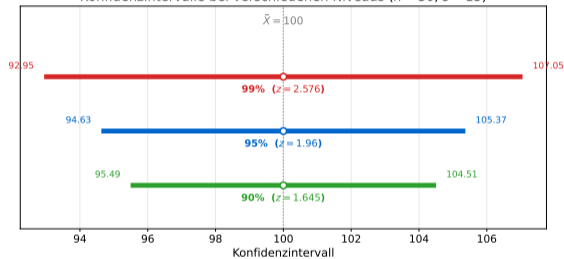
Die einzige "kostenlose" Verbesserung: n erhöhen.

Fehlerspanne vs. Stichprobenumfang

Schätzung der mittleren Tagesrendite: Fehlerspanne vs. n



Konfidenzintervalle bei verschiedenen Niveaus ($n = 30, s = 15$)



Links: Fehlerspanne sinkt mit \sqrt{n} – *abnehmender Grenznutzen*.

Rechts: Höheres Konfidenzniveau \Rightarrow breiteres Intervall.

Ziel: Fehlerspanne E soll höchstens einen vorgegebenen Wert betragen.

Formel:

$$n = \left\lceil \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 \right\rceil$$

Beispiel: $\sigma = 10$, $E = 2$, 95%-KI ($z = 1.96$):

$$n = \left\lceil \left(\frac{1.96 \cdot 10}{2} \right)^2 \right\rceil = \lceil 9.8^2 \rceil = \lceil 96.04 \rceil = 97$$

Mindestens 97 Beobachtungen nötig, um μ auf ± 2 genau zu schätzen.

Immer aufrunden! Abrunden würde die gewünschte Genauigkeit nicht garantieren.

Formel:

$$n = \left\lceil \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot \hat{p}(1 - \hat{p})}{E^2} \right\rceil$$

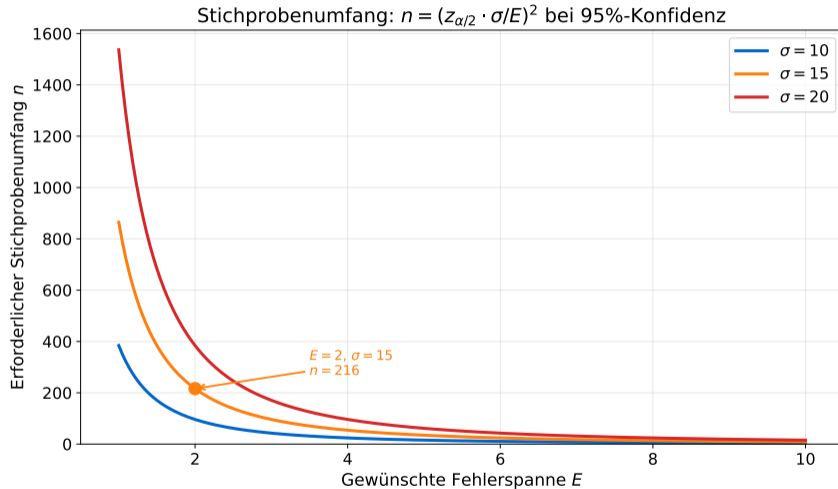
Konservativer Ansatz: Wenn kein Schätzwert für p vorliegt, setze $\hat{p} = 0.5$ (maximiert $\hat{p}(1 - \hat{p}) = 0.25$).

Beispiel: Gewünschte Fehlerspanne $E = 0.03$ (3 Prozentpunkte), 95%-KI:

$$n = \left\lceil \frac{1.96^2 \cdot 0.25}{0.03^2} \right\rceil = \left\lceil \frac{0.9604}{0.0009} \right\rceil = \lceil 1067.1 \rceil = 1068$$

Mindestens 1068 Befragte nötig!

Stichprobenumfang vs. Fehlerspanne



Halbierung der Fehlerspanne \Rightarrow **Vervierfachung** des erforderlichen Stichprobenumfangs (wegen $n \propto 1/E^2$).

Einzeiler mit `t.test()`:

```
# Stichprobe generieren
set.seed(42)
x <- rnorm(30, mean = 100, sd = 15)

# 95%-Konfidenzintervall
t.test(x)$conf.int
# [1] 94.83 104.50
# attr(,"conf.level")
# [1] 0.95

# 99%-Konfidenzintervall
t.test(x, conf.level = 0.99)$conf.int
# [1] 93.07 106.27
```

Hinweis: `t.test()` verwendet automatisch die t -Verteilung mit $df = n - 1$.

Funktion: `prop.test()`

```
# 240 von 400 Kunden zufrieden
prop.test(x = 240, n = 400, conf.level = 0.95)$conf.int
# [1] 0.5497 0.6484
# attr(,"conf.level")
# [1] 0.95
```

Manuelle Berechnung:

```
p_hat <- 240 / 400 # 0.60
se <- sqrt(p_hat * (1 - p_hat) / 400) # 0.0245
z <- qnorm(0.975) # 1.96
c(p_hat - z * se, p_hat + z * se)
# [1] 0.5520 0.6480
```

Hinweis: `prop.test()` nutzt eine Stetigkeitskorrektur – daher leicht andere Grenzen als die manuelle Formel.

R: Manuelle KI-Berechnung für μ

```
set.seed(42)
x <- rnorm(30, mean = 100, sd = 15)

n      <- length(x)      # 30
x_bar <- mean(x)         # 99.67
s      <- sd(x)          # 12.96

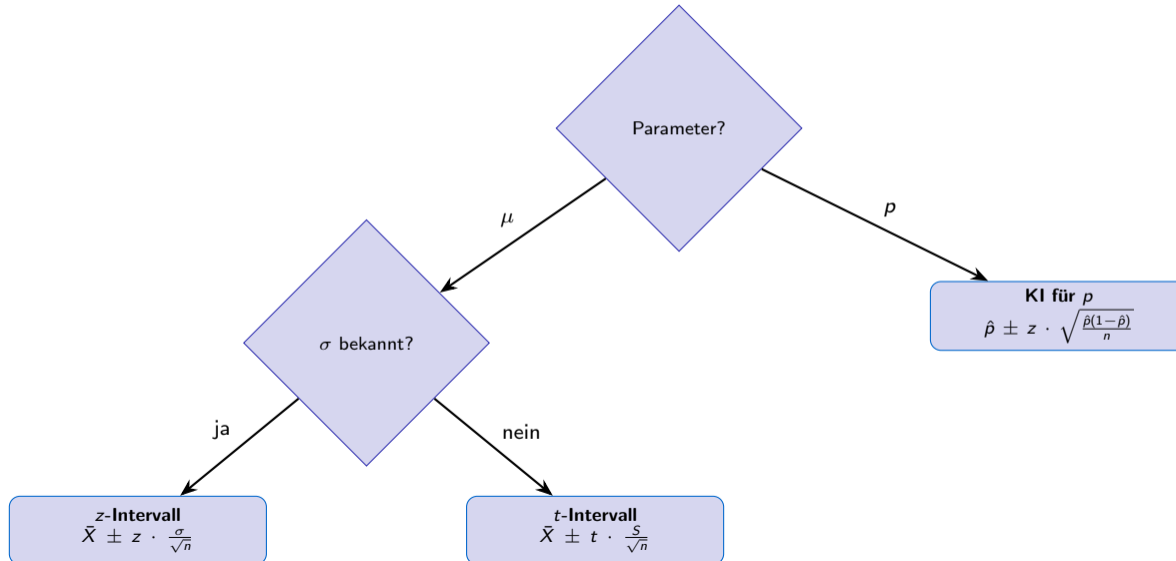
# t-Intervall (95%)
alpha <- 0.05
t_krit <- qt(1 - alpha/2, df = n - 1) # 2.045
E <- t_krit * s / sqrt(n)

cat("KI: [", round(x_bar - E, 2), ", ",
    round(x_bar + E, 2), "]\n")
# KI: [ 94.83 , 104.50 ]
```

Schritte:

- 1 \bar{x} und s berechnen
- 2 Kritischen Wert $t_{\alpha/2, n-1}$ mit `qt()` nachschlagen
- 3 Fehlerspanne $E = t \cdot s / \sqrt{n}$ berechnen
- 4 KI: $[\bar{x} - E, \bar{x} + E]$

Welches KI verwenden? – Entscheidungsbaum



Grösse	Formel	Anmerkung
Stichprobenmittel	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$	Schätzer für μ
Stichprobenvarianz	$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$	Schätzer für σ^2
Standardfehler	$SE = \sigma / \sqrt{n}$	Streuung von \bar{X}
z-KI für μ	$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n}$	σ bekannt
t-KI für μ	$\bar{X} \pm t_{\alpha/2, n-1} \cdot S / \sqrt{n}$	σ unbekannt
KI für p	$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}$	Wald-Intervall
n für μ	$n = (z_{\alpha/2} \cdot \sigma / E)^2$	Aufrunden!
n für p	$n = z_{\alpha/2}^2 \cdot p(1 - p) / E^2$	$p = 0.5$ konservativ

Diese Lektion:

- Punktschätzung: \bar{X} , S^2 , \hat{p} als erwartungstreue Schätzer
- t -Verteilung für kleine Stichproben mit unbekanntem σ
- Konfidenzintervalle für μ (mit z und t) und für p
- Einflussfaktoren auf KI-Breite und Stichprobenplanung

Nächste Lektion:

- **Hypothesentests** – vom Schätzen zum Testen
- Nullhypothese, Alternativhypothese, p -Wert
- Zusammenhang zwischen KI und Hypothesentest

Konfidenzintervalle und Hypothesentests sind zwei Seiten derselben Medaille.