

# Grenzwertsätze

Lektion B06 – BSc Wahrscheinlichkeit und Statistik

Digital Finance

- 1 Gesetz der großen Zahlen
- 2 Zentraler Grenzwertsatz
- 3 Normalapproximation der Binomialverteilung
- 4 Anwendungen
- 5 Zusammenfassung
- 6 Vertiefung und Wiederholung

**Am Ende dieser Lektion werden Sie in der Lage sein:**

- ① Das **Gesetz der großen Zahlen** (GGZ) zu formulieren und zu erklären, warum der Stichprobenmittelwert gegen  $\mu$  konvergiert
- ② Den **Zentralen Grenzwertsatz** (ZGS) zu formulieren und seine Bedeutung für die Statistik zu beschreiben
- ③ Die **Normalapproximation der Binomialverteilung** mit Stetigkeitskorrektur anzuwenden

**Voraussetzungen:** Erwartungswert, Varianz, Normalverteilung (B03–B04)

---

Die Grenzwertsätze sind das Fundament der gesamten schließenden Statistik.

## Motivation: Warum stabilisieren sich Durchschnitte?

### Alltagserfahrung:

- Je öfter wir würfeln, desto näher liegt der Durchschnitt bei 3,5
- Je mehr Versicherungspolicen, desto vorhersagbarer die Schadenquote
- Je mehr Trades, desto stabiler die durchschnittliche Rendite

**Frage:** Gibt es ein mathematisches Gesetz, das diese Stabilisierung garantiert?

**Antwort:** Ja – das **Gesetz der großen Zahlen** (GGZ).

**Kernintuition:** Der Stichprobenmittelwert  $\bar{X}_n$  wird mit wachsendem  $n$  immer “näher” am wahren Erwartungswert  $\mu = E[X]$ .

---

Das GGZ erklärt, warum Casinos langfristig immer gewinnen.

## Gesetz der großen Zahlen – Definition

**Gegeben:**  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängig und identisch verteilt (i.i.d.) mit  $E[X_i] = \mu$  und  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ .

**Stichprobenmittelwert:**

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

**Schwaches Gesetz der großen Zahlen:**

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu \quad (\text{Konvergenz in Wahrscheinlichkeit})$$

Das bedeutet: Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt

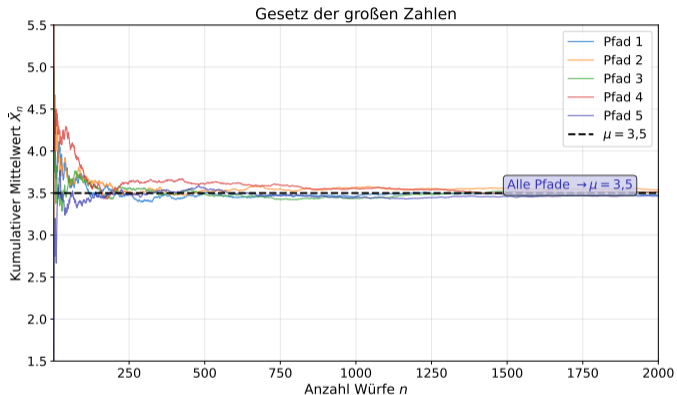
$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

**Voraussetzungen:**

- $X_i$  unabhängig und identisch verteilt (i.i.d.)
- Endlicher Erwartungswert  $E[X_i] = \mu$

---

“In Wahrscheinlichkeit” = die Abweichung  $|\bar{X}_n - \mu|$  wird beliebig klein.



## Beobachtungen:

- Jeder Pfad beginnt mit starken Schwankungen
- Mit wachsendem  $n$  konvergieren **alle** Pfade gegen  $\mu = 3,5$
- Die “Trichterbewegung” illustriert die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit

5 unabhängige Simulationen eines fairen Würfels – alle konvergieren gegen  $\mu = 3,5$ .

## Beweisskizze über die Tschebyscheff-Ungleichung:

Für  $\bar{X}_n$  gilt:

$$E[\bar{X}_n] = \mu, \quad \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Die Tschebyscheff-Ungleichung liefert:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Für  $n \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \checkmark$$

**Schlüsselidee:** Die Varianz von  $\bar{X}_n$  schrumpft mit Rate  $\frac{1}{n}$ .

---

Die Tschebyscheff-Ungleichung ist das Werkzeug: große Abweichungen werden unwahrscheinlich.

## Beispiel: Durchschnittliche Portfolio-Rendite

Ein Fonds investiert in  $n$  unabhängige Wertpapiere mit:

$$E[R_i] = 8\%, \quad \text{SD}(R_i) = 20\%$$

Die durchschnittliche Rendite  $\bar{R}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$  hat:

$$E[\bar{R}_n] = 8\%, \quad \text{SD}(\bar{R}_n) = \frac{20\%}{\sqrt{n}}$$

$n$ (Wertpapiere)	1	10	100	1000
$\text{SD}(\bar{R}_n)$	20%	6,3%	2,0%	0,6%

⇒ **Diversifikation funktioniert**, weil das GGZ gilt!

Mehr Wertpapiere ⇒ weniger Unsicherheit über die Durchschnittsrendite.

## Vom GGZ zum ZGS: Was fehlt noch?

**Das GGZ sagt:**  $\bar{X}_n$  konvergiert gegen  $\mu$  (einen *Punkt*).

**Aber:** Wie ist  $\bar{X}_n$  verteilt, bevor es "angekommen" ist?

**GGZ:** Wohin konvergiert  $\bar{X}_n$ ?  $\rightarrow$  Gegen  $\mu$

**ZGS:** Wie ist  $\bar{X}_n$  verteilt?  $\rightarrow$  Annähernd  $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Der **Zentrale Grenzwertsatz** (ZGS) beantwortet diese Frage – und liefert damit die Grundlage für:

- Konfidenzintervalle
- Hypothesentests
- Risikobewertung in der Finanzwelt

---

Der ZGS ist das wichtigste Theorem der angewandten Statistik.

## Zentraler Grenzwertsatz – Aussage

**Gegeben:**  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d. mit  $E[X_i] = \mu$  und  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ .

**Zentraler Grenzwertsatz (ZGS):**

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

**Äquivalent:**

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{für großes } n$$

**Das Bemerkenswerte:**

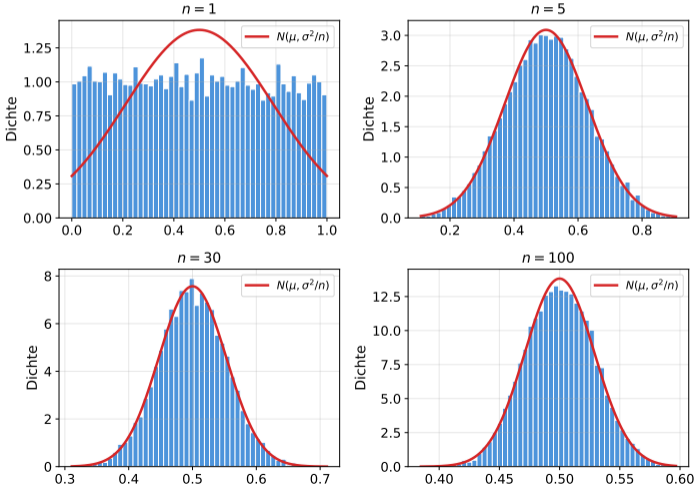
- Die Aussage gilt **unabhängig** von der Verteilung der  $X_i$ !
- Egal ob gleichverteilt, exponentialverteilt, Bernoulli, ...
- Einzige Voraussetzung:  $\sigma^2 < \infty$

**Faustregel:** Die Approximation ist gut für  $n \geq 30$ .

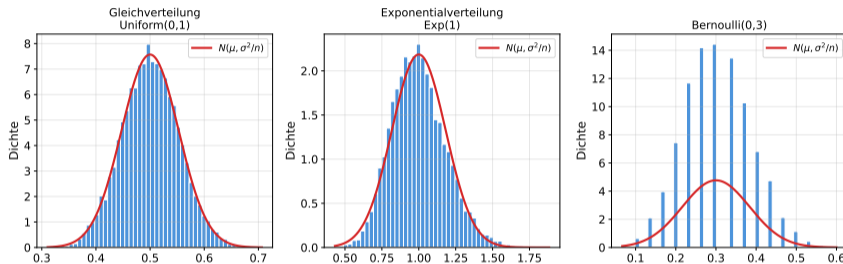
---

$\sim$  bedeutet "approximativ verteilt wie". Der ZGS erklärt, warum die Normalverteilung so wichtig ist.

## Zentraler Grenzwertsatz: Verteilung von $\bar{X}_n$



Zentraler Grenzwertsatz: Verschiedene Ausgangsverteilungen ( $n = 30$ )



## Beobachtungen:

- **Gleichverteilung:** Symmetrisch  $\Rightarrow$  konvergiert sehr schnell
- **Exponentialverteilung:** Rechtsschief  $\Rightarrow$  konvergiert etwas langsamer
- **Bernoulli(0,3):** Diskret und schief  $\Rightarrow$  bei  $n = 30$  schon gut

Der ZGS gilt für alle Verteilungen mit endlicher Varianz – das ist seine Stärke!

### Der ZGS gilt, wenn:

- 1  $X_1, X_2, \dots$  sind **unabhängig**
- 2  $X_1, X_2, \dots$  sind **identisch verteilt**
- 3  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$  (endliche Varianz)

### Der ZGS gilt nicht (oder nur eingeschränkt), wenn:

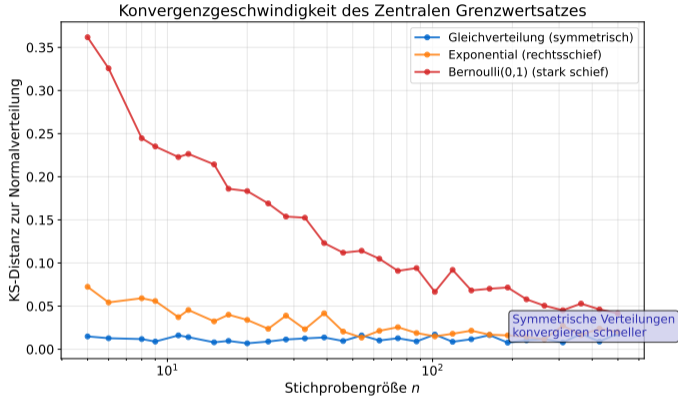
- Die Varianz unendlich ist (z. B. Cauchy-Verteilung)
- Starke Abhängigkeiten bestehen (z. B. autokorrelierte Zeitreihen)
- $n$  zu klein ist für stark schiefe Verteilungen

### Konvergenzgeschwindigkeit:

- Symmetrische Verteilungen: Sehr schnell (schon ab  $n \approx 10$ )
- Schiefe Verteilungen: Langsamer (Faustregel  $n \geq 30$ )
- Extrem schiefe: Kann  $n > 100$  erfordern

---

In der Praxis: Immer prüfen, ob  $n$  groß genug ist für die gegebene Verteilung.



## Ablesen:

- Symmetrische Verteilungen (Gleichverteilung) konvergieren am schnellsten
- Schiefe Verteilungen (Exponential, Bernoulli) benötigen größeres  $n$
- Ab  $n \approx 100$  sind alle drei praktisch normalverteilt

KS-Distanz = maximale Abweichung zwischen empirischer und theoretischer Verteilungsfunktion.

**Situation:** Ein Online-Händler versendet  $n = 64$  Pakete pro Tag.

Die Lieferzeit  $X_i$  (in Tagen) hat  $\mu = 3$  und  $\sigma = 2$ .

**Gesucht:**  $P(\bar{X}_{64} > 3,5)$  – Wahrscheinlichkeit, dass die mittlere Lieferzeit 3,5 Tage übersteigt.

**Lösung mit dem ZGS:**

Nach dem ZGS gilt  $\bar{X}_{64} \sim N(3, \frac{4}{64}) = N(3; 0,0625)$ .

Standardisierung:

$$z = \frac{3,5 - 3}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{0,5}{2/\sqrt{64}} = \frac{0,5}{0,25} = 2,0$$

$$P(\bar{X}_{64} > 3,5) = P(Z > 2,0) = 1 - \Phi(2,0) = 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228}$$

⇒ Nur 2,3% Wahrscheinlichkeit, dass die mittlere Lieferzeit  $> 3,5$  Tage beträgt.

---

**Beachte:** Wir mussten die Verteilung der  $X_i$  nicht kennen – nur  $\mu$  und  $\sigma$ .

## Beispiel: Risikomessung eines Portfolios

Ein Portfolio besteht aus  $n = 100$  unabhängigen Positionen mit:

$$E[R_i] = 0,5\%, \quad SD(R_i) = 3\%$$

**Gesamtrendite:**  $S_n = \sum_{i=1}^{100} R_i$

Nach dem ZGS:

$$S_{100} \sim N(n\mu, n\sigma^2) = N(50\%, 900\%^2)$$

$$SD(S_{100}) = \sqrt{100} \cdot 3\% = 30\%$$

**Value at Risk (VaR) bei 5%:**

$$\text{VaR}_{5\%} = \mu_S + z_{0,05} \cdot \sigma_S = 50 + (-1,645) \cdot 30 = \boxed{0,65\%}$$

⇒ Mit 95% Sicherheit verliert das Portfolio nicht mehr als 0,65% seines Wertes.

---

Der ZGS ermöglicht die Berechnung von Risikomassen, ohne die genaue Verteilung zu kennen.

## Von der Binomialverteilung zur Normalverteilung

**Erinnerung:**  $X \sim B(n, p)$  zählt Erfolge bei  $n$  unabhängigen Versuchen.

Wir können  $X$  als Summe von Bernoulli-Variablen schreiben:

$$X = \underbrace{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}_{\text{i.i.d. Bernoulli}(p)}$$

⇒ Der **ZGS** ist anwendbar! Für großes  $n$ :

$$X \sim B(n, p) \sim N(np, np(1-p))$$

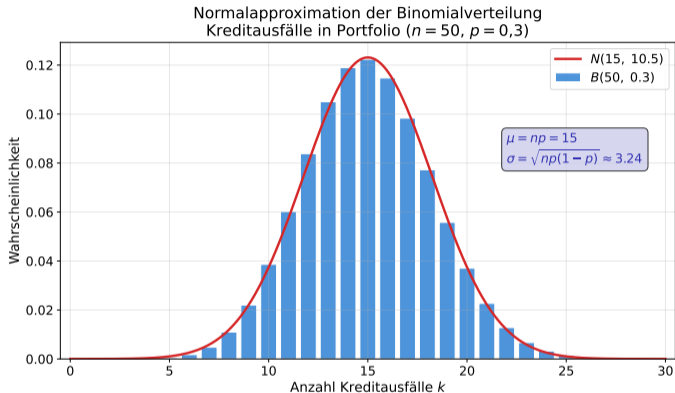
**Faustregel:** Die Approximation ist gut, wenn:

$$np \geq 5 \quad \text{und} \quad n(1-p) \geq 5$$

**Beispiel:**  $B(50, 0,3)$ :  $np = 15 \geq 5 \checkmark$ ,  $n(1-p) = 35 \geq 5 \checkmark$

---

Die Normalapproximation erspart das Aufsummieren vieler Binomialwahrscheinlichkeiten.



## Beobachtungen:

- Die Normalkurve  $N(15, 10,5)$  passt sehr gut auf die Binomial-Balken
- Der Fit ist am besten in der Mitte der Verteilung
- In den Rändern gibt es kleine Abweichungen

Finanzkontext: Kreditausfälle im Portfolio ( $n = 50$  Kredite,  $p = 0,3$  Ausfallrate).

**Problem:** Die Binomialverteilung ist *diskret*, die Normalverteilung *stetig*.

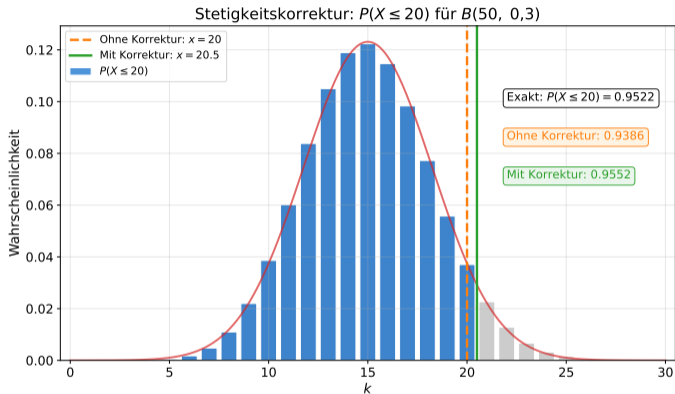
Beim Übergang von diskret zu stetig geht etwas "Fläche" verloren.

**Lösung – Stetigkeitskorrektur ( $\pm 0,5$ ):**

Diskret (exakt)	Stetig (mit Korrektur)
$P(X \leq k)$	$P(Y \leq k + 0,5)$
$P(X \geq k)$	$P(Y \geq k - 0,5)$
$P(X = k)$	$P(k - 0,5 \leq Y \leq k + 0,5)$
$P(a \leq X \leq b)$	$P(a - 0,5 \leq Y \leq b + 0,5)$

Dabei ist  $Y \sim N(np, np(1 - p))$ .

Die Stetigkeitskorrektur verbessert die Approximation, besonders bei kleinem  $n$ .



## Ergebnis für $P(X \leq 20)$ bei $B(50, 0,3)$ :

- **Mit** Stetigkeitskorrektur ( $x = 20,5$ ): Näher am exakten Wert
- **Ohne** Stetigkeitskorrektur ( $x = 20$ ): Leicht daneben

Regel: Bei der Normalapproximation immer  $\pm 0,5$  berücksichtigen!

## Normalapproximation: Rechenbeispiel

**Situation:** Ein Kreditportfolio hat  $n = 100$  Kredite, Ausfallwahrscheinlichkeit  $p = 0,04$ .  
 $X =$  Anzahl Ausfälle,  $X \sim B(100, 0,04)$ .

**Prüfung:**  $np = 4 < 5$  – **Grenzfall!** (Poisson-Approximation wäre hier besser.)

Wir rechnen trotzdem zur Illustration:  $np = 4$ ,  $n(1 - p) = 96 \geq 5$ .

$\mu = np = 4$ ,  $\sigma = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{3,84} = 1,96$ .

**Gesucht:**  $P(X \geq 8)$  (8 oder mehr Ausfälle)

**Mit Stetigkeitskorrektur:**  $P(X \geq 8) \approx P(Y \geq 7,5)$

$$z = \frac{7,5 - 4}{1,96} = \frac{3,5}{1,96} = 1,786$$

$$P(X \geq 8) \approx 1 - \Phi(1,786) \approx 1 - 0,9629 = \boxed{0,0371}$$

---

**Exakter Wert:**  $P(X \geq 8) = 0,0369$  – die Approximation ist hier recht gut.

**Rezept für  $P(X \leq k)$  bei  $X \sim B(n, p)$ :**

- 1 **Prüfe:**  $np \geq 5$  und  $n(1-p) \geq 5$ ?
- 2 **Berechne:**  $\mu = np$  und  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$
- 3 **Korrigiere:**  $k \rightarrow k + 0,5$  (Stetigkeitskorrektur)
- 4 **Standardisiere:**  $z = \frac{(k+0,5)-\mu}{\sigma}$
- 5 **Ablese:**  $P(X \leq k) \approx \Phi(z)$

**Übung:**  $X \sim B(200, 0,45)$ . Berechne  $P(X \leq 80)$ .

- 1  $np = 90 \geq 5 \checkmark$ ,  $n(1-p) = 110 \geq 5 \checkmark$
- 2  $\mu = 90$ ,  $\sigma = \sqrt{200 \cdot 0,45 \cdot 0,55} = \sqrt{49,5} = 7,036$
- 3 Korrektur: 80,5
- 4  $z = \frac{80,5-90}{7,036} = \frac{-9,5}{7,036} = -1,350$
- 5  $P(X \leq 80) \approx \Phi(-1,35) = 0,0885$

---

Dieses 5-Schritte-Rezept deckt alle Prüfungsaufgaben ab!

## Anwendung 1: Portfolio-Risiko

**Situation:** Ein Versicherungsunternehmen hat  $n = 10\,000$  Policen.  
Jede Police hat Schadenwahrscheinlichkeit  $p = 0,02$  und Schadenshöhe  $10\,000$ .

**Anzahl Schadenfälle:**  $X \sim B(10\,000; 0,02)$

Nach dem ZGS:

$$X \sim N(200, 196), \quad \sigma = \sqrt{196} = 14$$

**Gesamtschaden:**  $S = 10\,000 \cdot X$

$$S \sim N(2\,000\,000; (140\,000)^2)$$

**99%-VaR:**

$$S_{99\%} = 2\,000\,000 + 2,326 \cdot 140\,000 = 2\,325\,640$$

⇒ Die Versicherung sollte mindestens 2,33 Mio. als Reserve halten.

---

Ohne ZGS müsste man  $P(X = k)$  für  $k = 0, 1, \dots, 10\,000$  einzeln berechnen!

## Anwendung 2: Qualitätskontrolle

**Situation:** Eine Maschine produziert Bauteile mit Defektrate  $p = 0,05$ .

Aus einer Charge von  $n = 400$  Teilen wird eine Stichprobe gezogen.

$X =$  Anzahl defekter Teile,  $X \sim B(400, 0,05)$ .

$\mu = 20$ ,  $\sigma = \sqrt{400 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = \sqrt{19} = 4,359$ .

**Frage:** Wie wahrscheinlich sind mehr als 30 defekte Teile?

$$P(X > 30) \approx P\left(Z > \frac{30,5 - 20}{4,359}\right) = P(Z > 2,41) = 1 - 0,9920 = \boxed{0,008}$$

⇒ Weniger als 1% Wahrscheinlichkeit. Wenn  $X > 30$  beobachtet wird, deutet das auf ein **systematisches Problem** hin.

---

Die Normalapproximation ermöglicht schnelle Grenzwertberechnungen in der Qualitätskontrolle.

## Anwendung 3: Wahlprognosen

**Situation:** In einer Umfrage werden  $n = 1000$  Personen befragt.

Der wahre Stimmenanteil einer Partei sei  $p = 0,35$ .

$\hat{p} = \bar{X}_n$  (Stichprobenanteil), mit  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ .

Nach dem ZGS:

$$\hat{p} \overset{\sim}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) = N\left(0,35, \frac{0,2275}{1000}\right)$$

$$\text{SD}(\hat{p}) = \sqrt{0,0002275} = 0,0151 \approx 1,5\%$$

**95%-Konfidenzintervall:**

$$0,35 \pm 1,96 \cdot 0,015 = [0,32; 0,38] = [32\%; 38\%]$$

⇒ Die “±3 Prozentpunkte” in Wahlumfragen kommen direkt vom ZGS!

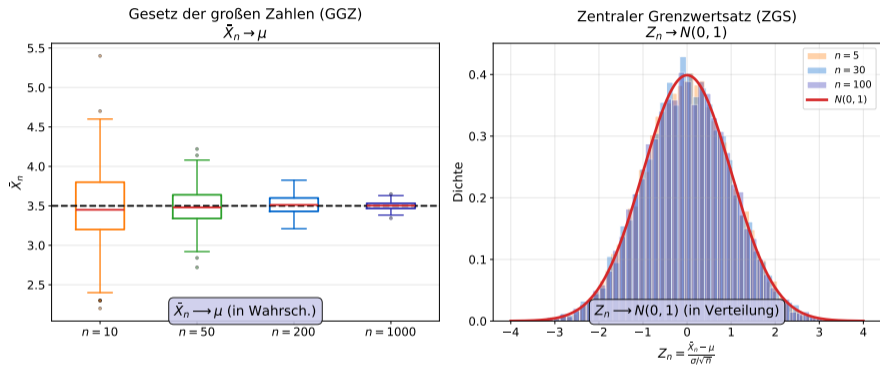
---

Die “Fehlertoleranz” einer Umfrage ist eine direkte Anwendung des ZGS.

	Gesetz der großen Zahlen	Zentraler Grenzwertsatz
<b>Aussage</b>	$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$	$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$
<b>Art der Konvergenz</b>	In Wahrscheinlichkeit	In Verteilung
<b>Sagt aus über</b>	Den <b>Wert</b> von $\bar{X}_n$	Die <b>Verteilung</b> von $\bar{X}_n$
<b>Praktischer Nutzen</b>	Gesetz der Durchschnitte	Konfidenzintervalle, Tests
<b>Voraussetzung</b>	i.i.d., $E[X]$ existiert	i.i.d., $\text{Var}(X) < \infty$
<b>Anwendungsbeispiel</b>	Casino, Diversifikation	VaR, Umfragegenauigkeit

GGZ = "Wohin?" (Punktconvergenz). ZGS = "Wie verteilt?" (Verteilungsaussage).

# Übersicht: GGZ und ZGS



## Faustregel: Wann ist $n$ groß genug?

Situation	Mindestens $n$
Symmetrische Verteilung	$\approx 10$
Leicht schiefe Verteilung	$\approx 30$
Stark schiefe Verteilung	$\approx 50-100$
Normalapproximation $B(n, p)$	$np \geq 5$ und $n(1-p) \geq 5$

Die Standardregel:

$n \geq 30$  ist ein guter Richtwert für die meisten Anwendungen.

Im Zweifelsfall: Simulation nutzen, um die Güte der Approximation zu prüfen.

Formel	Name
$E[\bar{X}_n] = \mu, \quad \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$	Eigenschaften von $\bar{X}_n$
$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$	Gesetz der großen Zahlen
$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$	Zentraler Grenzwertsatz
$B(n, p) \sim N(np, np(1-p))$	Normalapproximation
$z = \frac{(k \pm 0,5) - np}{\sqrt{np(1-p)}}$	Stetigkeitskorrektur
$np \geq 5$ und $n(1-p) \geq 5$	Faustregel Normalapprox.

Diese Formeln bilden die Grundlage für Konfidenzintervalle und Hypothesentests (B07/B08).

## Beispiel: Kombination GGZ und ZGS

**Situation:** Die monatliche Rendite eines ETFs hat  $\mu = 0,8\%$  und  $\sigma = 4\%$ .

Wir beobachten  $n = 36$  Monate.

**(a) GGZ – Was erwarten wir im Durchschnitt?**

$\bar{R}_{36}$  konvergiert gegen  $\mu = 0,8\%$ .

$$SD(\bar{R}_{36}) = \frac{4}{\sqrt{36}} = \frac{4}{6} = 0,667\%$$

**(b) ZGS – Wie wahrscheinlich ist  $\bar{R}_{36} < 0$ ?**

$$z = \frac{0 - 0,8}{0,667} = -1,20$$

$$P(\bar{R}_{36} < 0) = \Phi(-1,20) = \boxed{0,1151}$$

⇒ Ca. 11,5% Wahrscheinlichkeit, dass die mittlere Monatsrendite über 3 Jahre negativ ist.

---

GGZ gibt die Richtung, ZGS quantifiziert die Unsicherheit.

## Beispiel: Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur

**Situation:** Bei einer Prüfung bestehen 70% der Studierenden ( $p = 0,7$ ).  
In einem Jahrgang mit  $n = 250$  Studierenden.

**Gesucht:**  $P(X \geq 185)$  (mindestens 185 bestehen).

**Prüfung:**  $np = 175 \geq 5 \checkmark$ ,  $n(1 - p) = 75 \geq 5 \checkmark$

$\mu = np = 175$ ,  $\sigma = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{52,5} = 7,246$

**Mit Stetigkeitskorrektur:**  $P(X \geq 185) \approx P(Y \geq 184,5)$

$$z = \frac{184,5 - 175}{7,246} = \frac{9,5}{7,246} = 1,311$$

$$P(X \geq 185) \approx 1 - \Phi(1,311) = 1 - 0,9051 = \boxed{0,0949}$$

$\Rightarrow$  Ca. 9,5% Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 185 Studierende bestehen.

---

Ohne Korrektur:  $z = 1,380$ ,  $P \approx 0,0838$  – größere Abweichung vom exakten Wert.

## Fehler 1: GGZ und ZGS verwechseln

- GGZ:  $\bar{X}_n$  konvergiert gegen einen **Wert** ( $\mu$ )
- ZGS:  $\bar{X}_n$  hat eine bestimmte **Verteilung** ( $\approx$  Normal)

## Fehler 2: Stetigkeitskorrektur vergessen

- Bei der Normalapproximation der Binomialverteilung **immer**  $\pm 0,5$  verwenden

## Fehler 3: Faustregel nicht prüfen

- Vor der Normalapproximation:  $np \geq 5$  und  $n(1-p) \geq 5$  prüfen!
- Sonst besser: Poisson-Approximation oder exakte Berechnung

## Fehler 4: $\sigma$ statt $\sigma/\sqrt{n}$ verwenden

- Beim Standardisieren von  $\bar{X}_n$ : Der Standardfehler ist  $\sigma/\sqrt{n}$ , **nicht**  $\sigma$ !

---

Prüfungstipp: Schreiben Sie immer  $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$  explizit hin.

### Prüfen Sie sich selbst:

- ✓ **GGZ:**  $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$  – Stichprobenmittelwert konvergiert gegen Erwartungswert
- ✓ **ZGS:**  $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$  – standardisierter Mittelwert wird normalverteilt
- ✓ **Bedingungen:** i.i.d., endliche Varianz,  $n \geq 30$  als Faustregel
- ✓ **Normalapproximation:**  $B(n, p) \approx N(np, np(1 - p))$  wenn  $np \geq 5$ ,  $n(1 - p) \geq 5$
- ✓ **Stetigkeitskorrektur:**  $\pm 0,5$  bei der Approximation diskreter Verteilungen
- ✓ **Anwendungen:** VaR, Umfragen, Qualitätskontrolle, Versicherungsmathematik

---

Wenn Sie alle Punkte verstanden haben, sind Sie bereit für Lektion B07 (Konfidenzintervalle)!