

# Stetige Verteilungen und Standardisierung

## Lektion B04 – BSc Wahrscheinlichkeit und Statistik

Digital Finance



## Am Ende dieser Lektion werden Sie in der Lage sein:

- 1 Stetige Zufallsvariablen von diskreten abzugrenzen und  $P(X = x) = 0$  zu erklären
- 2 Die Dichtefunktion (PDF) und Verteilungsfunktion (CDF) zu interpretieren und ihren Zusammenhang zu beschreiben
- 3 Erwartungswert und Varianz stetiger Zufallsvariablen mittels Integralen zu berechnen
- 4 Lineare Transformationen auf Erwartungswert und Varianz anzuwenden ( $Y = aX + b$ )
- 5 Eine Normalverteilung zu standardisieren (Z-Transformation) und z-Tabellen zu nutzen
- 6 Die Gleichverteilung und Normalverteilung mit ihren Parametern und der 68-95-99,7-Regel anzuwenden

---

Diese Ziele leiten, was Sie aus dieser Lektion beherrschen sollten.

### Erinnerung: Diskrete Zufallsvariablen

- Endlich oder abzählbar viele Werte:  $X \in \{x_1, x_2, \dots\}$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:  $P(X = x_i) > 0$  für jedes  $x_i$
- Beispiel: Anzahl Handelsaufträge pro Stunde

### Neu: Stetige Zufallsvariablen

- Überabzählbar viele Werte – ein ganzes Intervall  $[a, b]$  oder  $\mathbb{R}$
- Beispiel: Tägliche Aktienrendite, Wartezeit bis zum nächsten Trade
- Einzelne Punkte haben Wahrscheinlichkeit **Null**:  $P(X = x) = 0$

---

Stetig = Werte aus einem Intervall. Diskret = Werte aus einer Liste.

# Warum ist $P(X = x) = 0$ ?

## Intuition:

- Es gibt überabzählbar viele Werte in jedem Intervall
- Die Wahrscheinlichkeit verteilt sich auf unendlich viele Punkte
- Jeder einzelne Punkt bekommt daher "Masse Null"

## Konsequenz für die Praxis:

- Wir fragen nie nach  $P(X = 2,317\%)$ , sondern nach  $P(2\% \leq X \leq 3\%)$
- Wahrscheinlichkeiten werden über **Intervalle** definiert
- Es gilt:  $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$  (Randpunkte egal)

## Finanzbeispiel:

„Wie wahrscheinlich ist es, dass die Tagesrendite der Nestlé-Aktie *genau* 0,5371228% beträgt?“ → Quasi null.

„Wie wahrscheinlich ist eine Rendite *zwischen* 0% und 1%?“ → Sinnvolle Frage!

---

Bei stetigen Verteilungen zählen Intervalle, nicht einzelne Punkte.

# Die Dichtefunktion $f(x)$

**Definition:** Eine Funktion  $f(x)$  heisst **Dichtefunktion** (PDF) einer stetigen Zufallsvariable  $X$ , wenn:

- 1  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$
- 2  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  (Gesamtfläche = 1)

**Wahrscheinlichkeit als Fläche:**

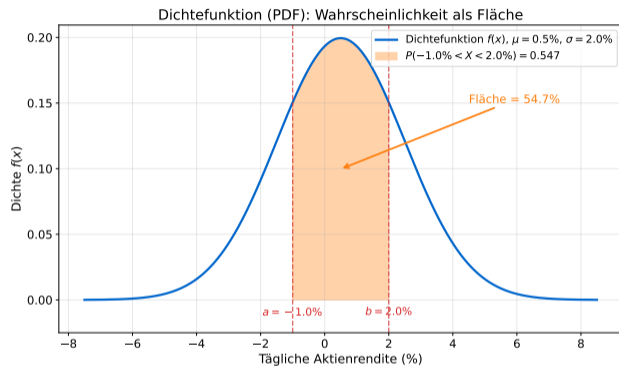
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

**Wichtig:**

- $f(x)$  ist **keine** Wahrscheinlichkeit –  $f(x)$  kann grösser als 1 sein!
- $f(x)$  gibt die **Dichte** an: “Wie konzentriert ist Wahrscheinlichkeit bei  $x$ ?”
- Nur die **Fläche** unter der Kurve liefert eine Wahrscheinlichkeit

---

PDF: Die Höhe ist Dichte, die Fläche ist Wahrscheinlichkeit.



**Interpretation:** Die schattierte Fläche zwischen  $a = -1\%$  und  $b = 2\%$  entspricht der Wahrscheinlichkeit  $P(-1\% < X < 2\%)$ .

Je höher die Dichte, desto mehr Wahrscheinlichkeitsmasse liegt in der Nähe dieses Wertes.

**Finanzbeispiel:** Wahrscheinlichkeit, dass die tägliche Aktienrendite zwischen  $-1\%$  und  $2\%$  liegt.

## Definition:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

## Eigenschaften:

- $F(x)$  ist **monoton wachsend**:  $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- $F(x)$  ist **stetig** (keine Sprünge – im Gegensatz zu diskreten CDF)

## Zusammenhang PDF $\leftrightarrow$ CDF:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \text{und} \quad f(x) = F'(x)$$

Die PDF ist die **Ableitung** der CDF. Die CDF ist das **Integral** der PDF.

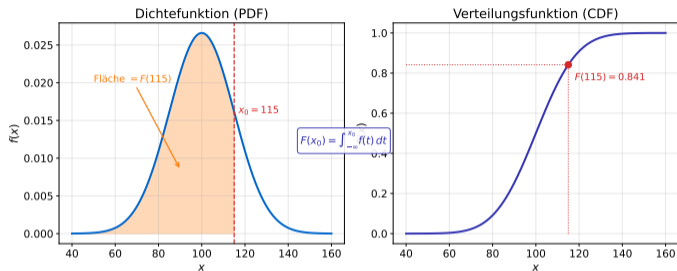
## Intervallwahrscheinlichkeit:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

---

CDF: Kumulierte Wahrscheinlichkeit bis zum Punkt  $x$ .

## Grafik: PDF und CDF im Vergleich



**Links:** Die schattierte Fläche unter der PDF bis  $x_0$  ergibt den CDF-Wert  $F(x_0)$ .

**Rechts:** Die CDF zeigt die kumulierte Wahrscheinlichkeit als monoton steigende Kurve.

---

Die Fläche links unter der PDF entspricht dem Funktionswert der CDF rechts.

**Erwartungswert:**

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Interpretation: Schwerpunkt (“Massenmittelpunkt”) der Verteilung.

**Varianz:**

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \cdot f(x) dx = E[X^2] - (E[X])^2$$

Interpretation: Mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

**Standardabweichung:**

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

---

Selbe Konzepte wie diskret – Summe wird durch Integral ersetzt.

**Linearität des Erwartungswertes:**

$$E[aX + b] = a \cdot E[X] + b$$

**Varianz bei linearer Transformation:**

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$$

**Wichtig:**

- Addition einer Konstanten  $b$  verschiebt den Erwartungswert, ändert aber die Varianz **nicht**
- Multiplikation mit  $a$  skaliert sowohl Erwartungswert als auch Standardabweichung
- Die Varianz skaliert mit  $a^2$  (quadratischer Effekt)

**Beispiel:** Portfoliowert  $X$  in EUR mit  $E[X] = 1000$ ,  $\sigma_X = 50$ .

Wechselkurs CHF:  $Y = 1,05 \cdot X + 10$  (Gebühr).

$\Rightarrow E[Y] = 1,05 \cdot 1000 + 10 = 1060$  CHF,  $\sigma_Y = 1,05 \cdot 50 = 52,5$  CHF.

---

Die Rechenregeln für  $E$  und  $\text{Var}$  gelten für diskrete und stetige ZV gleichermassen.

## Lineare Transformation $Y = aX + b$

**Gegeben:**  $X$  ist stetige ZV mit  $E[X] = \mu_X$ ,  $\text{Var}(X) = \sigma_X^2$ .

**Transformation:**  $Y = aX + b$  mit Konstanten  $a, b \in \mathbb{R}$ .

### Regeln

$$E[Y] = a \cdot \mu_X + b$$

$$\text{Var}(Y) = a^2 \cdot \sigma_X^2$$

$$\sigma_Y = |a| \cdot \sigma_X$$

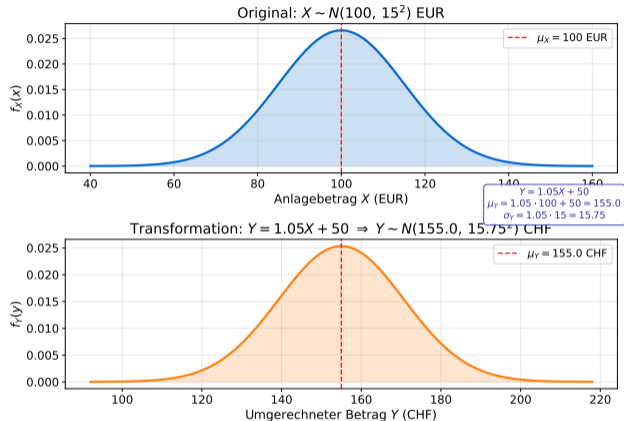
### Warum ist das nützlich?

- Währungsumrechnung: EUR  $\rightarrow$  CHF mit Wechselkurs  $a$  und Gebühr  $b$
- Temperaturumrechnung: Celsius  $\rightarrow$  Fahrenheit
- Normierung auf andere Einheiten
- **Standardisierung** als Spezialfall (nächster Abschnitt)

---

Lineare Transformation: Erwartungswert wird linear transformiert, Varianz quadratisch skaliert.

## Grafik: EUR → CHF Transformation



**Oben:** Anlagebetrag  $X \sim N(100, 15^2)$  in EUR.

**Unten:** Umgerechnet  $Y = 1,05 \cdot X + 50 \sim N(155, 15,75^2)$  in CHF.

Der Mittelwert verschiebt sich, die Streuung skaliert mit dem Faktor  $|a| = 1,05$ .

Praxis: Wechselkurs-Umrechnung als lineare Transformation.

**Problem:** Jede Normalverteilung hat andere Parameter  $\mu$  und  $\sigma$ .

→ Man bräuchte unendlich viele Tabellen!

**Lösung: Standardisierung**

## Z-Transformation

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

**Ergebnis:**  $Z \sim N(0, 1)$  – die **Standardnormalverteilung**.

**Nachweis:**

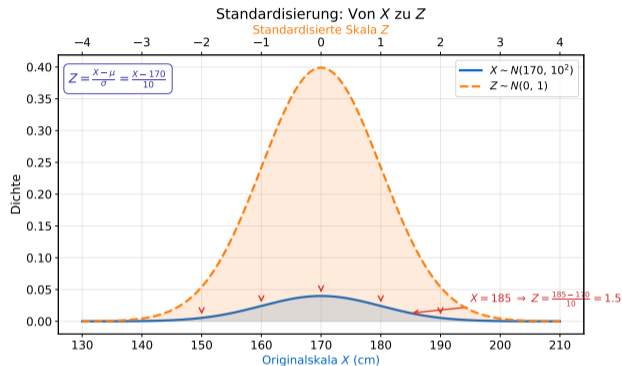
- $E[Z] = E\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma} (E[X] - \mu) = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$
- $\text{Var}(Z) = \text{Var}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \text{Var}(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$

⇒ Eine einzige Tabelle (die z-Tabelle) genügt für **alle** Normalverteilungen!

---

**Standardisierung:** Spezialfall der linearen Transformation mit  $a = 1/\sigma$ ,  $b = -\mu/\sigma$ .

# Grafik: Standardisierung



**Blau:** Originalverteilung  $X \sim N(170, 10^2)$  (Körpergröße in cm).

**Orange:** Standardisierte Verteilung  $Z \sim N(0, 1)$ .

Jeder X-Wert wird durch  $Z = (X - 170)/10$  auf die Z-Skala abgebildet.

Die Standardisierung ändert die Skala, aber nicht die Form der Verteilung.

**Aufgabe:** Gegeben  $X \sim N(170, 10^2)$ . Berechne  $P(X \leq 185)$ .

**Schritt 1: Standardisieren**

$$z = \frac{185 - 170}{10} = 1,5$$

**Schritt 2: z-Tabelle ablesen**

$$P(X \leq 185) = P(Z \leq 1,5) = \Phi(1,5) = 0,9332$$

**Schritt 3: Interpretieren**

93,32% der Personen sind kleiner oder gleich 185 cm.

**Variante:**  $P(X > 185) = 1 - \Phi(1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668 = 6,68\%$

**Intervall:**  $P(160 < X < 185) = \Phi(1,5) - \Phi(-1,0) = 0,9332 - 0,1587 = 0,7745$

---

Immer: (1) standardisieren, (2) Tabelle ablesen, (3) interpretieren.

## Die stetige Gleichverteilung $U(a, b)$

**Idee:** Alle Werte im Intervall  $[a, b]$  sind gleich wahrscheinlich.

**Dichtefunktion:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Verteilungsfunktion:**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für } x > b \end{cases}$$

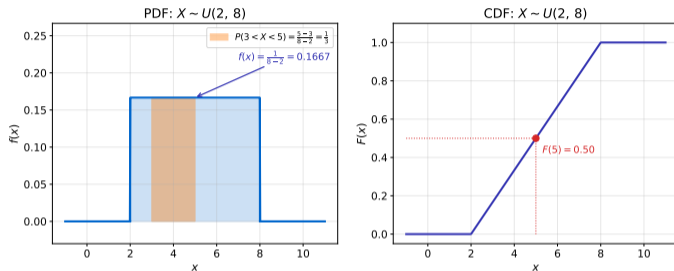
**Kenngößen:**

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

---

Gleichverteilung: Die einfachste stetige Verteilung – ein Rechteck.

## Grafik: Gleichverteilung $U(2, 8)$



**Links:** Die PDF ist ein Rechteck mit Höhe  $f(x) = 1/6$ . Orange:  $P(3 < X < 5)$ .

**Rechts:** Die CDF steigt linear von 0 auf 1 im Intervall  $[2, 8]$ .

**Berechnungen:**  $E[X] = \frac{2+8}{2} = 5$ ,  $\text{Var}(X) = \frac{(8-2)^2}{12} = 3$ ,  $P(3 < X < 5) = \frac{5-3}{8-2} = \frac{1}{3}$ .

**Anwendung:** Monte-Carlo-Simulation, Zufallszahlengeneratoren.

## In der Praxis:

- **Monte-Carlo-Simulation:** Basis aller Zufallszahlengeneratoren ( $U(0, 1)$ )
- **Rundungsfehler:** Fehler bei Rundung auf ganze Zahl  $\sim U(-0,5; 0,5)$
- **Wartezeit:** Ankunft an Bushaltestelle bei 10-Minuten-Takt  $\sim U(0, 10)$

## Beispiel: Zufällige Handelszeit

Ein Algorithmus platziert Aufträge gleichverteilt im Zeitfenster  $[9, 17]$  Uhr.

- $E[X] = \frac{9+17}{2} = 13$  Uhr
- $\sigma = \sqrt{\frac{(17-9)^2}{12}} = \frac{8}{\sqrt{12}} \approx 2,31$  Stunden
- $P(X < 11) = \frac{11-9}{17-9} = \frac{2}{8} = 0,25$

---

Die Gleichverteilung modelliert "maximale Unwissenheit" in einem Intervall.

# Die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$

**Die wichtigste Verteilung in der Statistik!**

**Dichtefunktion:**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

**Parameter:**

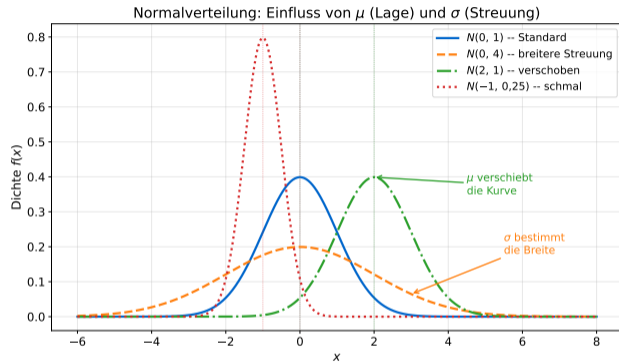
- $\mu$  = Erwartungswert (Lage/Symmetriezentrum)
- $\sigma^2$  = Varianz (Streuung),  $\sigma$  = Standardabweichung

**Eigenschaften:**

- Symmetrisch um  $\mu$ :  $f(\mu+x) = f(\mu-x)$
- Glockenförmig ("Glockenkurve")
- Wendepunkte bei  $\mu \pm \sigma$
- $E[X] = \mu$ ,  $\text{Var}(X) = \sigma^2$

---

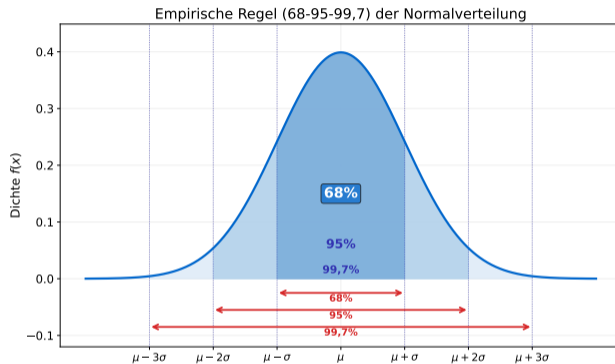
**Notation:**  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  – der zweite Parameter ist die Varianz, nicht  $\sigma$ .



- $\mu$  **verschiebt** die gesamte Kurve nach links oder rechts
- $\sigma$  **bestimmt die Breite**: kleines  $\sigma \rightarrow$  hohe, schmale Kurve; grosses  $\sigma \rightarrow$  flache, breite Kurve
- Die Fläche unter **jeder** Kurve ist immer genau 1

Grösseres  $\sigma$  = mehr Unsicherheit = breitere Verteilung bei gleichbleibender Gesamtfläche.

# Die empirische Regel (68-95-99,7)



- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 68\%$  – etwa zwei Drittel der Werte
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 95\%$  – fast alle Werte
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$  – praktisch alle Werte

**Faustregel:**  $\pm 2\sigma$  deckt 95% ab. Werte jenseits von  $\pm 3\sigma$  sind extrem selten.

# Die Standardnormalverteilung $N(0, 1)$

**Spezialfall:**  $\mu = 0, \sigma = 1$ .

**CDF-Notation:**

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

**Nützliche Symmetrie-Eigenschaft:**

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

**Wichtige Werte:**

|           |        |        |        |        |        |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $z$       | 0      | 1,0    | 1,645  | 1,96   | 2,576  |
| $\Phi(z)$ | 0,5000 | 0,8413 | 0,9500 | 0,9750 | 0,9950 |

$\Phi(1,96) = 0,975$  bedeutet: 97,5% der Werte liegen unter  $z = 1,96$ .

Daher:  $P(-1,96 < Z < 1,96) = 0,975 - 0,025 = 0,95 = 95\%$ .

Die  $z$ -Tabelle: Ihr wichtigstes Werkzeug für Normalverteilungs-Aufgaben.

Die z-Tabelle gibt  $\Phi(z) = P(Z \leq z)$  an.

**Beispiel:**  $z = 1,73$

- Zeile: 1,7 (erste Dezimalstelle)
- Spalte: 0,03 (zweite Dezimalstelle)
- Ablesen:  $\Phi(1,73) = 0,9582$

**Typische Aufgabentypen:**

- 1  $P(Z \leq z)$  – direkt ablesen:  $\Phi(z)$
- 2  $P(Z > z) = 1 - \Phi(z)$
- 3  $P(Z \leq -z) = 1 - \Phi(z)$  (Symmetrie)
- 4  $P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- 5 **Rückwärts:** Gegeben  $P(Z \leq z) = p$ , finde  $z = \Phi^{-1}(p)$

---

**Tipp:** Bei negativem  $z$  die Symmetrie nutzen:  $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ .

## Anwendung: Value at Risk (VaR)

**Definition:** Der **Value at Risk (VaR)** zum Niveau  $\alpha$  ist der maximale Verlust, der mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  nicht überschritten wird.

### Beispiel:

Portfoliorendite  $R \sim N(\mu = 0,05\%, \sigma^2 = (2\%)^2)$  täglich.

Portfoliowert: 1 Mio. EUR.

### VaR (95%):

- 1 Gesucht:  $r^*$  mit  $P(R \leq r^*) = 0,05$
- 2 Standardisieren:  $z^* = \Phi^{-1}(0,05) = -1,645$
- 3 Rücktransformieren:  $r^* = \mu + z^* \cdot \sigma = 0,05\% + (-1,645) \cdot 2\% = -3,24\%$
- 4  $\text{VaR} = 1\,000\,000 \times 3,24\% = 32\,400$  EUR

**Interpretation:** Mit 95% Sicherheit verliert das Portfolio an einem Tag höchstens 32 400 EUR.

---

VaR ist ein Standardmass im Risikomanagement und basiert direkt auf der Normalverteilung.

**Gleiche Annahmen:**  $R \sim N(0,05\%, (2\%)^2)$ , Portfoliowert 1 Mio. EUR.

**VaR (99%):**

- 1  $z^* = \Phi^{-1}(0,01) = -2,326$
- 2  $r^* = 0,05\% + (-2,326) \cdot 2\% = -4,60\%$
- 3  $\text{VaR} = 1\,000\,000 \times 4,60\% = 46\,020 \text{ EUR}$

**Vergleich:**

| Niveau | $z^*$  | VaR (EUR) |
|--------|--------|-----------|
| 90%    | -1,282 | 25 540    |
| 95%    | -1,645 | 32 400    |
| 99%    | -2,326 | 46 020    |

Höheres Konfidenzniveau  $\rightarrow$  grösserer VaR (konservativer).

Regulierung (Basel III) verlangt typischerweise VaR auf dem 99%-Niveau.

| Eigenschaft          | Diskret                           | Stetig                               |
|----------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| Wertebereich         | Abzählbar: $\{x_1, x_2, \dots\}$  | Intervall $[a, b]$ oder $\mathbb{R}$ |
| Wahrscheinlichkeit   | $P(X = x_i) > 0$                  | $P(X = x) = 0$                       |
| Funktion             | $p(x)$ – Wahrscheinlichkeitsfkt.  | $f(x)$ – Dichtefunktion              |
| CDF                  | Treppenfunktion                   | Stetige Funktion                     |
| $P(a < X < b)$       | $\sum_{a < x_i < b} p(x_i)$       | $\int_a^b f(x) dx$                   |
| $E[X]$               | $\sum x_i \cdot p(x_i)$           | $\int x \cdot f(x) dx$               |
| $\text{Var}(X)$      | $\sum (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)$ | $\int (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$     |
| $E[aX + b]$          | $a E[X] + b$                      | $a E[X] + b$                         |
| $\text{Var}(aX + b)$ | $a^2 \text{Var}(X)$               | $a^2 \text{Var}(X)$                  |

**Wichtig:** Die Rechenregeln für E und Var sind **identisch** – nur die Berechnungsmethode (Summe vs. Integral) ändert sich.

Diskret: zählen und summieren. Stetig: messen und integrieren.

## Kernkonzepte dieser Lektion:

- 1 **Stetige ZV:** Werte aus einem Intervall,  $P(X = x) = 0$ , Wahrscheinlichkeiten über Intervalle
- 2 **PDF  $f(x)$ :** Dichte  $\geq 0$ , Gesamtfläche = 1, Fläche = Wahrscheinlichkeit
- 3 **CDF  $F(x)$ :**  $F(x) = P(X \leq x)$ , steigend,  $F = \int f$ ,  $f = F'$
- 4 **Lineare Transformation:**  $E[aX + b] = a\mu + b$ ,  $\text{Var}(aX + b) = a^2\sigma^2$
- 5 **Standardisierung:**  $Z = (X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$  – eine Tabelle für alle
- 6 **Gleichverteilung:**  $U(a, b)$ , Rechteck-PDF,  $E[X] = (a + b)/2$
- 7 **Normalverteilung:** Glockenkurve, 68-95-99,7-Regel, VaR-Berechnung

**Nächste Lektion:** Gemeinsame Verteilungen, Kovarianz und Portfoliotheorie.

---

Standardisierung und z-Tabelle sind die zentralen Werkzeuge für die Klausur.