Diskrete Zufallsvariablen

Lektion B03 – BSc Wahrscheinlichkeit und Statistik

Digital Finance

Gliederung

Warum Zufallsvariablen?

Bisher (B01/B02): Wir kennen Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten.

Problem: Ein Investor fragt nicht "Was ist $P(\text{Kopf})$?", sondern:

- "Wie viel **Gewinn** erwarte ich?"
- "Wie gross ist mein **Risiko**?"
- "Wie **wahrscheinlich** ist ein Verlust über 10 000 ?"

$\Rightarrow$ Um zu **rechnen** – Mittelwerte, Streuung, Risiko – brauchen wir **Zahlen**.

Die Lösung: Zufallsvariablen ordnen jedem Ergebnis eine Zahl zu.

Ergebnis	X	Zahl
"Aktie steigt"	$\longrightarrow$	$+500$
"Aktie fällt"		-200

Zufallsvariablen sind die Brücke von der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Statistik.

Lernziele

Am Ende dieser Lektion werden Sie in der Lage sein:

1. Den Begriff der Zufallsvariablen als Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zu erklären
2. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion (PMF) und Verteilungsfunktion (CDF) diskreter Zufallsvariablen anzugeben
3. Erwartungswert $E[X]$ und Varianz $\mathrm{Var}(X)$ zu berechnen und zu interpretieren
4. Die diskrete Gleichverteilung mit ihren Kennzahlen zu beschreiben
5. Die Binomialverteilung auf Probleme mit n unabhängigen Versuchen anzuwenden
6. Die Poissonverteilung als Modell für seltene Ereignisse einzusetzen

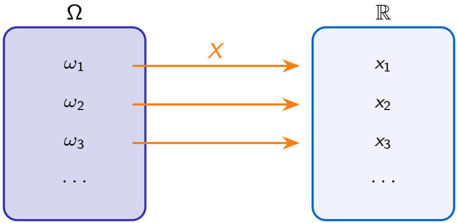
Diese Ziele leiten, was Sie aus dieser Lektion beherrschen sollten.

Was ist eine Zufallsvariable?

Idee: Wir ordnen jedem Ergebnis ω des Zufallsexperiments eine *Zahl* zu.

Definition: Eine Zufallsvariable X ist eine Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto X(\omega)$$



Beispiel: Zwei Münzwürfe, $\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$.
X = "Anzahl Kopf": $X(KK) = 2$, $X(KZ) = 1$, $X(ZK) = 1$, $X(ZZ) = 0$.

Eine Zufallsvariable "übersetzt" Ergebnisse in Zahlen – das ermöglicht Rechnen.

Diskret vs. stetig

Zwei Typen von Zufallsvariablen:

	Diskret	**Stetig**
Wertebereich	endlich oder abzählbar	überdeckt ein Intervall
Beispiele	Anzahl Trades, Würfelzahl	Rendite, Aktienkurs
Beschrieben durch	PMF $p(x)$	Dichtefunktion $f(x)$

In dieser Lektion: Wir behandeln nur diskrete Zufallsvariablen.

Finanzbeispiele (diskret):

- $X =$ Anzahl der Trades pro Tag
- $X =$ Anzahl der Kreditausfälle im Portfolio
- $X =$ Anzahl der Kunden in der Warteschlange

Stetige Zufallsvariablen folgen in Lektion B04.

Wahrscheinlichkeitsfunktion (PMF)

Definition: Die Wahrscheinlichkeitsfunktion (probability mass function, PMF) einer diskreten Zufallsvariablen X ist:

$$\boxed{p(x) = P(X = x)}$$

Eigenschaften:

1. $p(x) \geq 0$ für alle x
2. $\sum_{\text{alle } x} p(x) = 1$

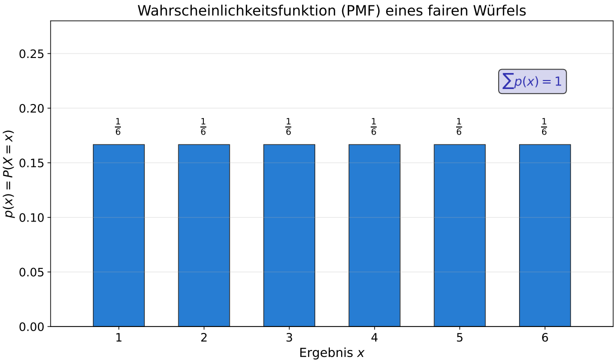
Beispiel – Fairer Würfel:

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Prüfung: $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$ ✓

Die PMF gibt die Wahrscheinlichkeit für jeden einzelnen Wert an.

PMF-Diagramm: Fairer Würfel

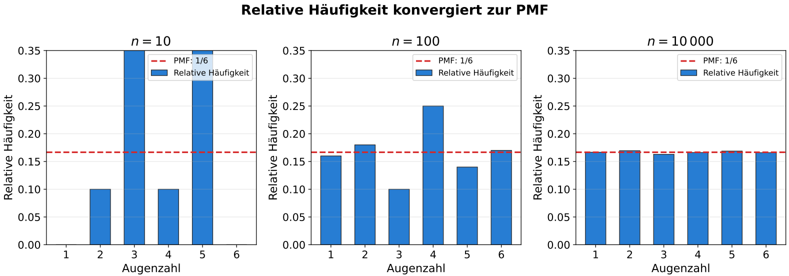


Beobachtungen:

- Alle Balken haben die gleiche Höhe $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$
- Die Summe aller Balkenhöhen ist 1
- Dies ist eine Gleichverteilung: jeder Wert gleich wahrscheinlich

Ein PMF-Diagramm zeigt die "Gewichtsverteilung" der Wahrscheinlichkeit.

Von der Häufigkeit zur PMF



Beobachtung:

- Bei wenigen Würfen ($n = 10$) sehen die Häufigkeiten *zufällig* aus
- Bei vielen Würfen ($n = 10\,000$) nähern sich die relativen Häufigkeiten der PMF an
- Die PMF beschreibt das **Langzeitverhalten** – sie ist der Grenzwert

Die PMF beschreibt das Langzeitverhalten – sie ist der Grenzwert der relativen Häufigkeiten.

Verteilungsfunktion (CDF)

Definition: Die Verteilungsfunktion (cumulative distribution function, CDF) ist:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)}$$

Eigenschaften:

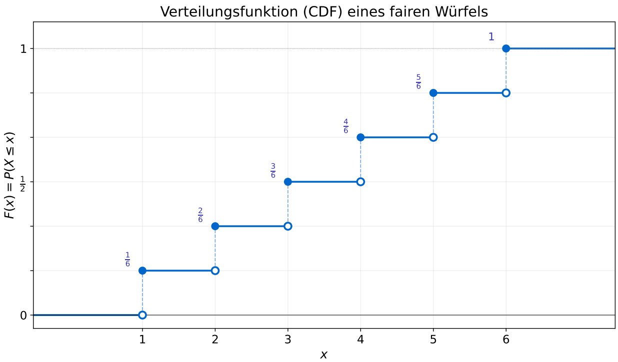
1. F ist monoton steigend (nicht fallend)
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
3. Für diskrete X: F ist eine **Treppenfunktion** mit Sprüngen an den Werten von X

Beispiel – Fairer Würfel:

x	1	2	3	4	5	6
$F(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

Die CDF kumuliert Wahrscheinlichkeiten: $F(3) = P(X \leq 3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

CDF als Treppenfunktion



Ablesen:

- $P(X \leq 4) = F(4) = \frac{4}{6} \approx 0{,}667$
- $P(X > 4) = 1 - F(4) = \frac{2}{6} \approx 0{,}333$
- $P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(1) = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

Sprünge in der CDF entsprechen den Wahrscheinlichkeiten $p(x)$ der PMF.

PMF und CDF: Zusammenhang

Von PMF zu CDF:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \qquad \text{(aufsummieren)}$$

Von CDF zu PMF:

$$p(x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1}) \qquad \text{(Differenz bilden)}$$

Beispiel:

- $p(3) = F(3) - F(2) = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ ✓

Nützliche Formeln:

- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(X > a) = 1 - F(a)$
- $P(X \geq a) = 1 - F(a-1) \quad$ (für ganzzahlige X)

PMF und CDF sind zwei Seiten derselben Medaille – jede bestimmt die andere.

Erwartungswert $E[X]$

Definition: Der Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen X:

$$\boxed{E[X] = \sum_{\text{alle } x} x \cdot p(x)}$$

Interpretation: Der “Schwerpunkt” der Verteilung – der langfristige Durchschnitt bei vielen Wiederholungen.

Beispiel – Fairer Würfel:

$$E[X] = 1 \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot \tfrac{1}{6} + 3 \cdot \tfrac{1}{6} + 4 \cdot \tfrac{1}{6} + 5 \cdot \tfrac{1}{6} + 6 \cdot \tfrac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

Beachte: $E[X] = 3{,}5$ ist *kein* mögliches Ergebnis! Der Erwartungswert muss kein Wert aus dem Wertebereich sein.

$E[X]$ **beantwortet: “Was erwarte ich im Durchschnitt?”**

Erwartungswert: Intuition durch ein Spiel

Frage: Sie spielen ein Spiel. Lohnt es sich?

- Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gewinnen Sie **10**
- Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ verlieren Sie **6**

Gedankenexperiment – 100 Runden:

- Ca. 50 Mal gewinnen: $50 \times 10 = 500$
- Ca. 50 Mal verlieren: $50 \times 6 = 300$
- Netto: $+200$ in 100 Runden $\Rightarrow$ **+2 pro Runde**

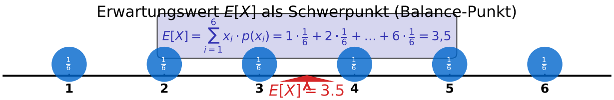
Dieselbe Rechnung mit der Formel:

$$E[X] = 10 \cdot \frac{1}{2} + (-6) \cdot \frac{1}{2} = 5 - 3 = +2$$

$\Rightarrow$ Das Spiel lohnt sich! Der **faire Preis** für eine Runde wäre 2.

Der Erwartungswert ist der faire Preis eines Spiels – was Sie langfristig pro Runde gewinnen.

Erwartungswert als Balance-Punkt



Physikalische Analogie:

- Stellen Sie sich den Zahlenstrahl als Wippe vor
- An jeder Stelle x liegt ein Gewicht der Masse $p(x)$
- $E[X]$ ist der Punkt, an dem die Wippe im Gleichgewicht steht

Der Erwartungswert ist der "Schwerpunkt" der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Rechenregeln für $E[X]$

Linearität des Erwartungswerts:

$$\boxed{E[aX+b] = a \cdot E[X] + b}$$

Summe von Zufallsvariablen:

$$\boxed{E[X+Y] = E[X] + E[Y]}$$

(gilt **immer**, auch bei Abhängigkeit!)

Finanzbeispiel – Portfolio:
Ein Portfolio besteht aus 3 Aktien. Der erwartete Tagesgewinn pro Aktie sei:
$E[X_1] = 50\,, \quad E[X_2] = 30\,, \quad E[X_3] = -10$

Erwarteter Gesamtgewinn:

$$E[X_1 + X_2 + X_3] = 50 + 30 + (-10) = 70$$

Linearität: Man kann Erwartungswerte einfach addieren – unabhängig von Abhängigkeiten!

Erwartungswert einer Funktion von X

Satz (LOTUS – Law of the Unconscious Statistician):
Für eine Funktion $g(X)$ gilt:

$$\boxed{E[g(X)] = \sum_{\text{alle } x} g(x) \cdot p(x)}$$

Beispiel: X = Augenzahl eines Würfels, $g(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 1^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 2^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 3^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 4^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 5^2 \cdot \tfrac{1}{6} + 6^2 \cdot \tfrac{1}{6} \\ &= \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6} \approx 15{,}17 \end{aligned}$$

Wichtig: Im Allgemeinen gilt $E[g(X)] \neq g(E[X])$!
Hier: $E[X^2] = \frac{91}{6} \neq (E[X])^2 = (3{,}5)^2 = 12{,}25$

LOTUS: Man muss nicht die Verteilung von $g(X)$ kennen, um $E[g(X)]$ zu berechnen.

Varianz $\mathrm{Var}(X)$

Definition: Die Varianz misst die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert:

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right] = \sum_{\text{alle } x} (x - E[X])^2 \cdot p(x)}$$

Verschiebungssatz (oft einfacher zu rechnen):

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2}$$

Beispiel – Fairer Würfel:

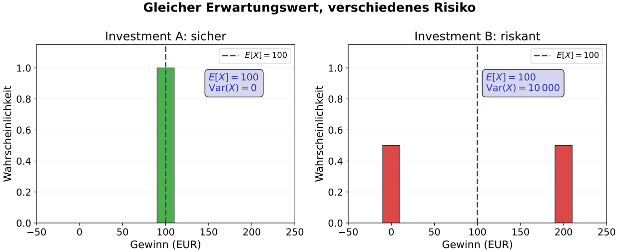
$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \approx 2{,}917$$

Standardabweichung: $\sigma_X = \mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}708$

$\mathrm{Var}(X) \geq 0$ **immer.** $\mathrm{Var}(X) = 0$ **nur, wenn** X **konstant ist.**

Varianz als Risikomaß

Zwei Investments mit gleichem Erwartungswert:



	Investment A (sicher)	**Investment B** (riskant)
$E[X]$	100	100
$\mathrm{Var}(X)$	0	10 000
$\mathrm{SD}(X)$	0	100

Fazit: Gleicher Erwartungswert, aber völlig verschiedenes Risiko!
Die Varianz misst, wie weit die Ergebnisse vom Erwartungswert streuen.

Im Finanzwesen: Varianz = Risiko. Gleicher Erwartungswert, verschiedenes Risiko.

Rechenregeln für die Varianz

Lineare Transformation:

$$\boxed{\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \cdot \mathrm{Var}(X)}$$

Beachte: Die Konstante b fällt weg (Verschiebung ändert die Streuung nicht)!

Summe unabhängiger Zufallsvariablen:

$$\boxed{\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \quad \text{(nur bei Unabhängigkeit!)}}$$

Finanzbeispiel:
Tagesrendite R in %: $E[R] = 0{,}5$, $\mathrm{SD}(R) = 2$.
Jahresportfolio mit 250 unabhängigen Tagen:

- $E[\text{Jahresrendite}] = 250 \cdot 0{,}5 = 125$
- $\mathrm{Var}(\text{Jahresrendite}) = 250 \cdot 4 = 1000$
- $\mathrm{SD}(\text{Jahresrendite}) = \sqrt{1000} \approx 31{,}6$

Varianzen addieren sich bei Unabhängigkeit – Standardabweichungen nicht!

Diskrete Gleichverteilung

Definition: X heißt gleichverteilt auf $\{1, 2, \ldots, n\}$, wenn:

$$\boxed{p(x) = P(X = x) = \frac{1}{n} \quad \text{für } x = 1, 2, \ldots, n}$$

Kennzahlen:

$$E[X] = \frac{n+1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Beispiel – Fairer Würfel ($n = 6$):

- $E[X] = \frac{6+1}{2} = 3{,}5$ ✓
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{36-1}{12} = \frac{35}{12} \approx 2{,}917$ ✓

Finanzbeispiel: Roulette – die Kugel landet gleichwahrscheinlich auf einer der 37 Zahlen (0–36).

Die Gleichverteilung ist das einfachste Modell: "alle Werte gleich wahrscheinlich".

Bernoulli-Versuch

Definition: Ein Bernoulli-Versuch hat genau zwei Ausgänge:

- **Erfolg** mit Wahrscheinlichkeit p
- **Misserfolg** mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$

Die Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases}$$

Kennzahlen:

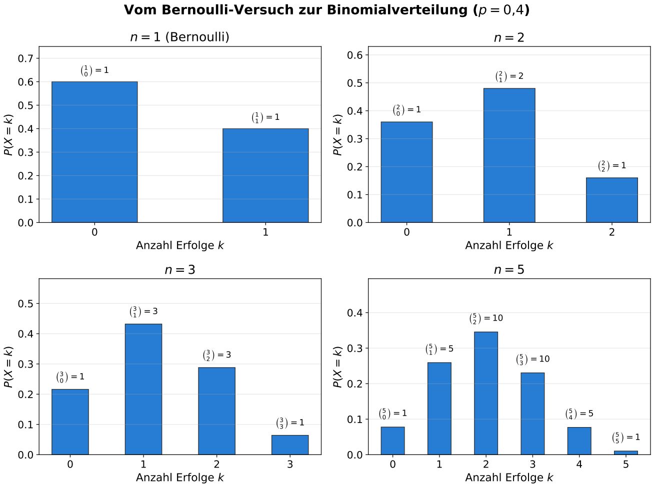
$$E[X] = p, \qquad \mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$$

Finanzbeispiele:

- Kredit fällt aus (ja/nein): $p = 0{,}02$
- Aktie steigt heute (ja/nein): $p = 0{,}52$
- Kunde kündigt Vertrag (ja/nein): $p = 0{,}05$

Bernoulli = einfachstes Zufallsexperiment: Erfolg oder Misserfolg.

Wie entsteht $B(n, p)$? Schritt für Schritt mit $p = 0{,}4$:



Beobachtungen:

Binomialverteilung $X \sim B(n, p)$

Situation: n *unabhängige* Bernoulli-Versuche, jeweils Erfolgswahrscheinlichkeit p.
X = Anzahl der Erfolge.

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n}$$

Drei Bestandteile:

- $\binom{n}{k}$: Auf wie viele Arten können die k Erfolge auf n Versuche verteilt werden?
- p^k: Wahrscheinlichkeit für genau k Erfolge
- $(1-p)^{n-k}$: Wahrscheinlichkeit für genau $n-k$ Misserfolge

Kennzahlen:

$$E[X] = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Die Binomialverteilung zählt Erfolge bei wiederholten unabhängigen Versuchen.

Binomialverteilung: Rechenbeispiel

Kreditportfolio: $n = 10$ Kredite, Ausfallwahrscheinlichkeit $p = 0{,}1$ je Kredit.
X = Anzahl der Ausfälle, $X \sim B(10;\ 0{,}1)$.

(a) $P(X = 0)$ (kein Ausfall):

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}3487 = 0{,}3487$$

(b) $P(X = 2)$ (genau zwei Ausfälle):

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8 = 45 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}4305 = 0{,}1937$$

(c) $P(X \geq 3)$ (drei oder mehr Ausfälle):

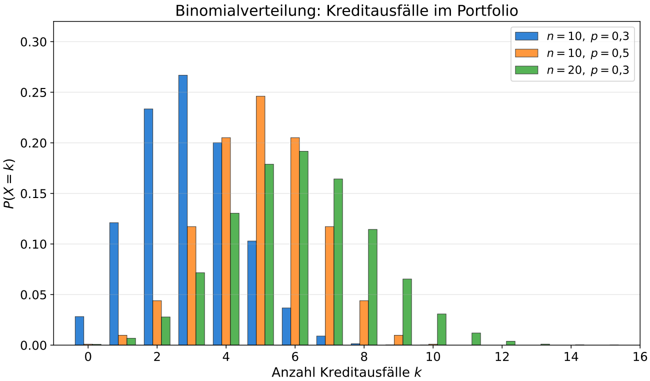
$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$= 1 - [0{,}3487 + 0{,}3874 + 0{,}1937] = 1 - 0{,}9298 = 0{,}0702$$

$E[X] = 10 \cdot 0{,}1 = 1, \quad \mathrm{SD}(X) = \sqrt{10 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 0{,}949$

Tipp: Bei $P(X \geq k)$ nutze die Komplementregel: $1 - P(X \leq k - 1)$.

Binomial-PMF: Verschiedene Parameter



Beobachtungen:

- Höheres $p \Rightarrow$ Verteilung verschiebt sich nach **rechts**
- Größeres $n \Rightarrow$ Verteilung wird **breiter** (mehr Streuung)
- Bei $p = 0{,}5$ ist die Verteilung **symmetrisch**

Die Form der Binomialverteilung hängt von beiden Parametern n und p ab.

Poissonverteilung $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$

Modell für: Anzahl von Ereignissen in einem festen Zeitintervall/Gebiet, wenn:

- Ereignisse treten *einzeln* und *unabhängig* auf
- Die mittlere Rate λ ist konstant

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$\boxed{P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Kennzahlen:

$$E[X] = \lambda, \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

Bemerkenswert: Erwartungswert = Varianz = λ!

Finanzbeispiele:

- Anzahl eingehender Transaktionen pro Stunde ($\lambda = 5$)
- Anzahl Cyberangriffe auf eine Bank pro Monat ($\lambda = 2$)
- Anzahl Schadenfälle bei einer Versicherung pro Woche ($\lambda = 8$)

Poisson modelliert "seltene Ereignisse in einem Kontinuum" – Raum oder Zeit.

Poissonverteilung: Rechenbeispiel

Situation: Eine Handelsplattform verarbeitet im Schnitt $\lambda = 3$ Systemausfälle pro Monat.
X = Anzahl Systemausfälle pro Monat, $X \sim \mathrm{Pois}(3)$.

(a) $P(X = 0)$ (kein Ausfall):

$$P(X=0) = \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} = e^{-3} \approx 0{,}0498$$

(b) $P(X = 2)$:

$$P(X=2) = \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} = \frac{9 \cdot 0{,}0498}{2} \approx 0{,}2240$$

(c) $P(X \geq 5)$:

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{3^k e^{-3}}{k!} = 1 - 0{,}8153 = 0{,}1847$$

$E[X] = 3, \quad \mathrm{SD}(X) = \sqrt{3} \approx 1{,}732$

Bei Poisson addieren sich die λ-Werte: Zwei Monate $\Rightarrow \lambda = 6$.

Poisson: Woher kommt die Formel?

Die Poisson-Formel sieht kompliziert aus:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Aber sie entsteht *natürlich* aus der Binomialverteilung!

Idee: Teile ein Zeitintervall in n winzige Abschnitte. In jedem passiert ein Ereignis mit $p = \lambda/n$.

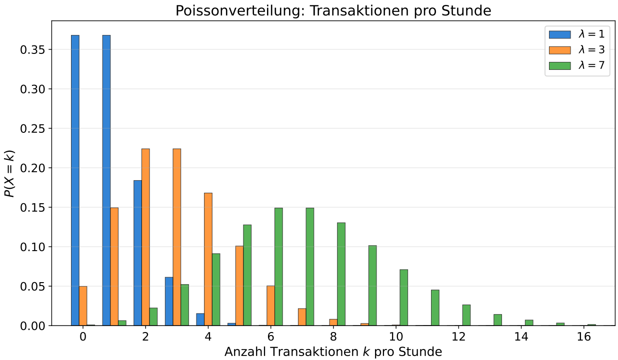
n	$p = \lambda/n$	$B(n, p)$
10	0,3	grobe Näherung
100	0,03	besser
1000	0,003	fast exakt
$n \to \infty$	$p \to 0$	$= \mathrm{Pois}(\lambda)$

Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Dabei liefert der Grenzwert $(1 - \lambda/n)^n \to e^{-\lambda}$ den Faktor $e^{-\lambda}$.

Die Poisson-Verteilung ist der Grenzfall der Binomialverteilung für seltene Ereignisse.

Poisson-PMF: Verschiedene λ



Beobachtungen:

- Größeres $\lambda \Rightarrow$ Verteilung verschiebt sich nach **rechts**
- Größeres $\lambda \Rightarrow$ Verteilung wird **breiter** (da $\mathrm{Var} = \lambda$)
- Für großes λ wird die Verteilung zunehmend **symmetrisch**

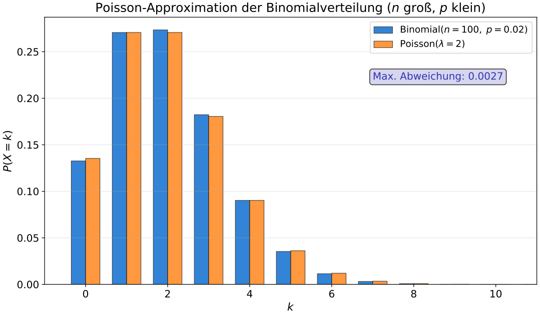
λ steuert sowohl Lage als auch Streuung der Poissonverteilung.

Poisson als Approximation der Binomialverteilung

Faustregel: Wenn n groß und p klein (und np moderat), dann:

$$\boxed{B(n,p) \approx \mathrm{Pois}(\lambda) \quad \text{mit } \lambda = np}$$

Typisch: $n \geq 50$ und $p \leq 0{,}05$.



Beispiel: $n = 100$ Kunden, $p = 0{,}02$ Ausfallwahrscheinlichkeit.
$\lambda = 100 \cdot 0{,}02 = 2$. Die Balken sind fast identisch!

Die Poisson-Approximation vereinfacht Berechnungen bei großem n und kleinem p.

Schlüsselfragen:

- Gleich wahrscheinlich? → **Gleichverteilung** (Würfel, Lotterie)
- n Versuche, Erfolg/Misserfolg? → **Binomial** (Kreditausfälle, Defekte)
- Ereignisse in Zeitraum/Gebiet? → **Poisson** (Transaktionen, Schadenfälle)

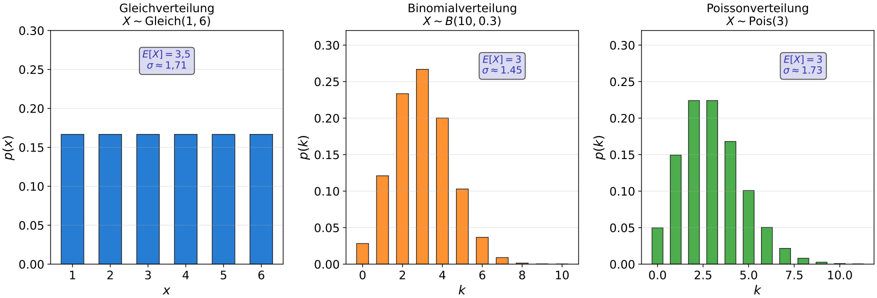
Die richtige Verteilung wählen ist der erste und wichtigste Modellierungsschritt.

Vergleich der drei Verteilungen

	Gleichverteilung	**Binomial** $B(n, p)$	**Poisson** $\mathrm{Pois}(\lambda)$
PMF	$\frac{1}{n}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
Wertebereich	$\{1, \ldots, n\}$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	$\{0, 1, 2, \ldots\}$
$E[X]$	$\frac{n+1}{2}$	np	λ
$\mathrm{Var}(X)$	$\frac{n^2-1}{12}$	$np(1-p)$	λ
Typisches Beispiel	Würfel	Kreditausfälle	Transaktionen/h

Jede Verteilung passt zu einem bestimmten Typ von Zufallsexperiment.

Übersicht: Drei Verteilungen im Vergleich



Wann welche Verteilung?

- **Gleichverteilung:** Alle Werte gleich wahrscheinlich (Würfel, Roulette)
- **Binomial:** Anzahl Erfolge bei n Versuchen (Ausfälle, Defekte)
- **Poisson:** Anzahl Ereignisse in Zeit/Raum (Anrufe, Unfälle)

Die Wahl der richtigen Verteilung ist der erste Schritt jeder Modellierung.

Lernziele – Checkliste

Prüfen Sie sich selbst:

- ✓ **Zufallsvariable:** Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$, diskret vs. stetig
- ✓ **PMF:** $p(x) = P(X = x)$, Eigenschaften, Diagramm
- ✓ **CDF:** $F(x) = P(X \leq x)$, Treppenfunktion, Zusammenhang mit PMF
- ✓ **Erwartungswert:** $E[X] = \sum x \cdot p(x)$, Linearität, LOTUS
- ✓ **Varianz:** $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$, Verschiebungssatz
- ✓ **Gleichverteilung:** $p(x) = 1/n$, $E[X] = (n+1)/2$
- ✓ **Binomial:** $B(n, p)$, $E = np$, $\mathrm{Var} = np(1-p)$
- ✓ **Poisson:** $\mathrm{Pois}(\lambda)$, $E = \mathrm{Var} = \lambda$, Approximation

---

Wenn Sie alle Punkte verstanden haben, sind Sie bereit für Lektion B04!

Schlüsselformeln

Formel	Name
$E[X] = \sum x \cdot p(x)$	Erwartungswert
$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$	Verschiebungssatz
$E[aX + b] = aE[X] + b$	Linearität
$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	Binomial-PMF
$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	Poisson-PMF
$B(n, p) \approx \mathrm{Pois}(np)$	Poisson-Approximation

Diese Formeln sind das Fundament für alle weiteren Lektionen.