Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Lektion B02 – BSc Wahrscheinlichkeit und Statistik

Digital Finance

Gliederung

1. Bedingte Wahrscheinlichkeit
2. Unabhängigkeit und Multiplikationssatz
3. Sensitivität und Spezifität
4. Satz von Bayes
5. Zusammenfassung

Voraussetzungen aus B01

Für diese Lektion benötigen Sie:

- Ergebnisraum Ω, Ereignisse als Mengen
- Mengenoperationen: $\cap$, $\cup$, $\bar{A}$
- Wahrscheinlichkeit $P(A)$ und die Rechenregeln
- Komplementregel: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Additionsregel: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Disjunkte Ereignisse und Partitionen

Alle Themen aus Lektion B01 – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Lernziele

Nach dieser Lektion können Sie:

1. Bedingte Wahrscheinlichkeiten mit der Formel $P(A|B)$ berechnen
2. Abhängige und unabhängige Ereignisse unterscheiden und den Multiplikationssatz anwenden
3. Sensitivität und Spezifität eines Tests interpretieren
4. Den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit verstehen
5. Den Satz von Bayes herleiten und auf praktische Probleme anwenden
6. Bayes sequentiell anwenden (mehrere Tests hintereinander)

Durchgehendes Beispiel: Medizinischer Test
Prävalenz 1%, Sensitivität 99%, Spezifität 95%

Diese Lernziele bilden den roten Faden der Lektion.

Motivation: Neue Information verändert Wahrscheinlichkeiten

Alltagssituationen:

- Regenwahrscheinlichkeit morgen: 30%
- Aber: dunkle Wolken jetzt $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit steigt!

Weiteres Beispiel – Urne:

- Urne mit **3 roten** und **2 blauen** Kugeln
- Ohne Information: $P(\text{rot}) = 3/5 = 60\%$
- **Neue Info:** Erste gezogene Kugel war rot (ohne Zurücklegen)
- Jetzt: $P(\text{rot beim 2. Zug}) = 2/4 = 50\%$

$\Rightarrow$ Zusatzwissen verändert die Wahrscheinlichkeit!

Bedingte Wahrscheinlichkeit formalisiert, wie Wissen Unsicherheit beeinflusst.

Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

Intuition: Gegeben, dass B eingetreten ist – wie wahrscheinlich ist A?
Formale Definition:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{falls } P(B) > 0}$$

Lies: „Wahrscheinlichkeit von A gegeben B“

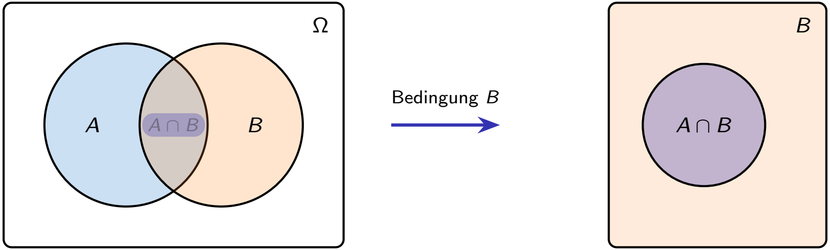
Beispiel: 100 Studierende: 30 studieren Mathe, 20 davon auch Physik.

- $P(\text{Physik} \mid \text{Mathe}) = \frac{20}{30} = 66{,}7\%$
- Von den Mathe-Studierenden studieren 2/3 auch Physik

Der senkrechte Strich „|“ bedeutet „gegeben“ oder „unter der Bedingung“.

Reduzierter Ergebnisraum

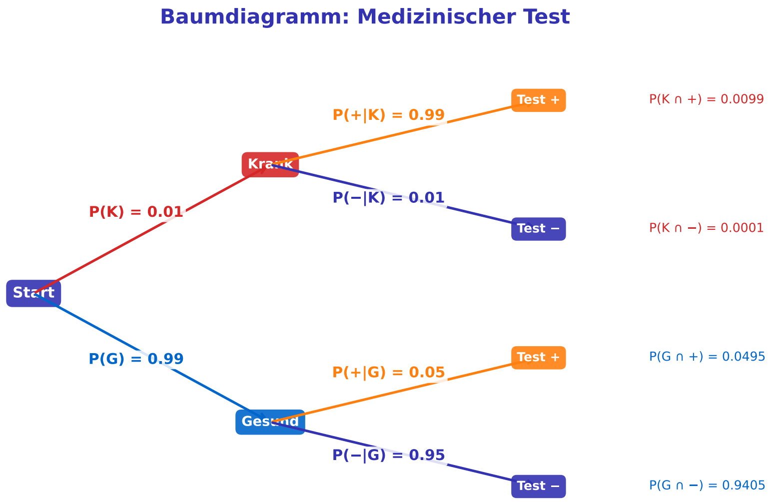
Idee: Wenn wir wissen, dass B eingetreten ist, wird B zum neuen „Universum“.



Vorher: ganzes Ω **Nachher:** nur noch B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{Anteil von } A \text{ in } B}{\text{Größe von } B}$$

Bedingen = den Ergebnisraum auf B einschränken.


Baumdiagramm: Medizinischer Test
Start
P(K) = 0.01
Krank
P(G) = 0.99
Gesund
P(+|K) = 0.99
P(−|K) = 0.01
P(+|G) = 0.05
P(−|G) = 0.95
Test +
Test −
Test +
Test −
P(K ∩ +) = 0.0099
P(K ∩ −) = 0.0001
P(G ∩ +) = 0.0495
P(G ∩ −) = 0.9405

Rechenbeispiel: Kartenziehen

Standarddeck: 52 Karten, 4 Asse, 26 rote Karten, 2 rote Asse.

Frage: $P(\text{Ass} \mid \text{rote Karte}) = ?$

$$P(\text{Ass} \mid \text{rot}) = \frac{P(\text{Ass} \cap \text{rot})}{P(\text{rot})} = \frac{2/52}{26/52} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13} \approx 7{,}7\%$$

Vergleich: $P(\text{Ass}) = 4/52 = 1/13 \approx 7{,}7\%$

$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit ändert sich **nicht**!
Das liegt daran, dass „Ass“ und „rote Karte“ **unabhängig** sind.

Wenn $P(A|B) = P(A)$, dann sind A und B unabhängig – mehr dazu gleich.

Rechenbeispiel: Würfel

Fairer Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Frage: Wie wahrscheinlich ist eine Zahl > 4, wenn wir wissen, dass sie ungerade ist?

$$\begin{aligned} A &= \{5, 6\} \quad \text{(größer als 4)} \\ B &= \{1, 3, 5\} \quad \text{(ungerade)} \\ A \cap B &= \{5\} \end{aligned}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\%$$

Ohne Bedingung: $P(A) = 2/6 = 1/3$ – dies bedeutet, dass A und B hier **unabhängig** sind – wir definieren dies in Abschnitt 2.

Üben Sie: Berechnen Sie $P(B|A) = P($ungerade $| > 4)$.

Unabhängigkeit: Definition

Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig, wenn:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Äquivalent:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{und} \quad P(B|A) = P(B)$$

Bedeutung: Das Eintreten von B verändert die Wahrscheinlichkeit von A **nicht**.

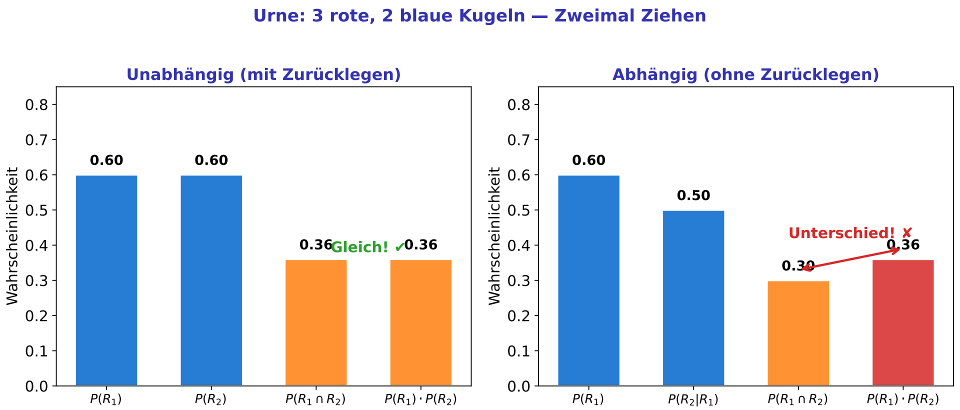
Beispiele für Unabhängigkeit:

- Zwei Münzwürfe hintereinander
- Ziehen **mit** Zurücklegen
- Würfel und Münze gleichzeitig

Warnung: Unabhängig $\neq$ unvereinbar (disjunkt)!
Disjunkte Ereignisse sind sogar **stark abhängig**: A tritt ein $\Rightarrow$ B kann nicht eintreten.

Unabhängigkeit bedeutet: Wissen über B hilft nicht bei der Vorhersage von A.

Abhängig vs. Unabhängig: Urnenbeispiel



Mit Zurücklegen: $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2)$. Ohne Zurücklegen: Gleichung gilt nicht.

Der Multiplikationssatz

Allgemeine Form:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)}$$

Bei Unabhängigkeit vereinfacht sich das zu:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Beispiel: Zwei faire Münzwürfe

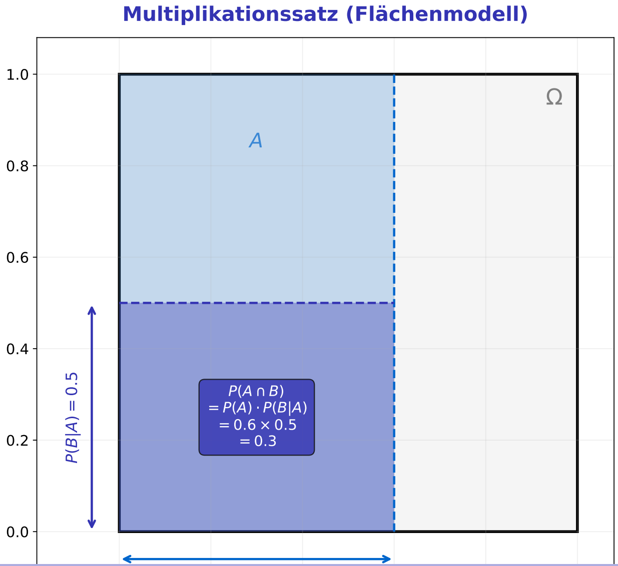
- $P(\text{Kopf}_1 \cap \text{Kopf}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Kettenregel (mehrere Ereignisse):

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

Der Multiplikationssatz folgt direkt aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Multiplikationssatz als Flächenmodell



Beispiel: Technisches System

Zwei Bauteile in Reihe, beide müssen funktionieren.

- Bauteil 1: Ausfallwahrscheinlichkeit $P(A_1) = 0{,}02$
- Bauteil 2: Ausfallwahrscheinlichkeit $P(A_2) = 0{,}03$
- Ausfälle sind unabhängig

System funktioniert:

$$P(\text{beide OK}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0{,}98 \cdot 0{,}97 = 0{,}9506$$

Mindestens ein Ausfall:

$$P(\text{mind. ein Ausfall}) = 1 - 0{,}9506 = 0{,}0494 \approx 5\%$$

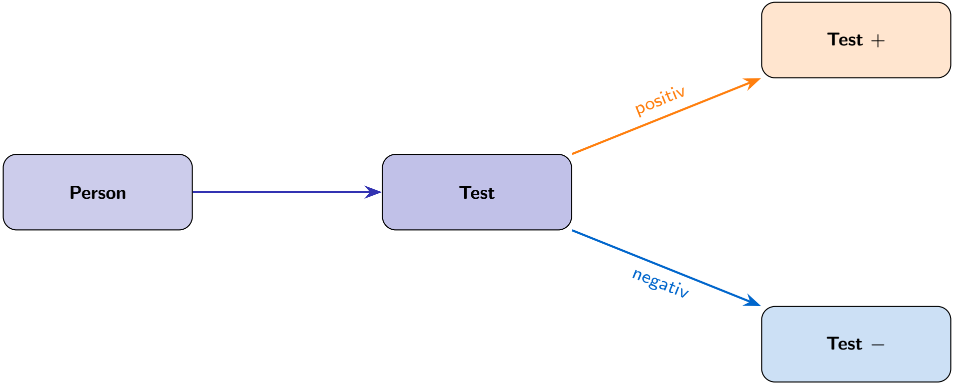
Bei unabhängigen Ereignissen multiplizieren wir einfach die Einzelwahrscheinlichkeiten.

Medizinischer Test: Das Szenario

Situation: Eine Krankheit betrifft 1% der Bevölkerung (Prävalenz).

Es gibt einen diagnostischen Test mit:

- **Sensitivität** 99%: Der Test erkennt 99% der Kranken
- **Spezifität** 95%: Der Test erkennt 95% der Gesunden als gesund



Frage: Wenn der Test positiv ist – wie wahrscheinlich ist die Krankheit wirklich?

Definitionen: Sensitivität und Spezifität

Sensitivität (Richtig-Positiv-Rate):

$$\text{Sensitivität} = P(\text{Test}+ \mid \text{krank}) = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FN}}$$

„Erkennt der Test die **Kranken**?“

Spezifität (Richtig-Negativ-Rate):

$$\text{Spezifität} = P(\text{Test}- \mid \text{gesund}) = \frac{\text{TN}}{\text{TN} + \text{FP}}$$

„Erkennt der Test die **Gesunden**?“

TP = True Positive (richtig positiv)
FN = False Negative (falsch negativ)
FP = False Positive (falsch positiv)
TN = True Negative (richtig negativ)

Hohe Sensitivität = wenig Übersehene. Hohe Spezifität = wenig falscher Alarm.

Konfusionsmatrix: 1000 Personen

Konfusionsmatrix: 1000 Personen

	Test +	**Test −**	
Tatsächlich krank	**10** *(TP)*	**0** *(FN)*	**= 10**
Tatsächlich gesund	**50** *(FP)*	**940** *(TN)*	**= 990**

Sensitivität = TP / (TP + FN) = 10 / (10 + 0) = 100%

Spezifität = TN / (TN + FP) = 940 / (940 + 50) = 94.9%

Warum hohe Sensitivität nicht ausreicht

Unser Test: Sensitivität 99%, Spezifität 95%

Von 1000 Personen:

- 10 sind krank $\rightarrow$ **10 positiv getestet** (fast alle erkannt!)
- 990 sind gesund $\rightarrow$ **50 falsch positiv** (5% von 990)

Insgesamt positiv getestet: $10 + 50 = 60$ Personen

Davon wirklich krank: nur 10 von $60 \approx 17\%$

Das Basisraten-Problem:
Bei seltenen Krankheiten überwiegen die falsch-positiven Ergebnisse, weil die Grundgesamtheit der Gesunden viel größer ist!

Die Lösung dieses Rätsels liefert der Satz von Bayes.

Herleitung des Satzes von Bayes

Schritt 1: Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{und} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Schritt 2: Beide nach $P(A \cap B)$ auflösen:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Schritt 3: Gleichsetzen und nach $P(A|B)$ auflösen:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}}$$

Das ist der **Satz von Bayes** – benannt nach Thomas Bayes (1701–1761).

Der Satz von Bayes ermöglicht es, Ursache-Wirkungs-Richtungen umzukehren.

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Problem: Oft kennen wir $P(B)$ nicht direkt.
Lösung: Zerlege B in Teile über eine Partition:

$$\boxed{P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$$

Damit wird Bayes zu:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$$

Medizintest:

$$P(+) = \underbrace{P(+|\text{krank})}_{0{,}99} \cdot \underbrace{P(\text{krank})}_{0{,}01} + \underbrace{P(+|\text{gesund})}_{0{,}05} \cdot \underbrace{P(\text{gesund})}_{0{,}99}$$
$$= 0{,}0099 + 0{,}0495 = 0{,}0594$$

Der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit liefert den Nenner für die Bayes-Formel.

Bayes-Terminologie

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

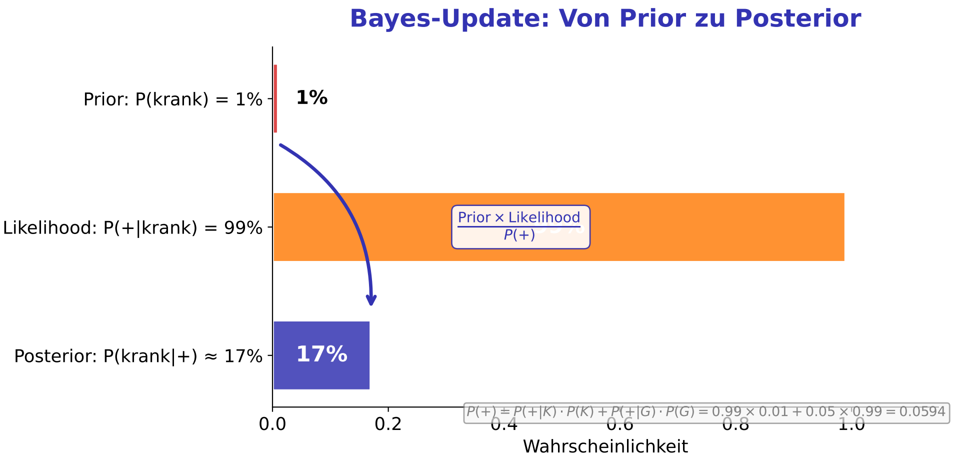
Term	Name	Bedeutung
$P(A)$	**Prior**	Vorwissen über A (*vor* dem Test)
$P(B\|A)$	**Likelihood**	Wie gut passt B zu A?
$P(A\|B)$	**Posterior**	Neues Wissen über A (*nach* dem Test)
$P(B)$	**Evidenz**	Gesamtwahrscheinlichkeit von B

In Worten:

$$\text{Posterior} = \frac{\text{Likelihood} \times \text{Prior}}{\text{Evidenz}}$$

Bayes-Update: Altes Wissen + neue Daten = aktualisiertes Wissen.

Bayes-Update: Von Prior zu Posterior



Der Prior (1%) wird durch die Evidenz zum Posterior (17%) aktualisiert.

Medizintest: Bayes in Aktion

Gegeben:

- Prävalenz: $P(\text{krank}) = 0{,}01$
- Sensitivität: $P(+|\text{krank}) = 0{,}99$
- Spezifität: $P(-|\text{gesund}) = 0{,}95$, also $P(+|\text{gesund}) = 0{,}05$

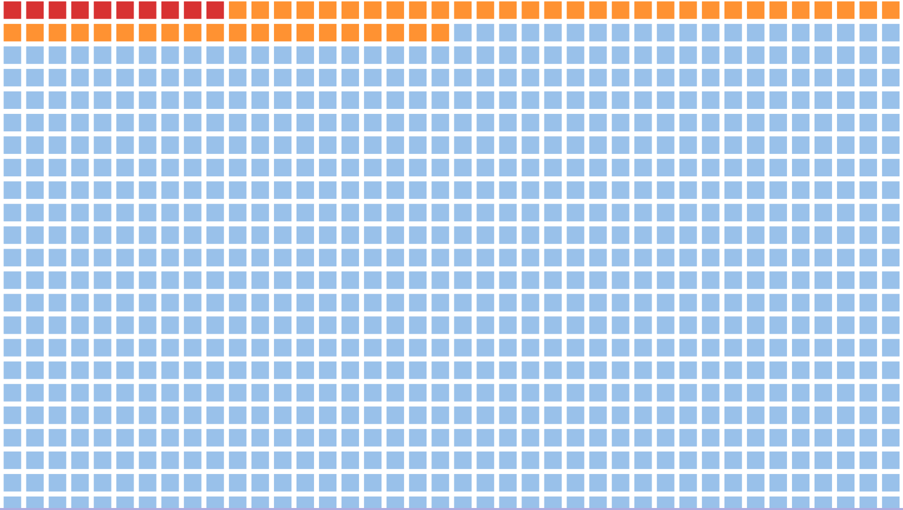
Gesucht: $P(\text{krank} \mid +)$

$$
\begin{aligned}
P(\text{krank}|+) &= \frac{P(+|\text{krank}) \cdot P(\text{krank})}{P(+)} \\
&= \frac{0{,}99 \times 0{,}01}{0{,}99 \times 0{,}01 + 0{,}05 \times 0{,}99} \\
&= \frac{0{,}0099}{0{,}0099 + 0{,}0495} = \frac{0{,}0099}{0{,}0594} \\
&\approx \mathbf{16{,}7\%}
\end{aligned}
$$

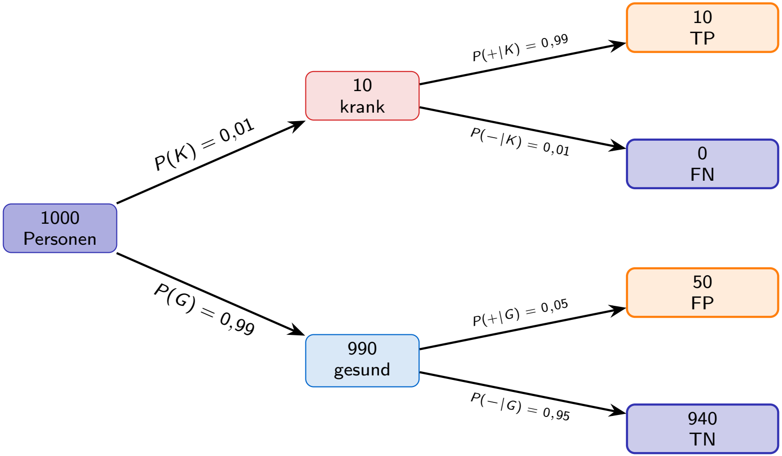
Positiver Prädiktiver Wert (PPV): $P(\text{krank}|+) = 16{,}7\%$
Negativer Prädiktiver Wert (NPV): $P(\text{gesund}|-) \approx 99{,}99\%$

Trotz 99% Sensitivität liegt die Wahrscheinlichkeit, wirklich krank zu sein, nur bei ca. 17%.

1000 Personen: Wer ist wirklich krank?



Bayes-Entscheidungsbaum



$$P(\text{krank}|+) = \frac{10}{10 + 50} = \frac{10}{60} \approx 16{,}7\%$$

Im Entscheidungsbaum sieht man sofort: Von 60 positiven sind nur 10 wirklich krank.

Warum ist $P(\text{krank}|+)$ so niedrig?

Drei Faktoren bestimmen das Ergebnis:

1. **Niedrige Prävalenz (1%):** Es gibt viel mehr Gesunde als Kranke
2. **Viele Gesunde $\times$ kleine Fehlerrate = viele FP:**
   $990 \times 0{,}05 = 50$ falsch-positive Ergebnisse
3. **Wenige Kranke $\times$ hohe Erkennungsrate = wenige TP:**
   $10 \times 0{,}99 = 10$ richtig-positive Ergebnisse

$\Rightarrow$ Die falsch-positiven Ergebnisse **überfluten** die richtig-positiven!

Intuitive Daumenregel:
Je seltener die Krankheit, desto eher ist ein positives Testergebnis ein **Fehlalarm**.

Deshalb werden Screening-Tests bei seltenen Krankheiten kritisch betrachtet.

Was passiert bei höherer Prävalenz?

Gleicher Test (Sens. 99%, Spez. 95%), aber verschiedene Prävalenzen:

Prävalenz	**TP**	**FP**	$P(\text{krank}|+)$	**Bewertung**
0,1%	1	50	2%	Fast nur Fehlalarme
1%	10	50	17%	Noch viele FP
5%	50	48	51%	Etwa 50:50
10%	99	45	69%	Mehrheit wirklich krank
50%	495	25	95%	Sehr zuverlässig

$\Rightarrow$ Der **gleiche Test** kann je nach Kontext völlig unterschiedlich bewertet werden!

In der Praxis: Zuerst Risikogruppe identifizieren (höhere Prävalenz), dann testen.

Zweiter Test: Nochmals Bayes anwenden

Nach dem ersten positiven Test: $P(\text{krank}) \approx 17\%$ (neuer Prior!)

Zweiter Test (gleiche Güte), wieder positiv:

$$
\begin{aligned}
P(\text{krank}|++) &= \frac{P(+|\text{krank}) \cdot P(\text{krank nach 1. Test})}{P(+)} \\
&= \frac{0{,}99 \times 0{,}167}{0{,}99 \times 0{,}167 + 0{,}05 \times 0{,}833} \\
&= \frac{0{,}165}{0{,}165 + 0{,}042} = \frac{0{,}165}{0{,}207} \approx \mathbf{80\%}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Der Prior steigt von 1% auf 17% auf 80%!

Prinzip: Der Posterior des ersten Tests wird zum Prior des zweiten Tests.
So funktioniert **sequentielles Bayes-Update**.

In der Medizin: Bei positivem Screening-Test wird oft ein Bestätigungstest durchgeführt.

Weiteres Beispiel: Qualitätskontrolle

Fabrik: Zwei Maschinen produzieren Bauteile.

- Maschine A: 60% der Produktion, 2% Ausschuss
- Maschine B: 40% der Produktion, 5% Ausschuss

Frage: Ein Bauteil ist defekt. Von welcher Maschine stammt es wahrscheinlich?

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{defekt}) = 0{,}02 \times 0{,}60 + 0{,}05 \times 0{,}40 = 0{,}012 + 0{,}020 = 0{,}032$$

Bayes:

$$P(A|\text{defekt}) = \frac{0{,}02 \times 0{,}60}{0{,}032} = \frac{0{,}012}{0{,}032} = 37{,}5\%$$

$$P(B|\text{defekt}) = \frac{0{,}05 \times 0{,}40}{0{,}032} = \frac{0{,}020}{0{,}032} = 62{,}5\%$$

Obwohl Maschine A mehr produziert, stammen defekte Teile eher von Maschine B.

Lernziele – Checkliste

Prüfen Sie sich selbst:

- ✓ **Bedingte Wahrscheinlichkeit:** Ich kann $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ anwenden und den reduzierten Ergebnisraum erklären.
- ✓ **Unabhängigkeit:** Ich kann prüfen, ob $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt, und kenne den Multiplikationssatz.
- ✓ **Sensitivität & Spezifität:** Ich kann TP, FP, FN, TN zuordnen und die Kenngrößen berechnen.
- ✓ **Satz von Bayes:** Ich kann die Formel herleiten, Prior/Likelihood/Posterior benennen und auf Beispiele anwenden.

Schlüsselerkenntnisse:

- Neue Information verändert Wahrscheinlichkeiten
- Bei seltenen Ereignissen dominieren falsch-positive Ergebnisse
- Bayes erlaubt systematisches Aktualisieren von Überzeugungen

---

Wiederholen Sie die Beispiele mit eigenen Zahlen!

Schlüsselformeln

Konzept	**Formel**
Bedingte W.	$P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Multiplikationssatz	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A)$
Unabhängigkeit	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Totale W.	$P(B) = P(B\|A)\,P(A) + P(B\|\bar{A})\,P(\bar{A})$
Satz von Bayes	$P(A\|B) = \frac{P(B\|A) \cdot P(A)}{P(B)}$
Sensitivität	$\frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FN}}$
Spezifität	$\frac{\text{TN}}{\text{TN} + \text{FP}}$

Nächste Lektion: Diskrete Zufallsvariablen und Verteilungen.