Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Lektion B01 – BSc Wahrscheinlichkeit und Statistik

Digital Finance

Gliederung

1. Zufallsexperimente und Ergebnisse
2. Ereignisse als Mengen
3. Wahrscheinlichkeit
4. Kombinatorik
5. Stichproben
6. Zusammenfassung

Lernziele

Am Ende dieser Lektion werden Sie in der Lage sein:

1. Zufallsexperiment, Ergebnis, Ergebnisraum und Ereignis zu definieren
2. Mengenoperationen (Schnitt, Vereinigung, Differenz, Komplement) auf Ereignisse anzuwenden und Venn-Diagramme zu lesen
3. Die drei Wahrscheinlichkeitsdefinitionen (klassisch, statistisch, axiomatisch) zu unterscheiden
4. Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten (Komplement, Vereinigung, Differenz) anzuwenden
5. Permutationen und die vier Auswahlmodelle der Kombinatorik zu berechnen
6. Stichprobenarten zu unterscheiden und die Anzahl möglicher Stichproben zu bestimmen

---

Diese Ziele leiten, was Sie aus dieser Lektion beherrschen sollten.

Was ist ein Zufallsexperiment?

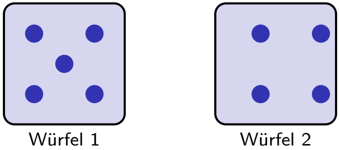
Definition: Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, dessen Ergebnis nicht vorhersagbar ist.

Drei Eigenschaften:

1. Es gibt mindestens zwei mögliche Ergebnisse
2. Das Ergebnis ist vor der Durchführung ungewiss
3. Das Experiment ist (zumindest gedanklich) wiederholbar

Alltagsbeispiele:

- Münzwurf: Kopf oder Zahl
- Würfelwurf: 1, 2, 3, 4, 5 oder 6
- Ziehen einer Karte aus einem Kartenspiel



Ein Zufallsexperiment erzeugt Unsicherheit – genau das untersucht die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Ergebnis und Ergebnisraum

Ergebnis ω: Ein einzelnes mögliches Resultat eines Zufallsexperiments.

Ergebnisraum Ω: Die Menge *aller* möglichen Ergebnisse.

Beispiele:

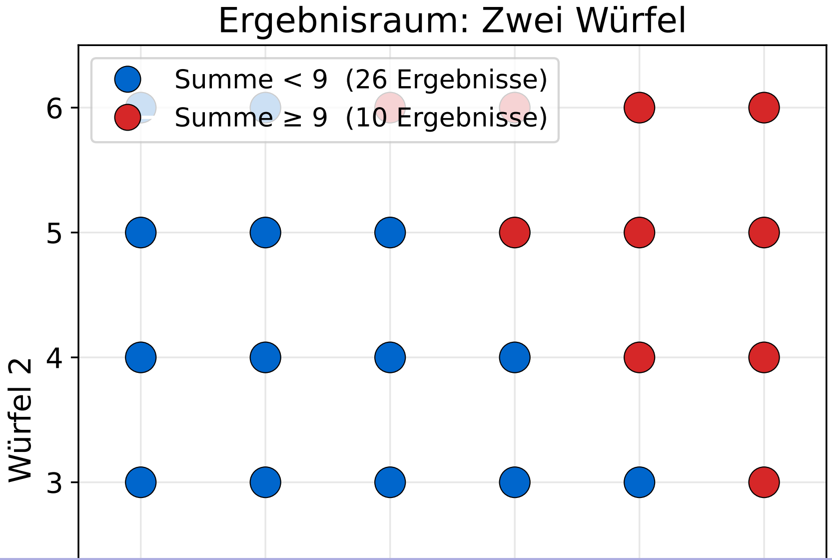
- **Ein Würfel:** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, z. B. $\omega = 3$
- **Münzwurf:** $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$
- **Zwei Münzwürfe:** $\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$
- **Zwei Würfel:** $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, \dots, 6\}\}$, $|\Omega| = 36$

Notation

- $|\Omega|$ = Anzahl der Elemente im Ergebnisraum
- $\omega \in \Omega$ bedeutet: ω ist ein Ergebnis aus Ω

Der Ergebnisraum Ω beschreibt vollständig, was passieren kann.

Ergebnisraum bei zwei Würfeln



Ereignis

Definition: Ein Ereignis A ist eine Teilmenge des Ergebnisraums: $A \subseteq \Omega$.

Beispiele (ein Würfel, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$):

- $A = \{2, 4, 6\}$ – "gerade Zahl"
- $B = \{4, 5, 6\}$ – "Zahl größer als 3"
- $A \cap B = \{4, 6\}$ – "gerade **und** größer als 3"

Spezielle Ereignisse:

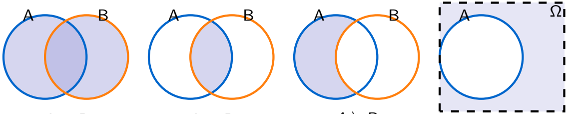
- **Elementarereignis:** enthält genau ein ω, z. B. $\{3\}$
- **Sicheres Ereignis:** Ω (tritt immer ein)
- **Unmögliches Ereignis:** $\emptyset$ (tritt nie ein)

Ereignis = "Was uns interessiert" – mathematisch eine Menge.

Mengenoperationen

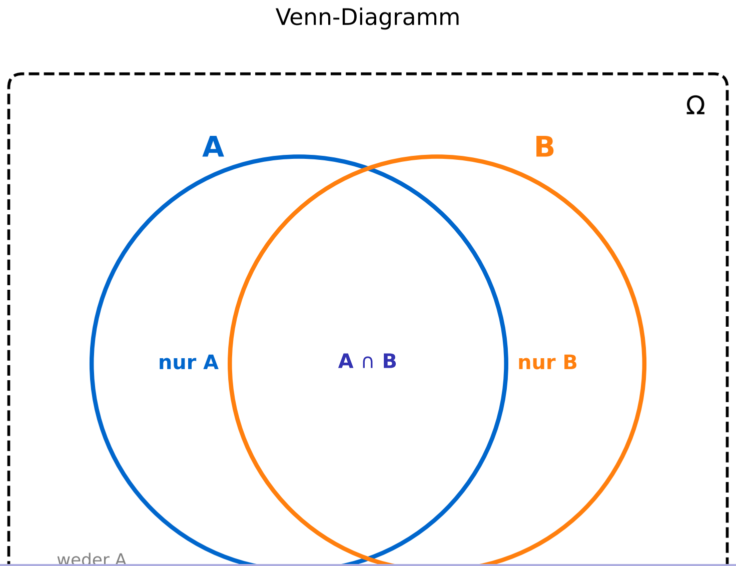
Ereignisse sind Mengen – wir können sie mit Mengenoperationen verknüpfen:

Operation	Symbol	Bedeutung
Schnitt	$A \cap B$	A **und** B treten ein
Vereinigung	$A \cup B$	A **oder** B (oder beide) treten ein
Differenz	$A \setminus B$	A tritt ein, **aber nicht** B
Komplement	$\bar{A}$	A tritt **nicht** ein



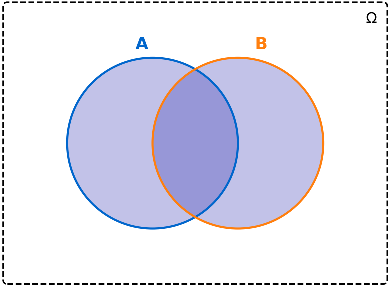
$A \cup B$ $A \cap B$ $A \setminus B$ $\bar{A}$

Mengenoperationen auf Ereignisse = logische Verknüpfungen von Aussagen.

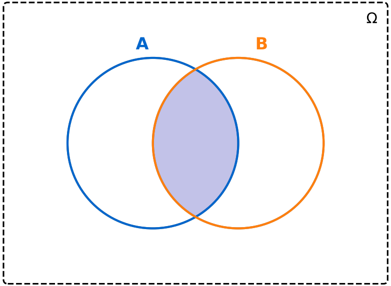

Venn-Diagramm
Ω
A
B
nur A
A ∩ B
nur B
weder A

Mengenoperationen im Vergleich

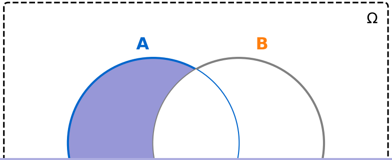
A ∪ B (Vereinigung)



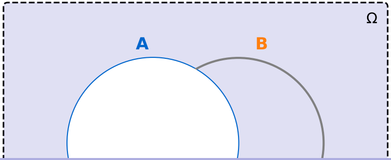
A ∩ B (Schnitt)



A \ B (Differenz)



$\bar{A}$ **(Komplement)**



Rechenbeispiel: Mengenoperationen

Ein Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = \{2, 4, 6\}$ (gerade), $B = \{1, 2, 3\}$ (höchstens 3)

- $A \cap B = \{2\}$ (gerade **und** höchstens 3)
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ (gerade **oder** höchstens 3)
- $A \setminus B = \{4, 6\}$ (gerade, **aber** größer als 3)
- $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ (ungerade)

Wichtige Rechenregeln für Mengen:

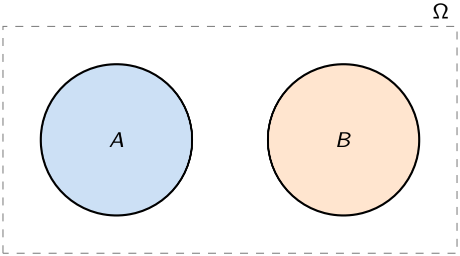
- $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativgesetz)
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivgesetz)
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (De Morgan)

De Morgans Regeln: Das Komplement einer Vereinigung = Schnitt der Komplemente.

Disjunkte Ereignisse

Definition: Zwei Ereignisse A und B heißen disjunkt (unvereinbar), wenn:

$$A \cap B = \emptyset$$



Beispiel: Beim Würfel: $A = \{2, 4, 6\}$ (gerade) und $B = \{1, 3, 5\}$ (ungerade)
$\Rightarrow A \cap B = \emptyset$, also sind A und B disjunkt.

Wichtig: Für disjunkte Ereignisse gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Disjunkte Ereignisse bilden die Grundlage für das 3. Axiom von Kolmogorow.

Partition des Ergebnisraums

Definition: Eine Partition von Ω ist eine Zerlegung in paarweise disjunkte Teilmengen:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega \quad \text{mit} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Beispiele für einen Würfel:

- $\{1, 2, 3\}$ und $\{4, 5, 6\}$ (zwei Teile)
- $\{\text{gerade}\}$ und $\{\text{ungerade}\}$ (zwei Teile)
- $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ (sechs Teile)

Eigenschaft: Jedes Ergebnis ω liegt in **genau einem** Teil A_i.

Partitionen sind wichtig für den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (Lektion B02).

Klassische Definition (Laplace)

Laplace-Wahrscheinlichkeit (1814):

Wenn alle Ergebnisse *gleich wahrscheinlich* sind:

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl günstiger Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}}$$

Beispiele:

- Fairer Würfel: $P(\text{gerade}) = \frac{|\{2,4,6\}|}{|\{1,\ldots,6\}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- Faire Münze: $P(\text{Kopf}) = \frac{1}{2}$
- Zwei Würfel: $P(\text{Summe} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Einschränkung: Nur anwendbar bei endlichem Ω und Gleichverteilung!

"Günstig durch möglich" – die einfachste Wahrscheinlichkeitsdefinition.

Statistische Definition

Frequentistische Wahrscheinlichkeit:

Wir wiederholen das Experiment n-mal und zählen, wie oft A eintritt:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{h_n(A)}{n}$$

wobei $h_n(A) =$ Anzahl, wie oft A in n Versuchen eintritt.

Beispiel: Münzwurf

- 10 Würfe: $6\times$ Kopf $\Rightarrow$ relative Häufigkeit $= 0{,}60$
- 100 Würfe: $53\times$ Kopf $\Rightarrow$ relative Häufigkeit $= 0{,}53$
- 10 000 Würfe: $5\,012\times$ Kopf $\Rightarrow$ relative Häufigkeit $= 0{,}5012$

$\Rightarrow$ Die relative Häufigkeit *stabilisiert* sich bei $P(\text{Kopf}) = 0{,}5$.

Dies ist das **Gesetz der großen Zahlen** (intuitiv – formaler Beweis später).

Je mehr Versuche, desto näher kommt die relative Häufigkeit der wahren Wahrscheinlichkeit.

Axiomatische Definition (Kolmogorow)

Andrei Kolmogorow (1933) definierte Wahrscheinlichkeit durch drei Axiome:

Axiom 1 (Nichtnegativität): Für jedes Ereignis A gilt: $P(A) \geq 0$

Axiom 2 (Normierung): $P(\Omega) = 1$

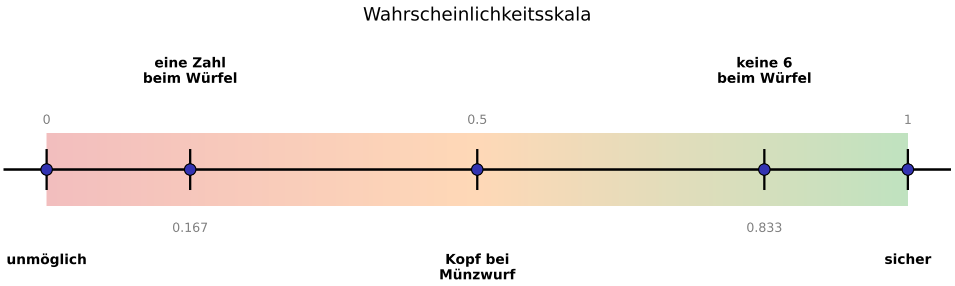
Axiom 3 (Additivität): Sind A und B disjunkt ($A \cap B = \emptyset$), dann: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Warum Axiome?

- Sie gelten für *alle* Wahrscheinlichkeitsmodelle
- Aus ihnen lassen sich *alle* Rechenregeln ableiten
- Sowohl die klassische als auch die statistische Definition erfüllen sie

Kolmogorows Axiome sind das Fundament der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie.

Wahrscheinlichkeitsskala



Wichtige Eigenschaften:

- $0 \leq P(A) \leq 1$ für jedes Ereignis A
- $P(A) = 0$: Ereignis ist *unmöglich*
- $P(A) = 1$: Ereignis ist *sicher*
- Je näher an 1, desto wahrscheinlicher

Wahrscheinlichkeiten liegen immer zwischen 0 und 1 (oder 0% und 100%).

Komplementregel

Satz: Für jedes Ereignis A gilt:

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

Herleitung: A und $\bar{A}$ sind disjunkt, und $A \cup \bar{A} = \Omega$.
$\Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1 \quad$ (Axiome 2 und 3)

Beispiele:

- $P(\text{keine 6}) = 1 - P(6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
- $P(\text{mindestens eine 6 bei 2 Würfeln}) = 1 - P(\text{keine 6 bei 2 Würfeln})$
  $= 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 0{,}306$

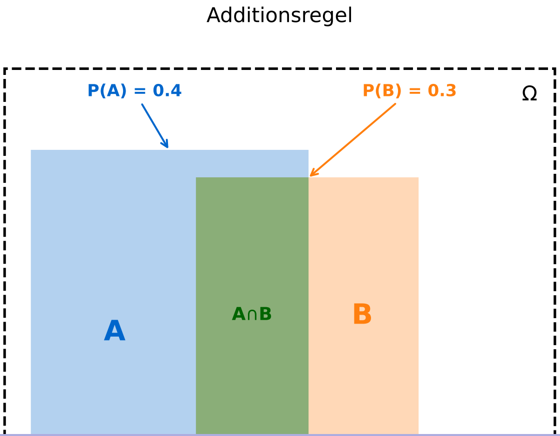
Tipp: Die Komplementregel ist besonders nützlich bei "mindestens"-Aufgaben!

Oft ist $P(\bar{A})$ einfacher zu berechnen als $P(A)$ direkt.

Satz: Für beliebige Ereignisse A und B:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Warum $-P(A \cap B)$? Weil der Schnitt sonst *doppelt gezählt* wird!



Satz: Für beliebige Ereignisse A und B:

$$\boxed{P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

Herleitung:
$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ und beide Teile sind disjunkt.
$\Rightarrow P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$
$\Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Beispiel (ein Würfel):
$A = \{2, 4, 6\}$ (gerade), $B = \{1, 2, 3\}$ (höchstens 3)
$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Prüfung: $A \setminus B = \{4, 6\}$, also $P(A \setminus B) = \frac{2}{6}$ ✓

Die Differenzregel folgt direkt aus Axiom 3 und der Zerlegung von A.

Zusammenfassung: Rechenregeln

Regel	**Formel**
Komplement	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Additionsregel	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Differenzregel	$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
Monotonie	$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
Unmöglich	$P(\emptyset) = 0$

Alle diese Regeln lassen sich aus den drei Kolmogorow-Axiomen herleiten!

Diese Formeln bilden das Handwerkszeug für alle Wahrscheinlichkeitsberechnungen.

Warum Kombinatorik?

Problem: Um $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ zu berechnen, müssen wir *zählen* können.

Kombinatorik = die Kunst des systematischen Zählens.

Grundprinzip: Hat ein Experiment k Stufen mit $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Möglichkeiten, dann gibt es insgesamt

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

mögliche Ergebnisse. (Multiplikationsprinzip)

Beispiel:

- 3 Vorspeisen $\times$ 4 Hauptgerichte $\times$ 2 Desserts = 24 Menüs
- 2 Würfel: $6 \times 6 = 36$ Ergebnisse

Das Multiplikationsprinzip ist die Basis aller Zählformeln.

Permutationen

Definition: Eine Permutation ist eine Anordnung von n Objekten in einer bestimmten Reihenfolge.

$$\boxed{\text{Anzahl der Permutationen von } n \text{ Objekten} = n!}$$

wobei $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{und} \quad 0! = 1.$

Beispiel: Alle Anordnungen von A, B, C ($3! = 6$):

A	B	C
A	C	B
B	A	C

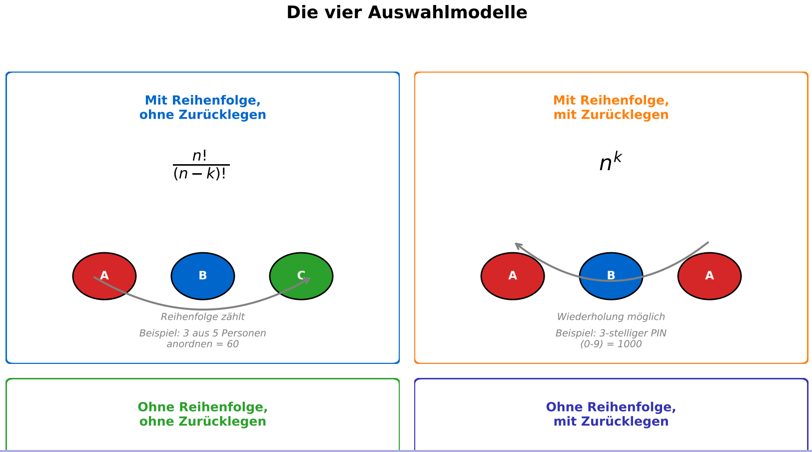
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Fakultät wächst schnell: $5! = 120, \quad 10! = 3\,628\,800, \quad 20! \approx 2{,}4 \cdot 10^{18}$

$n!$ = Anzahl der Möglichkeiten, n verschiedene Objekte in eine Reihenfolge zu bringen.

Frage: Auf wie viele Arten kann man k Objekte aus n auswählen?
Die Antwort hängt von zwei Entscheidungen ab:

1. Ist die **Reihenfolge** relevant?
2. Wird **zurückgelegt** (Wiederholung möglich)?



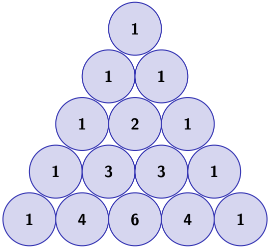
Binomialkoeffizient

Definition: Der Binomialkoeffizient “n über k”:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

Zählt die Anzahl der Möglichkeiten, k Objekte aus n *ohne Rücksicht auf die Reihenfolge* auszuwählen.

Pascalsches Dreieck (die ersten 5 Zeilen):



Eigenschaft: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (Symmetrie)

$\binom{n}{k}$ **ist die zentrale Zählformel für Kombinationen ohne Zurücklegen.**

Beispiele zur Kombinatorik

1. Lotto “6 aus 49”:
Ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen:

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13\,983\,816$$

$P(6 \text{ Richtige}) = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 0{,}0000000715$

2. PIN-Code (4 Ziffern, 0–9):
Mit Reihenfolge, mit Zurücklegen:

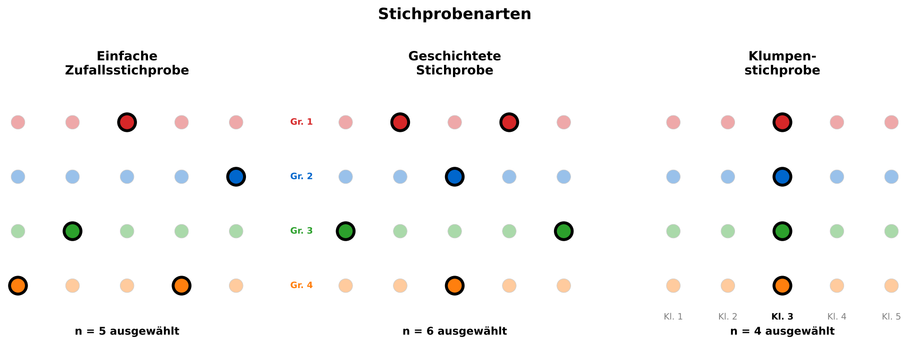
$$10^4 = 10\,000 \text{ mögliche PINs}$$

3. Sitzordnung (8 Personen am Tisch):
Permutation:

$$8! = 40\,320 \text{ Möglichkeiten}$$

Die richtige Formel zu wählen: Frage nach Reihenfolge und Zurücklegen!

Stichprobenarten

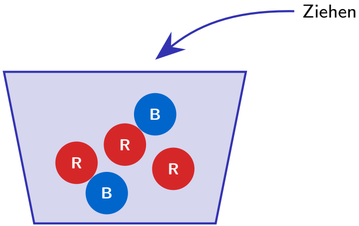


- **Einfache Zufallsstichprobe:** Jedes Element hat die gleiche Chance, ausgewählt zu werden
- **Geschichtete Stichprobe:** Population wird in Gruppen (Schichten) geteilt, aus jeder wird gezogen
- **Klumpenstichprobe:** Natürliche Gruppen (Klumpen) werden ausgewählt, alle Elemente darin erfasst

Die Wahl der Stichprobenmethode beeinflusst die Güte der Ergebnisse.

Urnenmodell

Abstraktes Modell: Eine Urne enthält n Kugeln. Wir ziehen k Kugeln.



Zwei Varianten:

- **Ohne Zurücklegen:** Gezogene Kugel bleibt draußen $\Rightarrow$ abhängige Züge
- **Mit Zurücklegen:** Kugel wird zurückgelegt $\Rightarrow$ unabhängige Züge

Das Urnenmodell ist das Standardmodell für viele Zufallsexperimente.

Anzahl möglicher Stichproben

Übersicht: n Objekte, k werden ausgewählt.

	Mit Reihenfolge	Ohne Reihenfolge
Ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
Mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Beispiel: 20 Studierende, 3 werden für ein Projekt ausgewählt.

- Rollen (Leiter, Sprecher, Schreiber): $\frac{20!}{17!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6\,840$
- Gleichberechtigtes Team: $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1\,140$

Immer fragen: Zählt die Reihenfolge? Wird zurückgelegt?

Lernziele – Checkliste

Prüfen Sie sich selbst:

- ✓ **Zufallsexperiment:** Ergebnis ω, Ergebnisraum Ω, Ereignis $A \subseteq \Omega$
- ✓ **Mengenoperationen:** $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\bar{A}$ – und Venn-Diagramme
- ✓ **Drei Definitionen:** Laplace, frequentistisch, axiomatisch (Kolmogorow)
- ✓ **Rechenregeln:** Komplement, Additionsregel, Differenzregel
- ✓ **Kombinatorik:** $n!$, $\binom{n}{k}$, und die vier Auswahlmodelle
- ✓ **Stichproben:** Einfach, geschichtet, Klumpen – und Urnenmodell

---

Wenn Sie alle Punkte verstanden haben, sind Sie bereit für Lektion B02!

Schlüsselformeln

Formel	Name
$P(A) = \frac{\|A\|}{\|\Omega\|}$	Laplace-Wahrscheinlichkeit
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	Komplementregel
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	Additionsregel
$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$	Differenzregel
$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$	Fakultät
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	Binomialkoeffizient

Diese Formeln sind das Fundament für alle weiteren Lektionen.