Lineare Algebra Woche 5

Zusammenfassung: Eigenwerte und Anwendungen

14 Kernkonzepte mit Visualisierungen und Beispielen

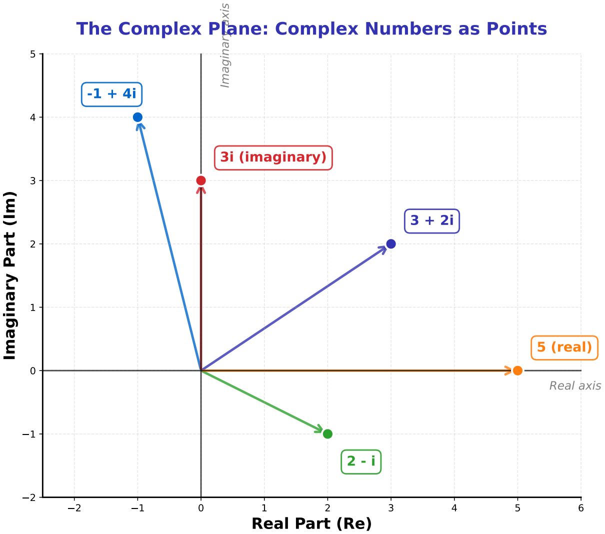
Teil 1: Komplexe Zahlen — Teil 2: Eigenwerte — Teil 3: Diagonalisierung — Teil 4: Anwendungen

Komplexe Zahlen: Das vollstaendige Zahlensystem

Die komplexe Ebene (Argand-Diagramm)

- Komplexe Zahl $z = a + bi$ als Punkt (a, b) in der 2D-Ebene
- Kerneigenschaft: $i^2 = -1$ erweitert reelle Zahlen

Beispiel: $z = 3 + 2i$ **liegt bei** $(3, 2)$ **mit Betrag** $|z| = \sqrt{13} \approx 3.6$


The Complex Plane: Complex Numbers as Points
-1 + 4i
3i (imaginary)
3 + 2i
5 (real)
2 - i
Imaginary axis
Real axis
Imaginary Part (Im)
Real Part (Re)
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6

Komplexe Zahlen: Beispiel

Beispiel: $z = 3 + 4i$

- Realteil: $\mathrm{Re}(z) = 3$
- Imaginaerteil: $\mathrm{Im}(z) = 4$
- Punkt in der Ebene: $(3, 4)$
- Betrag: $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
- Konjugiert: $\bar{z} = 3 - 4i$

Merke: Der Betrag ist der Abstand zum Ursprung (Pythagoras)

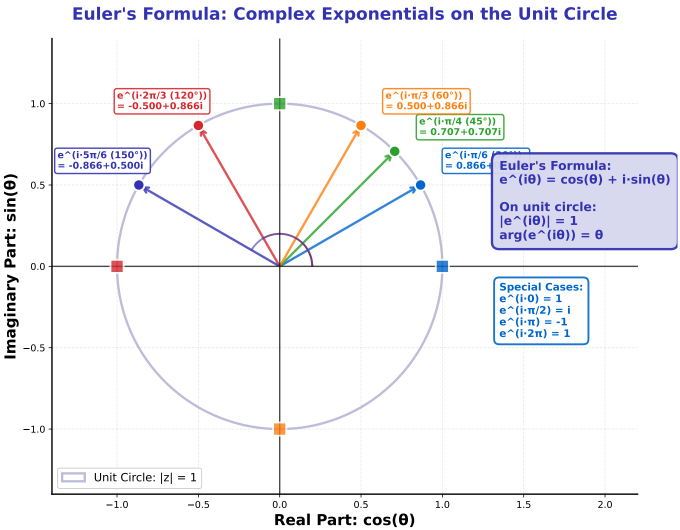
Euler-Formel: Exponential trifft Trigonometrie

Polarform und Euler-Formel

- Jede komplexe Zahl hat Polarform: $z = r \cdot e^{i\theta}$
- Euler-Formel: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Beispiel: $z = 1 + i$ **in Polarform:** $r = \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$

Euler-Formel: Visualisierung



Beispiel: $e^{i\pi/4}$ berechnen

$$e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Spezialfaelle:

- $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \quad$ (Euler-Identitaet: $e^{i\pi} + 1 = 0$)
- $e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

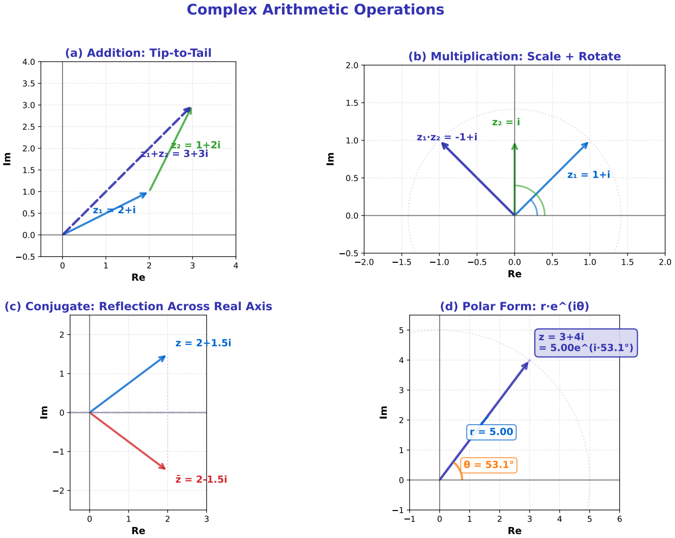
Merke: $e^{i\theta}$ liegt auf dem Einheitskreis bei Winkel θ

Komplexe Arithmetik: Vier Grundoperationen

Operationen in der komplexen Ebene

- Addition: Vektoraddition (komponentenweise)
- Multiplikation: Betraege multiplizieren, Winkel addieren

Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$ **mit** $\bar{z} = a - bi$


Complex Arithmetic Operations
(a) Addition: Tip-to-Tail
z₁ = 2+i
z₂ = 1+2i
z₁+z₂ = 3+3i
Re
Im
(b) Multiplication: Scale + Rotate
z₁ = 1+i
z₂ = i
z₁·z₂ = -1+i
Re
Im
(c) Conjugate: Reflection Across Real Axis
z = 2+1.5i
z̄ = 2-1.5i
Re
Im
(d) Polar Form: r·e^(iθ)
z = 3+4i
= 5.00e^(i·53.1°)
r = 5.00
θ = 53.1°
Re
Im

Komplexe Arithmetik: Beispiel

Beispiel: $(1+i)(1-i)$ berechnen
Methode 1 (direkt):

$$(1+i)(1-i) = 1 - i + i - i^2 = 1 - (-1) = 2$$

Methode 2 (Polarform):

- $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}, \quad 1 - i = \sqrt{2} \cdot e^{-i\pi/4}$
- Produkt: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i(\pi/4 - \pi/4)} = 2 \cdot e^0 = 2$

Merke: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ **ist immer reell und positiv**

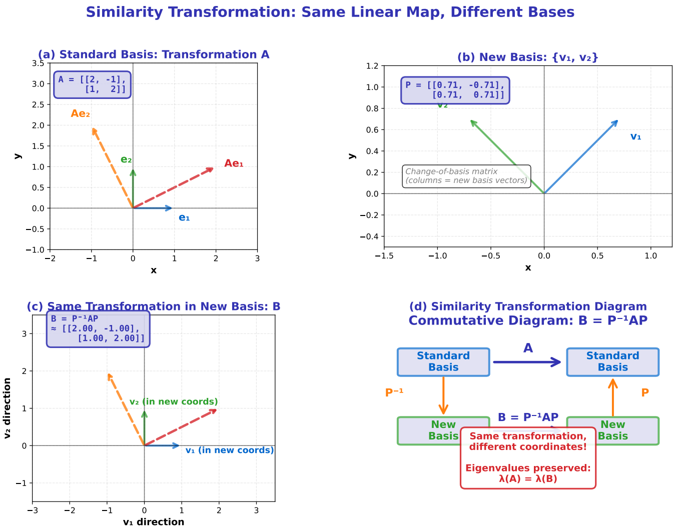
Aehnliche Matrizen: Gleiche Transformation

Aehnlichkeitstransformation

- $B = P^{-1}AP$ bedeutet A und B sind aehnlich
- Gleiche: Eigenwerte, Spur, Determinante, Rang

P ist Basiswechselmatrix; Diagonalisierung ist Spezialfall

Aehnliche Matrizen: Visualisierung



Aehnliche Matrizen: Beispiel

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

A und D sind aehnlich, denn mit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt:

$$D = P^{-1}AP$$

Gleiche Invarianten:

- Spur: $\mathrm{tr}(A) = 3 + 3 = 6 = 4 + 2 = \mathrm{tr}(D)$
- Determinante: $\det(A) = 9 - 1 = 8 = 4 \cdot 2 = \det(D)$
- Eigenwerte: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ (beide Matrizen!)

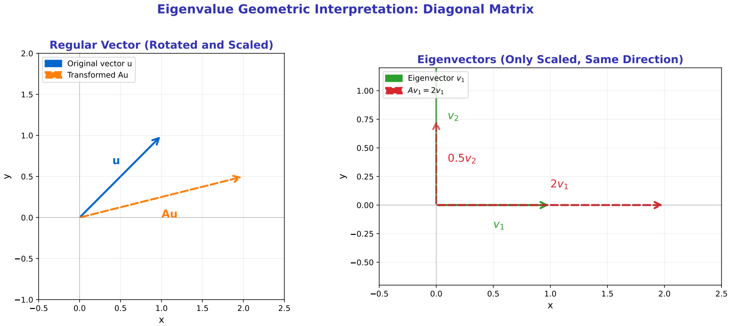
Merke: Aehnliche Matrizen beschreiben dieselbe Transformation in verschiedenen Basen

Eigenvektoren: Richtungen die nur skaliert werden

Die Grundgleichung: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

- Eigenvektor $\mathbf{v}$: Richtung bleibt erhalten
- Eigenwert λ: Skalierungsfaktor (> 1 Streckung, < 0 Spiegelung)

Beispiel: Diagonalmatrix hat Standardbasisvektoren als Eigenvektoren


Eigenvalue Geometric Interpretation: Diagonal Matrix
Regular Vector (Rotated and Scaled)
Original vector u
Transformed Au
u
Au
x
y
Eigenvectors (Only Scaled, Same Direction)
Eigenvector v_1
$Av_1 = 2v_1$
v_2
$0.5v_2$
$2v_1$
v_1
x
y

Eigenvektoren: Beispiel

Beispiel: Mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\mathbf{v}_1$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = (1, 1)^T$ ist Eigenvektor mit Eigenwert $\lambda_1 = 4$

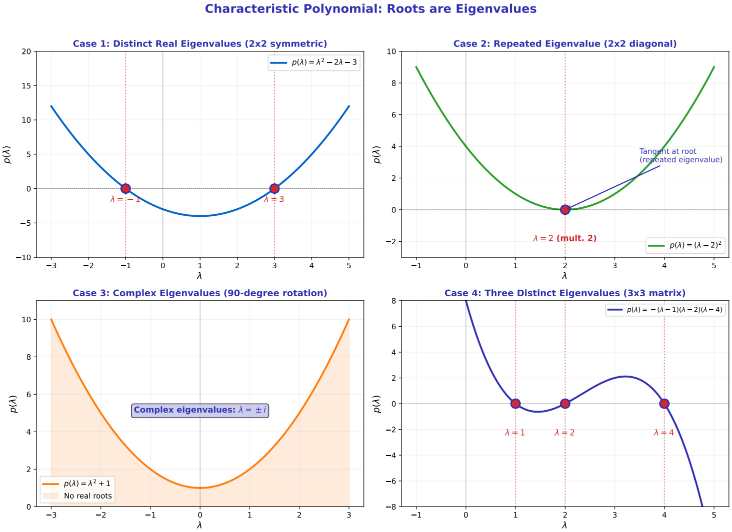
Merke: Der Vektor wird nur um Faktor 4 gestreckt, Richtung bleibt gleich

Charakteristisches Polynom: Nullstellen sind Eigenwerte

Eigenwerte berechnen

- Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- Eigenwerte sind Nullstellen von $p(\lambda) = 0$

Fuer $n \times n$ Matrix ist $p(\lambda)$ Polynom vom Grad n



Characteristic Polynomial: Roots are Eigenvalues
Case 1: Distinct Real Eigenvalues (2x2 symmetric)
$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$
$\lambda = -1$
$\lambda = 3$
Case 2: Repeated Eigenvalue (2x2 diagonal)
Tangent at root
(repeated eigenvalue)
$\lambda = 2$ (mult. 2)
$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2$
Case 3: Complex Eigenvalues (90-degree rotation)
Complex eigenvalues: $\lambda = \pm i$
$p(\lambda) = \lambda^2 + 1$
No real roots
Case 4: Three Distinct Eigenvalues (3x3 matrix)
$p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$
$\lambda = 1$
$\lambda = 2$
$\lambda = 4$
$p(\lambda)$
λ

Charakteristisches Polynom: Beispiel

Beispiel: Mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$

Merke: Spur = Summe der Eigenwerte $(4 + 2 = 6)$, **Det = Produkt** $(4 \cdot 2 = 8)$

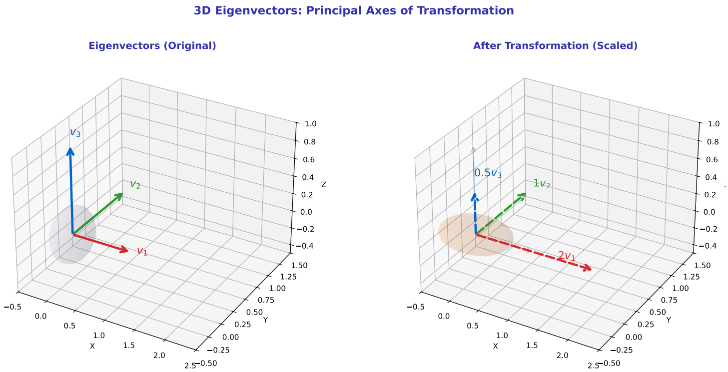
Eigenvektoren berechnen: Das Kern-Problem

Eigenvektoren aus Eigenwerten

- Fuer jeden Eigenwert λ: Loese $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- Eigenraum $E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$

Gausselimination auf $(A - \lambda I)$ anwenden

Eigenvektoren in 3D: Visualisierung



Eigenvektoren berechnen: Beispiel

Beispiel: Eigenvektor zu $\lambda_1 = 4$ fuer $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$(A - 4I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichung: $-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$

$\Rightarrow$ Eigenvektor: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (oder jedes Vielfache)

Merke: Eigenvektoren sind bis auf Skalierung eindeutig

Algebraische vs Geometrische Vielfachheit

Wann ist Diagonalisierung moeglich?

- Algebraische: Wie oft λ als Nullstelle auftritt
- Geometrische: $\dim(E_\lambda)$ — Ungleichung: $1 \leq \text{geo} \leq \text{alg}$

Diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ geo = alg fuer alle Eigenwerte

Vielfachheiten: Beispiele

Algebraic vs. Geometric Multiplicity: Comparison

Case 1: Multiplicities Match

Matrix A: diagonal(5, 5, 3)

Characteristic polynomial:

$p(\lambda) = (5-\lambda)^2(3-\lambda)$

Eigenvalue $\lambda = 5$:
Algebraic mult. = 2 | Geometric mult. = 2

Eigenspace:
Dim = 2 (spans first two coordinates)

STATUS: DIAGONALIZABLE

Multiplicities match - Full set of eigenvectors

Case 2: Multiplicities Differ

Matrix B: upper triangular

(5,1,0 on diag, 1 above diag)

Characteristic polynomial:

$p(\lambda) = (5-\lambda)^2(3-\lambda)$

Eigenvalue $\lambda = 5$:
Algebraic mult. = 2 | Geometric mult. = 1

Eigenspace:
Dim = 1 (only ONE independent eigenvector!)

STATUS: NOT DIAGONALIZABLE

DEFECTIVE MATRIX

Case 3: Mixed Multiplicities (Both Match)

Matrix C: diagonal(2, 3, 3)

$p(\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda)^2$

Eigenvalue Analysis:

λ	Alg. Mult.	Geom. Mult.
2	1	**1**
3	2	**2**

Both eigenvalues have matching multiplicities

Diagonalizable: YES

Full set of 3 independent eigenvectors

Case 4: Severely Defective Matrix

Matrix D: Jordan block

(4 on diag, 1 above diag)

$p(\lambda) = (4-\lambda)^3$

Single Eigenvalue $\lambda = 4$:
Algebraic mult. = 3 | Geometric mult. = 1

Eigenspace:
Dimension = 1

(Only 1 eigenvector for 3x3 matrix!)

SEVERELY DEFECTIVE
Needs generalized eigenvectors

Not Diagonalizable - Use Jordan Form

Vielfachheiten: Beispiel

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$

- $\lambda_1 = 4$: alg $= 1$, geo $= \dim(E_4) = 1$ ✓
- $\lambda_2 = 2$: alg $= 1$, geo $= \dim(E_2) = 1$ ✓

$\Rightarrow$ geo $=$ alg fuer alle Eigenwerte $\Rightarrow$ **diagonalisierbar**

Gegenbeispiel: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat $\lambda = 2$ (doppelt), aber nur 1 Eigenvektor $\Rightarrow$ nicht diagonalisierbar

---

Merke: Symmetrische Matrizen sind immer diagonalisierbar

Diagonalisierungs-Algorithmus

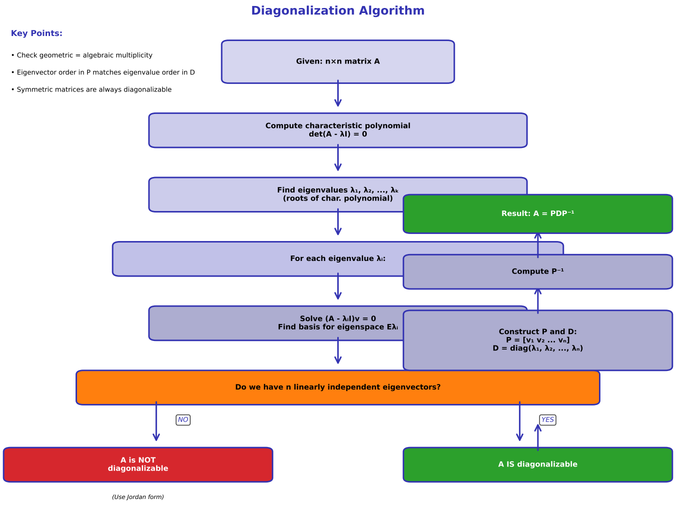
$A = PDP^{-1}$ **bestimmen**

- $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ Eigenwerte auf Diagonale
- $P = [\mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_n]$ Eigenvektoren als Spalten

---

Symmetrische Matrizen sind immer diagonalisierbar

Diagonalisierung: Prozess



Diagonalisierung: Beispiel

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalisieren

Eigenwerte: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$

Eigenvektoren: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

Merke: Spalten von P sind Eigenvektoren in gleicher Reihenfolge wie Eigenwerte in D

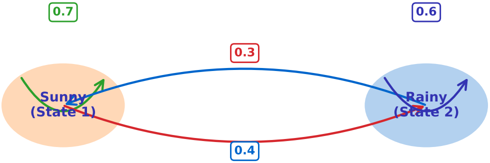
Stochastische Matrizen

- Stochastische Matrix P: Spaltensummen $= 1$, alle Eintraege ≥ 0
- Zustandsentwicklung: $\mathbf{x}^{(k+1)} = P \cdot \mathbf{x}^{(k)}$

Wetter: Sonnig$\to$Sonnig 70%, Regnerisch$\to$Sonnig 40%

Markov-Ketten: Zustandsdiagramm

Markov Chain: Weather Model




```
P = [[0.7, 0.4], [0.3, 0.6]]
```

Each arrow shows transition probability (edges sum to 1 from each state)

Markov-Ketten: Beispiel

Beispiel: Wetter-Modell mit $P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$

Start: Heute sonnig $\Rightarrow \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nach 1 Tag: $\mathbf{x}^{(1)} = P\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Morgen: 70% sonnig, 30% regnerisch

Merke: Spaltensumme = 1 garantiert, dass Wahrscheinlichkeiten erhalten bleiben

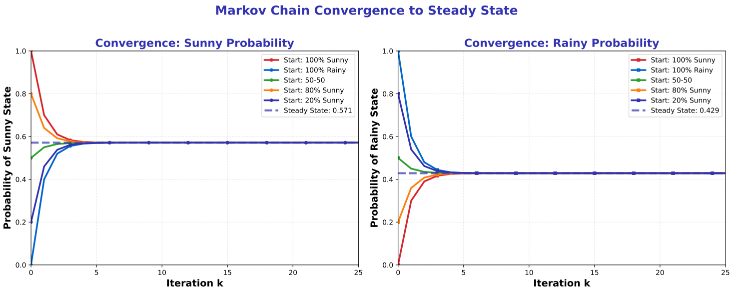
Stationaerer Zustand: Der dominante Eigenvektor

Langzeitverhalten

- Stationaer $\boldsymbol{\pi}$: $P\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$ (Eigenvektor mit $\lambda = 1$)
- Jede stochastische Matrix hat Eigenwert $\lambda = 1$

Wetter langfristig: $\boldsymbol{\pi} \approx (0.57, 0.43)$ — **57% sonnig**

Markov-Konvergenz: Visualisierung



Stationaerer Zustand: Beispiel

Beispiel: Stationaeren Zustand finden fuer $P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$

Loese $P\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$ mit $\pi_1 + \pi_2 = 1$:

$(P - I)\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.4 \\ 0.3 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow -0.3\pi_1 + 0.4\pi_2 = 0 \Rightarrow \pi_1 = \frac{4}{3}\pi_2$

Mit $\pi_1 + \pi_2 = 1$: $\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 4/7 \\ 3/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.57 \\ 0.43 \end{pmatrix}$

Merke: Langfristig 57% sonnig, 43% regnerisch — egal wie es heute ist

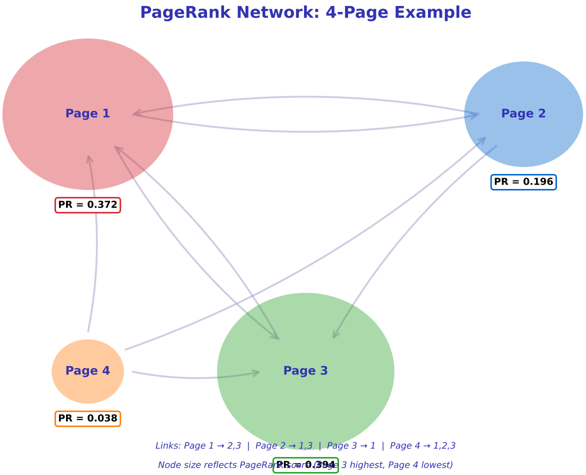
PageRank: Wie Google Webseiten rankt

Die Kernidee: Links = Stimmen

- Link von A nach B = A “stimmt fuer” B
- Links von wichtigen Seiten zaehlen mehr

Random-Surfer-Modell: Wo landest du am haeufigsten?

PageRank: Netzwerk-Visualisierung



PageRank: Beispiel

Beispiel: Seite A verlinkt zu B und C
A's PageRank wird gleichmaessig aufgeteilt:

- B erhaelt 50% von A's Stimme
- C erhaelt 50% von A's Stimme

Wenn A wichtig ist (hoher PageRank), sind diese Stimmen wertvoll!

$$G_{BA} = G_{CA} = 0.5$$

Merke: PageRank einer Seite = gewichtete Summe der PageRanks der verlinkenden Seiten

PageRank Beispiel: 3 Webseiten

Das Netzwerk:

- A verlinkt zu B und C
- B verlinkt nur zu C
- C verlinkt nur zu A

Matrix: $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

PageRank:
Start: $\boldsymbol{\pi}^{(0)} = (0.33, 0.33, 0.33)$
Konvergenz: $\boldsymbol{\pi} = (0.4, 0.2, 0.4)$
Ergebnis: A und C je 40%, B nur 20%

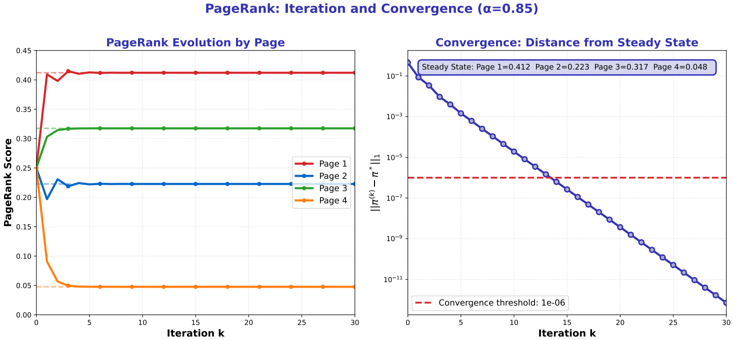
C gewinnt durch Link von wichtiger Seite A

PageRank = Eigenwertproblem in Verkleidung

Vom Random Surfer zur Linearen Algebra

- G_{ij} = Wahrscheinlichkeit von j zu i
- PageRank = stationaerer Zustand mit $G\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$

Google 1998: Eigenwert-Idee revolutionierte Websuche


PageRank: Iteration and Convergence (α=0.85)
PageRank Evolution by Page
PageRank Score
Iteration k
Page 1
Page 2
Page 3
Page 4
Convergence: Distance from Steady State
Steady State: Page 1=0.412 Page 2=0.223 Page 3=0.317 Page 4=0.048
$||\pi^{(k)} - \pi^*||_1$
Convergence threshold: 1e-06
Iteration k

PageRank = Eigenwert: Beispiel

Beispiel: Warum konvergiert PageRank?
Die Google-Matrix G ist stochastisch $\Rightarrow$ hat Eigenwert $\lambda = 1$

$$G\boldsymbol{\pi} = 1 \cdot \boldsymbol{\pi}$$

Der PageRank-Vektor $\boldsymbol{\pi}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert 1!
Berechnung:

- Starte mit beliebigem $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$
- Iteriere: $\boldsymbol{\pi}^{(k+1)} = G \cdot \boldsymbol{\pi}^{(k)}$
- Konvergiert zum dominanten Eigenvektor

Merke: PageRank = Markov-Kette = Eigenvektor-Problem — alles dasselbe!