Kurzfragen & Antworten

Lineare Algebra – 50 Q&A

Schnelle Wiederholung der wichtigsten Konzepte

10 Fragen pro Thema

Teil 1: 3D-Geometrie (Fragen 1-5)

F: 1. Was ist das Kreuzprodukt zweier Vektoren?
A: Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ergibt einen Vektor senkrecht zu beiden Eingangsvektoren.

F: 2. Wie berechnet man $|\vec{a} \times \vec{b}|$?
A: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$ (Flaeche des Parallelogramms).

F: 3. Was bedeutet $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$?
A: Die Vektoren sind parallel (oder einer ist Nullvektor).

F: 4. Wie findet man die Ebenengleichung durch 3 Punkte A, B, C?
A: $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$, dann $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{A}) = 0$.

F: 5. Was ist der Normalenvektor einer Ebene?
A: Ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht.

Kreuzprodukt: nur in 3D definiert, ergibt Vektor (nicht Skalar wie Skalarprodukt)

Teil 1: 3D-Geometrie (Fragen 6-10)

F: 6. Wie berechnet man den Abstand eines Punktes P von einer Ebene?
A: $d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{P} - \vec{A})|}{|\vec{n}|}$ wobei $\vec{n}$ Normalenvektor und A Punkt auf Ebene.

F: 7. Wie berechnet man die Dreiecksflaeche mit Vektoren?
A: $A = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$ (halbe Parallelogrammflaeche).

F: 8. Was ist die Formel fuer das Pyramidenvolumen?
A: $V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Basis}} \cdot h$ (ein Drittel von Prismavolumen).

F: 9. Wie findet man die Hoehe einer Pyramide zur Grundflaeche?
A: Abstand der Spitze von der Ebene der Grundflaeche (Formel aus F6).

F: 10. Was bedeutet "3 Punkte spannen eine Ebene auf"?
A: Die Punkte sind nicht kollinear, d.h. $\vec{AB} \times \vec{AC} \neq \vec{0}$.

Spatprodukt: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ **= Volumen des Parallelepipeds**

Teil 2: Transformationen (Fragen 11-15)

F: 11. Was sind homogene Koordinaten?
A: 2D-Punkt (x, y) wird zu $(x, y, 1)^T$ – ermoeglicht Translation als Matrix.

F: 12. Warum braucht man homogene Koordinaten?
A: Translation ist keine lineare Abbildung; mit homogenen Koordinaten wird sie zur Matrixmultiplikation.

F: 13. Wie sieht die 2D-Rotationsmatrix (Winkel θ) aus?
A: $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (in 2D) oder mit dritter Zeile/Spalte $(0, 0, 1)$ in homogen.

F: 14. Wie sieht die Translationsmatrix aus?
A: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ verschiebt um (t_x, t_y).

F: 15. Wie sieht die Skalierungsmatrix aus?
A: $S = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ skaliert um Faktoren s_x, s_y.

Rotation + Skalierung sind lineare Abb., Translation ist affin

Teil 2: Transformationen (Fragen 16-20)

F: 16. In welcher Reihenfolge multipliziert man Transformationsmatrizen?
A: Von rechts nach links: $M = T \cdot S \cdot R$ bedeutet erst R, dann S, dann T.

F: 17. Was ist der Unterschied zwischen aktiver und passiver Transformation?
A: Aktiv: Objekt bewegt sich. Passiv: Koordinatensystem aendert sich.

F: 18. Wie rotiert man um einen beliebigen Punkt P (nicht Ursprung)?
A: 1) Translate P zum Ursprung, 2) Rotiere, 3) Translate zurueck: $M = T_P \cdot R \cdot T_{-P}$.

F: 19. Was ist eine affine Transformation?
A: Lineare Transformation + Translation; erhaelt Parallelitaet und Verhaeltnisse.

F: 20. Wie kombiniert man mehrere Transformationen effizient?
A: Alle Matrizen zu einer Gesamtmatrix multiplizieren, dann einmal anwenden.

Gesamtmatrix M einmal berechnen, dann fuer alle Punkte: $\vec{p}' = M \cdot \vec{p}$

Teil 3: Lineare Codes (Fragen 21-25)

F: 21. Was ist ein linearer Code?
A: Untervektorraum von $\mathbb{Z}_2^n$; Summe zweier Codewoerter ist wieder Codewort.

F: 22. Was ist die Pruefmatrix H?
A: Matrix mit $H \cdot \vec{c}^T = \vec{0}$ fuer alle Codewoerter $\vec{c}$.

F: 23. Was ist die Generatormatrix G?
A: Matrix zur Kodierung: $\vec{c} = \vec{m} \cdot G$ erzeugt Codewort aus Nachricht.

F: 24. Wie haengen H und G zusammen?
A: $H \cdot G^T = 0$; bei systematischer Form: $H = [P|I_r]$, $G = [I_k|P^T]$.

F: 25. Was bedeutet n bei $[n, k, d]$?
A: Codelaenge = Anzahl Bits pro Codewort = Spaltenanzahl von H.

In $\mathbb{Z}_2$: Addition modulo 2, also $1 + 1 = 0$

Teil 3: Lineare Codes (Fragen 26-30)

F: 26. Was bedeutet k bei $[n, k, d]$?
A: Dimension = Anzahl Informationsbits = $n - r$ wobei $r = \text{Rang}(H)$.

F: 27. Was bedeutet d bei $[n, k, d]$?
A: Minimaldistanz = kleinstes Hamming-Gewicht eines Codeworts $\neq \vec{0}$.

F: 28. Wie findet man d aus H?
A: d = minimale Anzahl linear abhaengiger Spalten von H.

F: 29. Wie viele Fehler kann man erkennen?
A: $d - 1$ Fehler sind erkennbar (aber nicht korrigierbar).

F: 30. Wie viele Fehler kann man korrigieren?
A: $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ Fehler sind korrigierbar.

Beispiel: $[7, 4, 3]$-**Hamming-Code korrigiert 1 Fehler, erkennt 2 Fehler**

Teil 4: Orthogonalitaet (Fragen 31-35)

F: 31. Was bedeutet "orthogonal"?
A: Senkrecht zueinander, d.h. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

F: 32. Was ist das Skalarprodukt?
A: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ (ergibt Skalar).

F: 33. Was ist eine orthogonale Basis?
A: Basis, bei der alle Basisvektoren paarweise orthogonal sind.

F: 34. Was ist eine orthonormale Basis?
A: Orthogonale Basis mit normierten Vektoren ($|\vec{b}_i| = 1$).

F: 35. Was ist das Gram-Schmidt-Verfahren?
A: Algorithmus zur Konstruktion einer orthogonalen Basis aus beliebiger Basis.

Orthonormal: $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij}$ **(Kronecker-Delta)**

Teil 4: Orthogonalitaet (Fragen 36-40)

F: 36. Wie berechnet man die Projektion auf einen Vektor?
A: $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} \cdot \vec{u}$

F: 37. Warum ist eine orthogonale Basis praktisch?
A: Koeffizienten direkt berechenbar: $c_i = \frac{\vec{x}\cdot\vec{b}_i}{\vec{b}_i\cdot\vec{b}_i}$.

F: 38. Wie prueft man, ob $\vec{x}$ in $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ liegt?
A: Loese $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{x}$; loesbar $\Rightarrow$ ja.

F: 39. Wie findet man Koeffizienten bei orthogonaler Basis?
A: Direkt: $\alpha_i = \frac{\vec{x}\cdot\vec{b}_i}{\vec{b}_i\cdot\vec{b}_i}$ (kein LGS noetig).

F: 40. Was ist der Unterschied zur allgemeinen Basis?
A: Bei allgemeiner Basis muss man LGS loesen; bei orthogonaler reicht Skalarprodukt.

QR-Zerlegung: $A = QR$ **mit orthogonaler Matrix** Q **(Gram-Schmidt auf Spalten)**

Teil 5: Eigenwerte (Fragen 41-45)

F: 41. Was ist ein Eigenwert?
A: Skalar λ mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ fuer einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$.

F: 42. Was ist ein Eigenvektor?
A: Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$, der durch A nur skaliert (nicht gedreht) wird.

F: 43. Was ist das charakteristische Polynom?
A: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$; Nullstellen sind die Eigenwerte.

F: 44. Wie loest man $\det(A - \lambda I) = 0$?
A: Fuer 2×2: $\lambda^2 - \mathrm{Spur}(A)\lambda + \det(A) = 0$; pq-Formel.

F: 45. Was ist die algebraische Vielfachheit?
A: Wie oft λ als Nullstelle des char. Polynoms auftritt.

Spur$(A) = \sum_i a_{ii}$ **= Summe der Diagonalelemente = Summe der Eigenwerte**

Teil 5: Eigenwerte (Fragen 46-50)

F: 46. Was ist die geometrische Vielfachheit?
A: $\dim(\ker(A - \lambda I))$ = Dimension des Eigenraums zu λ.

F: 47. Wann ist eine Matrix diagonalisierbar?
A: Wenn es n linear unabhaengige Eigenvektoren gibt (geom. = alg. Vielf. fuer alle λ).

F: 48. Was ist die Matrix P bei der Diagonalisierung?
A: $P = [\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \dots | \vec{v}_n]$ (Eigenvektoren als Spalten).

F: 49. Was ist die Matrix D bei der Diagonalisierung?
A: $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (Eigenwerte auf Diagonale, gleiche Reihenfolge wie in P).

F: 50. Wie verifiziert man $P^{-1}AP = D$?
A: Berechne AP und PD; beide muessen gleich sein (einfacher als P^{-1} zu berechnen).

Anwendung: $A^n = PD^nP^{-1}$ **– Matrixpotenzen effizient berechnen**

Formelsammlung – Schnelluebersicht

3D-Geometrie

- Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$
- Dreiecksflaeche: $A = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$
- Pyramidenvolumen: $V = \frac{1}{3}A_{\text{Basis}} \cdot h$

Transformationen

- Rotation: $\cos\theta, -\sin\theta, \sin\theta, \cos\theta$
- Kombination: rechts nach links

Lineare Codes

- $H \cdot \vec{c}^T = \vec{0}$
- $k = n - r$, $d =$ min. lin. abh. Spalten

Orthogonalitaet

- Projektion: $\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} \cdot \vec{u}$
- Gram-Schmidt: $\vec{u}_i = \vec{v}_i - \sum_{j<i} \text{proj}_{\vec{u}_j}(\vec{v}_i)$

Eigenwerte

- Char. Polynom: $\det(A - \lambda I) = 0$
- Eigenvektor: $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$
- Diagonalisierung: $A = PDP^{-1}$

Viel Erfolg bei der Pruefung!