Pruefungsvorbereitung

Lineare Algebra – FAQ

20 wichtige Fragen mit Loesungen

Teil 1: 3D-Geometrie — Teil 2: Transformationen — Teil 3: Lineare Codes
Teil 4: Orthogonalitaet — Teil 5: Eigenwerte

FAQ 1: Wie zeigt man, dass 3 Punkte eine Ebene aufspannen?

Methode: Kreuzprodukt der Richtungsvektoren

- Bilde Richtungsvektoren: $\vec{AB} = B - A$ und $\vec{AC} = C - A$
- Berechne Kreuzprodukt: $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$
- Falls $\vec{n} \neq \vec{0}$: Punkte spannen Ebene auf

Beispiel: $A(1, 2, 3)$, $B(4, 5, 3)$, $C(1, 2, 10)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 7 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -21 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Kreuzprodukt = 0 bedeutet: Vektoren parallel, keine Ebene moeglich

FAQ 2: Wie berechnet man den Normalenvektor einer Ebene?

Formel: Kreuzprodukt zweier Richtungsvektoren

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Merkregel: "Sarrus-Schema" oder "zyklische Vertauschung"

- Komponente 1: Zeilen 2 und 3 (diagonal multiplizieren)
- Komponente 2: Zeilen 3 und 1 (diagonal multiplizieren)
- Komponente 3: Zeilen 1 und 2 (diagonal multiplizieren)

Ebenengleichung: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{A}) = 0$ oder $n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$

Der Normalenvektor steht senkrecht auf der Ebene

FAQ 3: Wie berechnet man die Flaeche eines Dreiecks?

Formel mit Kreuzprodukt:

$$A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

Schritt fuer Schritt:

1. Richtungsvektoren bilden: $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$
2. Kreuzprodukt berechnen: $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$
3. Betrag berechnen: $|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$
4. Durch 2 teilen: $A = \frac{1}{2}|\vec{n}|$

Beispiel: Mit $\vec{n} = (21, -21, 0)^T$:

$$|\vec{n}| = \sqrt{21^2 + (-21)^2 + 0^2} = \sqrt{882} = 21\sqrt{2}$$

$$A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 21\sqrt{2} = \frac{21\sqrt{2}}{2} \approx 14.85 \text{ FE}$$

Merke: Kreuzprodukt-Betrag = Parallelogrammflaeche, daher $\times \frac{1}{2}$

FAQ 4: Wie berechnet man das Volumen einer Pyramide?

Formel:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Grundflaeche}} \cdot h$$

Alternative mit Spatprodukt (wenn 4 Punkte gegeben):

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$$

Beispiel aus der Pruefung:

- Grundflaeche: $A_{\triangle ABC} = \frac{21\sqrt{2}}{2}$ (aus FAQ 3)
- Hoehe: $h = \sqrt{2}$ (gegeben)
- Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{21\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{21 \cdot 2}{2} = 7$ VE

Bei 4 Punkten: Spatprodukt = sechsfaches Tetraedervolumen

FAQ 5: Was sind homogene Koordinaten?

Definition:

$$\text{2D-Punkt } (x, y) \to \text{Homogene Koordinaten } \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Warum homogene Koordinaten?

- Ermoeglicht Translation als Matrixmultiplikation
- Alle Transformationen (Rotation, Skalierung, Translation) als 3×3 Matrizen
- Kombinierte Transformationen durch Matrixmultiplikation

Ruecktransformation:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w \end{pmatrix} \to \left(\frac{x'}{w}, \frac{y'}{w} \right) \quad (\text{falls } w \neq 0)$$

Standard: $w = 1$ fuer Punkte, $w = 0$ fuer Richtungsvektoren (im Unendlichen)

FAQ 6: Wie sieht die Drehmatrix aus?

2D-Rotation um den Ursprung (Winkel θ):

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wichtige Winkel:

- $\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$: $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$
- $\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$: $\cos\theta = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\theta = -45^\circ$: $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Beispiel: Rotation um -45°:

$$R(-45^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Positive Winkel = Gegenuhrzeigersinn, negative Winkel = Uhrzeigersinn

Skalierung (Zoom) mit Faktor s:

$$S(s) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anisotrope Skalierung (unterschiedliche Faktoren):

$$S(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spezialfaelle:

- $s > 1$: Vergroesserung
- $0 < s < 1$: Verkleinerung (Stauchung)
- $s = -1$: Spiegelung

Beispiel: Stauchung auf halbe Groesse: $s = \frac{1}{2}$

Translation in homogenen Koordinaten: letzte Spalte = $(t_x, t_y, 1)^T$

FAQ 8: Wie kombiniert man Transformationen?

Reihenfolge der Matrixmultiplikation:

$$M_{\text{gesamt}} = M_{\text{letzte}} \cdot M_{\text{vorletzte}} \cdot \ldots \cdot M_{\text{erste}}$$

Beispiel: Erst rotieren, dann skalieren, dann verschieben

$$M = T \cdot S \cdot R$$

$$\vec{x}' = T \cdot S \cdot R \cdot \vec{x} = M \cdot \vec{x}$$

Translationsmatrix:

$$T(t_x, t_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pruefungsbeispiel:

- Quadrat mit Zentrum $(3, 3)$ zum Ursprung verschieben
- Um -45° rotieren, skalieren, zurueckverschieben

Matrizen werden von rechts nach links angewendet!

FAQ 9: Was ist eine Pruefmatrix H?

Definition:
Ein Codewort $\vec{c}$ gehoert zum Code $\Leftrightarrow H \cdot \vec{c}^T = \vec{0}$
Eigenschaften:

- H hat r Zeilen (Anzahl Pruefbits)
- H hat n Spalten (Codelaenge)
- $\text{Rang}(H) = r = n - k$

Beispiel aus der Pruefung:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Test: Ist $\vec{c} = (1, 1, 0, 0, 1)$ ein Codewort?

$$H \cdot \vec{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Das Ergebnis $H \cdot \vec{c}^T$ heisst Syndrom – ungleich 0 bedeutet Fehler

FAQ 10: Wie findet man G aus H?

Systematische Form:
Wenn $H = [P|I_r]$ in systematischer Form, dann:

$$G = [I_k|P^T]$$

Beispiel:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [P|I_2]$$

Wobei $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, also:

$$G = [I_3|P^T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifikation: $H \cdot G^T = 0$ (muss Nullmatrix sein!)

G **kodiert** k **Informationsbits zu** n **Codebits:** $\vec{c} = \vec{m} \cdot G$

FAQ 11: Was bedeuten n, k, d?

Notation: $[n, k, d]$**-Code**

- $n =$ Codelaenge (Anzahl Bits pro Codewort)
- $k =$ Dimension (Anzahl Informationsbits)
- $d =$ Minimaldistanz (kleinster Hamming-Abstand)

Berechnung fuer das Beispiel:

- $n = 5$ (5 Spalten in H)
- $k = n - r = 5 - 2 = 3$ ($r =$ Rang von $H =$ Zeilenanzahl)
- $d =?$ (siehe naechste Folie)

Wichtige Zusammenhaenge:

- Fehler erkennen: $d - 1$ Fehler erkennbar
- Fehler korrigieren: $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ Fehler korrigierbar

---

Mehr Redundanz ($n - k$ **groesser) ermoeglicht bessere Fehlererkennung**

FAQ 12: Wie berechnet man d?

Methode 1: Minimales Hamming-Gewicht

$$d = \min\{w(\vec{c}) : \vec{c} \in C, \vec{c} \neq \vec{0}\}$$

wobei $w(\vec{c})$ = Anzahl der Einsen in $\vec{c}$
Methode 2: Linear abhaengige Spalten von H

$$d = \text{minimale Anzahl linear abhaengiger Spalten von } H$$

Beispiel:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Spalte 1 + Spalte 3 = Spalte 4: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? Nein!
- Keine 2 Spalten sind gleich $\Rightarrow d \geq 2$
- Spalten 1, 2, 4: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{Z}_2$

$\Rightarrow d = 3$, also $[5, 3, 3]$-Code

In $\mathbb{Z}_2$: Addition modulo 2, also $1 + 1 = 0$

FAQ 13: Was ist das Gram-Schmidt-Verfahren?

Ziel: Orthogonale Basis aus beliebiger Basis konstruieren
Algorithmus:

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 \\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \mathrm{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2) \\
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \mathrm{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_3) - \mathrm{proj}_{\vec{u}_2}(\vec{v}_3) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Projektion:

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u}$$

Schritt fuer Schritt:

1. Ersten Vektor uebernehmen: $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$
2. Projektionen berechnen und subtrahieren
3. Fuer jeden weiteren Vektor: alle bisherigen Projektionen abziehen

---

Fuer orthonormale Basis: jeden $\vec{u}_i$ noch normieren

FAQ 14: Wie berechnet man die Projektion?

Orthogonale Projektion von $\vec{v}$ auf $\vec{u}$:

$$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}$$

Beispielrechnung:
Sei $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 2, 3)^T$ und $\vec{v}_2 = (0, 1, 3, -4, -4)^T$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 + 1 + 3 - 8 - 12 = -16$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 1 + 1 + 1 + 4 + 9 = 16$$

$$\text{proj}_{\vec{v}_1}(\vec{v}_2) = \frac{-16}{16} \cdot \vec{v}_1 = -1 \cdot (1, 1, 1, 2, 3)^T = (-1, -1, -1, -2, -3)^T$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{\vec{v}_1}(\vec{v}_2) = (1, 2, 4, -2, -1)^T$$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i$

FAQ 15: Wie zeigt man, dass x in span{b1, b2, b3} liegt?

Methode 1: Lineares Gleichungssystem
Loese $\alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \alpha_3 \vec{b}_3 = \vec{x}$
Falls loesbar $\Rightarrow \vec{x} \in \text{span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$
Methode 2: Bei orthogonaler Basis (einfacher!)

$$\alpha_i = \frac{\vec{x} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i}$$

Falls $\vec{x} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \alpha_3 \vec{b}_3$ stimmt $\Rightarrow \vec{x}$ liegt im Span
Verifikation:

- Berechne alle α_i
- Setze ein: $\alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \alpha_3 \vec{b}_3$
- Vergleiche mit $\vec{x}$

Orthogonale Basis macht die Berechnung der Koeffizienten trivial!

FAQ 16: Warum ist eine orthogonale Basis praktisch?

Vorteil 1: Einfache Koeffizientenberechnung
Bei orthogonaler Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots\}$:

$$\alpha_i = \frac{\vec{x} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i}$$

Kein Gleichungssystem loesen noetig!
Vorteil 2: Unabhaengige Berechnungen
Jeder Koeffizient kann einzeln berechnet werden.
Beispiel aus der Pruefung:
$\vec{b}_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 2)^T$, $\vec{b}_2 = (3, -2, -1, -1, 1, 0)^T$, $\vec{b}_3 = (-2, -2, 0, 0, 2, 1)^T$
$\vec{x} = (-5, 5, 5, 5, 3, 7)^T$

$$\alpha_1 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} = \frac{-5 + 5 + 5 + 5 + 3 + 14}{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4} = \frac{27}{9} = 3$$

QR-Zerlegung basiert auf Gram-Schmidt und orthogonaler Basis

FAQ 17: Wie berechnet man Eigenwerte?

Charakteristisches Polynom:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Fuer 2×2 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

Beispiel aus der Pruefung:

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -21 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & -4.2 \\ -0.2 & -0.4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (0.4 - \lambda)(-0.4 - \lambda) - (-4.2)(-0.2)$$
$$= \lambda^2 - 0.16 - 0.84 = \lambda^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$$

Spur = Summe der Eigenwerte, Determinante = Produkt der Eigenwerte

FAQ 18: Wie berechnet man Eigenvektoren?

Methode: Loese $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$
Fuer $\lambda_1 = 1$:

$$A - I = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2-5 & -21 \\ -1 & -2-5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -21 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Gauss-Elimination: $-3v_1 - 21v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -7v_2$
Eigenvektor: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ (oder Vielfaches)
Fuer $\lambda_2 = -1$:

$$A + I = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -21 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$7v_1 - 21v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 3v_2$
Eigenvektor: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektoren sind bis auf skalare Vielfache eindeutig

FAQ 19: Wann ist eine Matrix diagonalisierbar?

Kriterium:
A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A hat n linear unabhaengige Eigenvektoren
Hinreichende Bedingungen:

- n verschiedene Eigenwerte $\Rightarrow$ diagonalisierbar
- Symmetrische Matrix ($A = A^T$) $\Rightarrow$ immer diagonalisierbar
- Algebraische $=$ Geometrische Vielfachheit fuer alle λ

Definitionen:

- Algebraische Vielfachheit: Wie oft ist λ Nullstelle des char. Polynoms?
- Geometrische Vielfachheit: $\dim(\ker(A - \lambda I))$

Beispiel: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ (verschieden)
$\Rightarrow$ Matrix ist diagonalisierbar

Nicht diagonalisierbar: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **hat nur** $\lambda = 1$ **mit geom. Vielf. 1**

FAQ 20: Wie findet man P und D?

Diagonalisierung: $A = PDP^{-1}$
Matrix P: Eigenvektoren als Spalten

$$P = [\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \dots | \vec{v}_n]$$

Matrix D: Eigenwerte auf der Diagonale (gleiche Reihenfolge!)

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$P = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifikation: $P^{-1}AP = D$ oder $AP = PD$

$$P^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Anwendung: $A^n = PD^nP^{-1}$ **– Matrixpotenzen sehr schnell berechnen!**

Viel Erfolg bei der Pruefung!

Die wichtigsten Formeln:

Kreuzprodukt	$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$
Pyramidenvolumen	$V = \frac{1}{3} A_{\text{Basis}} \cdot h$
Projektion	$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u}$
Eigenwerte	$\det(A - \lambda I) = 0$