Lineare Algebra Woche 2

Transformationen, Koordinaten und Vektorräume

Themen: Lineare Abbildungen, Homogene Koordinaten, Vektorräume

Übersicht

Teil I: Lineare Abbildungen

- Definition und Eigenschaften
- Matrixdarstellung
- Geometrische Interpretation

Teil II: Homogene Koordinaten

- Motivation und Definition
- Affine Transformationen
- Translation mittels Matrizen

Teil III: Vektorräume

- Unterräume
- Basis und Dimension
- Lineare Unabhängigkeit

Teil IV: Anwendungen

- Computergrafik
- Basiswechsel
- Koordinatensysteme

Grundlage zum Verständnis geometrischer Transformationen und abstrakter Räume

Teil I: Lineare Abbildungen

Definition
Eine Funktion $T : V \to W$ ist linear, wenn:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

Äquivalente Bedingung:
$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$ **Wichtige Eigenschaft:**

$T(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt immer

Beispiele

- Rotation (gegen Uhrzeigersinn): $T(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$
- Skalierung: $T(x, y) = (kx, ky)$
- Projektion: $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

Gegenbeispiele

- Translation: $T(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{b}$
- Affin: $T(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ (außer $\vec{b} = \vec{0}$)

Lineare Abbildungen erhalten Vektoraddition und Skalarmultiplikation

Lineare Abbildung: Konkretes Beispiel

Beispiel: $T(x, y) = (2x + y, x - y)$ **Linearität verifizieren:**
Sei $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (3, 1)$, $\alpha = 2$

Test Addition:
$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(4, 3)$
$= (2(4) + 3, 4 - 3) = (11, 1)$
$T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = (4, -1) + (7, 2)$

$= (11, 1)$ ✓

Test Skalierung:
$T(\alpha\vec{u}) = T(2, 4) = (8, -2)$
$\alpha T(\vec{u}) = 2(4, -1) = (8, -2)$ ✓

Matrixdarstellung:
Finde Spalten $[T(e_1)|T(e_2)]$:

- $T(1, 0) = (2, 1)$
- $T(0, 1) = (1, -1)$

Daher:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Verifikation:

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$T(3, 2) = (2(3) + 2, 3 - 2) = (8, 1)$ ✓

Konkrete Berechnungen verifizieren theoretische Eigenschaften

Matrixdarstellung

Fundamentalsatz
Jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kann durch eine $m \times n$ Matrix A dargestellt werden:

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

Konstruktion

Matrixspalten sind Bilder der Basisvektoren:

$$A = [T(\vec{e}_1)|T(\vec{e}_2)|\cdots|T(\vec{e}_n)]$$

Beispiel: Rotation um θ

$T(\vec{e}_1) = (\cos\theta, \sin\theta)^T$
$T(\vec{e}_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)^T$

Häufige Transformationsmatrizen

Rotation (gegen Uhrzeigersinn):

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Skalierung:

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

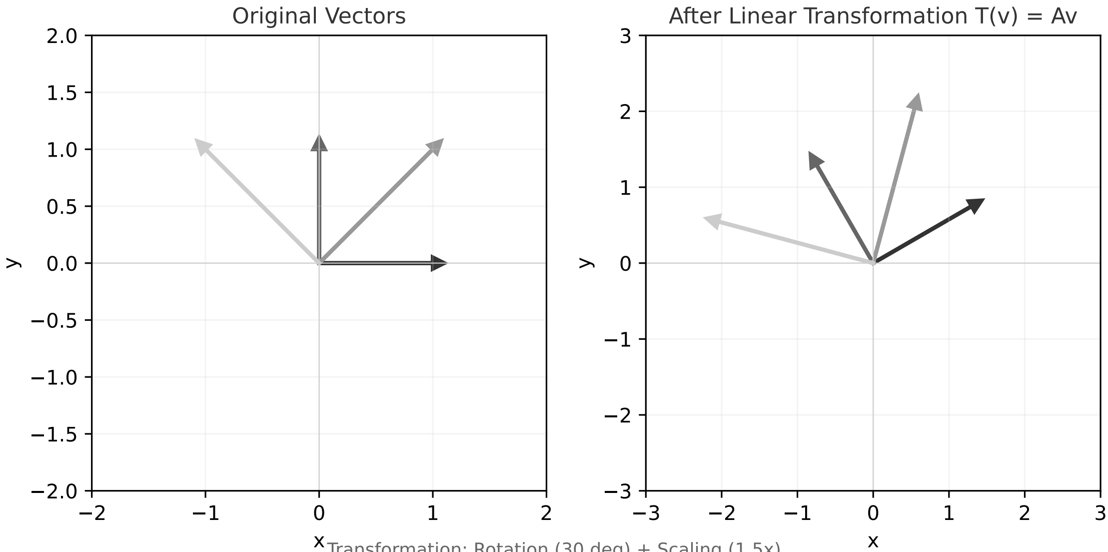
Spiegelung (an x-Achse):

$$F_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

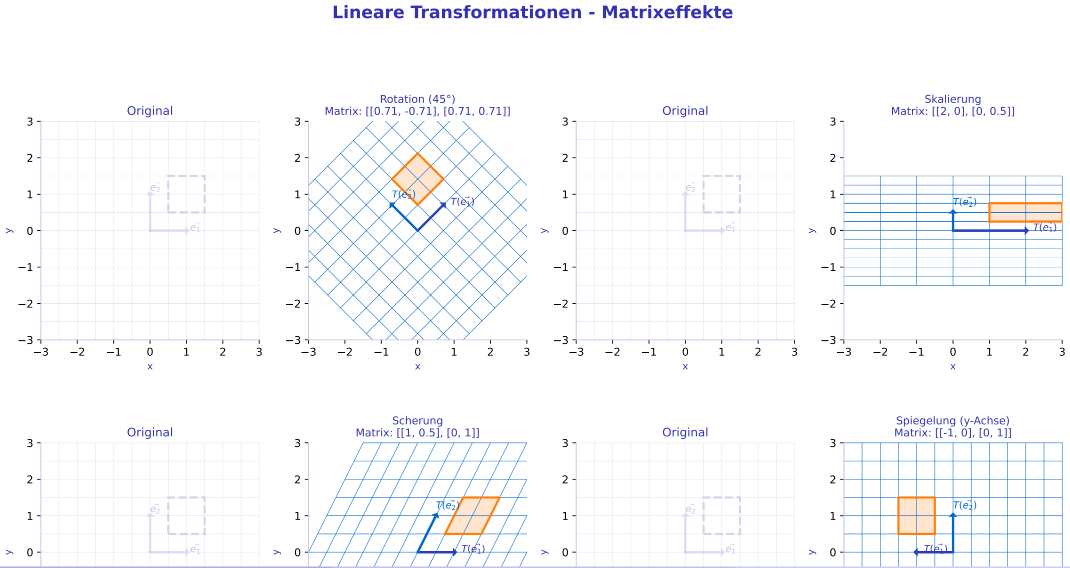
Scherung:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrixdarstellung ermöglicht rechnerische Implementierung von Transformationen



Transformation: Rotation (30 deg) + Scaling (1.5x)


Lineare Transformationen - Matrixeffekte
Original
Rotation (45°)
Matrix: [[0.71, -0.71], [0.71, 0.71]]
Original
Skalierung
Matrix: [[2, 0], [0, 0.5]]
Original
Scherung
Matrix: [[1, 0.5], [0, 1]]
Original
Spiegelung (y-Achse)
Matrix: [[-1, 0], [0, 1]]
T(e1)
T(e2)
x
y

Teil II: Homogene Koordinaten

Homogene Koordinaten: Motivation

Problem mit Translationen
Translation ist nicht linear:

$$T(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{b}, \quad \vec{b} = (a, b)^T$$

Kann nicht als 2×2 Matrixmultiplikation dargestellt werden **Lösung: Dimension hinzufügen**

Einbettung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$:

$$(x, y) \mapsto (x, y, 1)$$

Nun wird Translation linear:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Homogene Darstellung
Punkt (x, y) dargestellt als (wx, wy, w) für jedes $w \neq 0$
Umrechnungsregeln:

- $(x, y, w) \to (x/w, y/w)$ falls $w \neq 0$
- $(x, y, 0)$ repräsentiert "Punkt im Unendlichen"
- Alle (kx, ky, kw) repräsentieren denselben Punkt

Vorteile:

- Vereinheitlicht alle affinen Transformationen
- Vereinfacht Transformationskomposition
- Natürlich für projektive Geometrie

Homogene Koordinaten linearisieren affine Transformationen

Translationsbeispiel mit homogenen Koordinaten

Problem: Verschiebe Punkt $(3,4)$ **um Vektor** $(2,1)$

Standardansatz (nicht linear):
$(3,4)+(2,1)=(5,5)$

Homogener Ansatz:
1. Einbettung in $\mathbb{R}^3$: $(3,4) \to (3,4,1)$ 2.

Transformationsmatrix anwenden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Zurückkonvertieren: $(5,5,1) \to (5,5)$ ✓

Kompositionsbeispiel:
Rotiere 45° dann verschiebe um $(2,1)$:

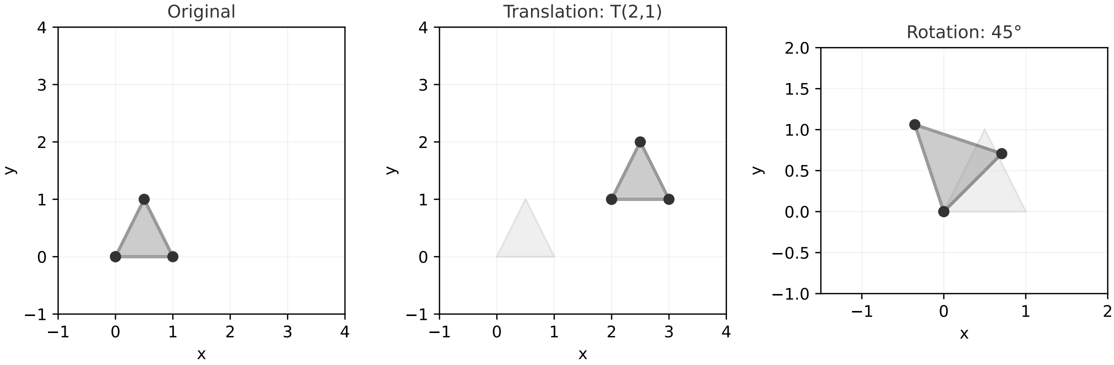
$$T_2 \circ T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

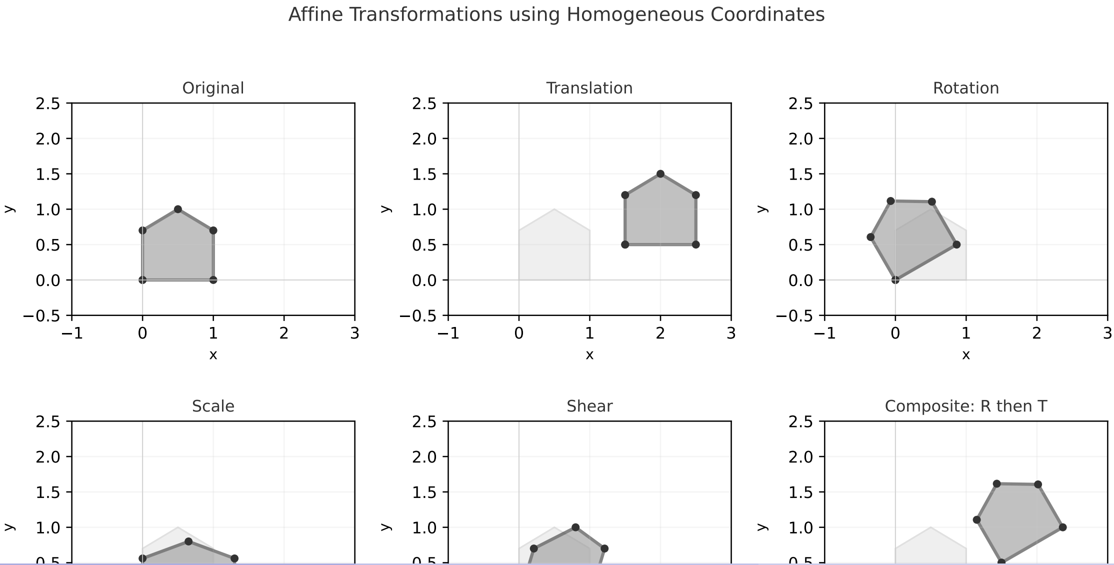
Eine Matrix führt beide Operationen aus!

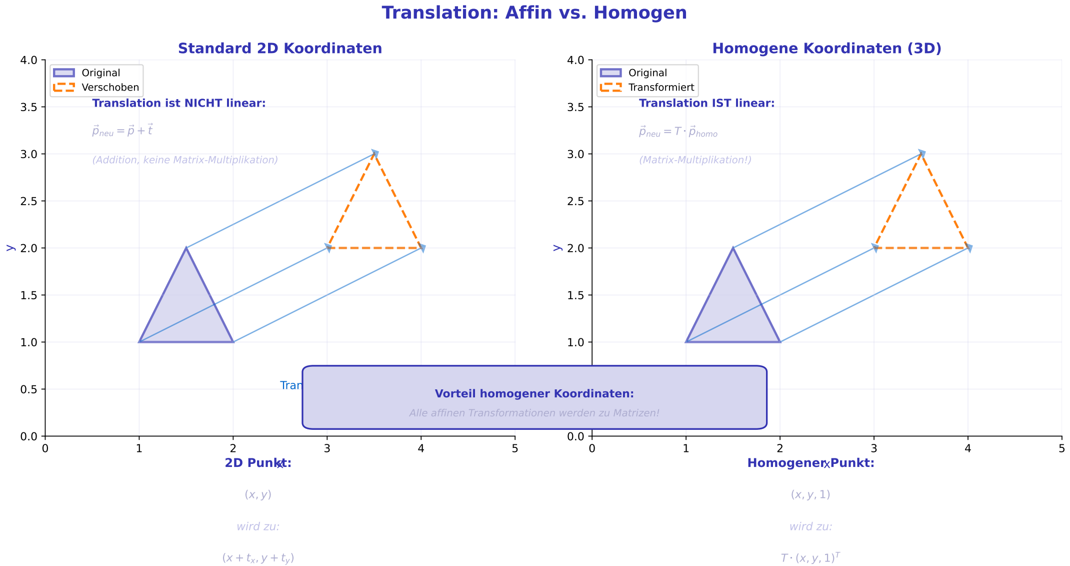
Matrixmultiplikation komponiert Transformationen elegant

Affine Transformationen in der Praxis



Homogene Koordinaten ermöglichen Matrixdarstellung aller starren Bewegungen


Affine Transformations using Homogeneous Coordinates
Original
Translation
Rotation
Scale
Shear
Composite: R then T
x
y
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1
0
1
2
3


Translation: Affin vs. Homogen
Standard 2D Koordinaten
Original
Verschoben
Translation ist NICHT linear:
$\vec{p}_{neu} = \vec{p} + \vec{t}$
(Addition, keine Matrix-Multiplikation)
Homogene Koordinaten (3D)
Original
Transformiert
Translation IST linear:
$\vec{p}_{neu} = T \cdot \vec{p}_{homo}$
(Matrix-Multiplikation!)
x
y
Vorteil homogener Koordinaten:
Alle affinen Transformationen werden zu Matrizen!
2D Punkt:
(x, y)
wird zu:
$(x + t_x, y + t_y)$
Homogener Punkt:
$(x, y, 1)$
wird zu:
$T \cdot (x, y, 1)^T$

Teil III: Vektorräume

Definition eines Unterraums
$W \subseteq V$ ist ein Unterraum, wenn:

1. $\vec{0} \in W$ (enthält Nullvektor)
2. $\vec{u}, \vec{v} \in W \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W$ (abgeschlossen unter Addition)
3. $\vec{v} \in W, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\vec{v} \in W$ (abgeschlossen unter Skalierung)

Beispiele in $\mathbb{R}^3$:

- Geraden durch den Ursprung
- Ebenen durch den Ursprung
- $\{\vec{0}\}$ und $\mathbb{R}^3$ selbst

Gegenbeispiele:

- Geraden nicht durch den Ursprung
- Ebenen nicht durch den Ursprung
- Diskrete Punktmengen
- Vereinigungen, die nicht abgeschlossen sind

Wichtige Unterräume:

- Nullraum: $N(A) = \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{0}\}$
- Spaltenraum: $C(A) = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$
- Zeilenraum: $R(A) = C(A^T)$

Unterräume sind Vektorräume innerhalb größerer Vektorräume

Unterraumverifikation: Beispiel

Beispiel: Ist Ebene $P : 2x + y - z = 0$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Test 1: Enthält die Null?

$(0, 0, 0)$: $2(0) + 0 - 0 = 0$ ✓

Test 2: Abgeschlossen unter Addition?
Sei $\vec{u} = (1, -2, 0) \in P$: $2(1) + (-2) - 0 = 0$ ✓
Sei $\vec{v} = (0, 1, 1) \in P$: $2(0) + 1 - 1 = 0$ ✓
$\vec{u} + \vec{v} = (1, -1, 1)$: $2(1) + (-1) - 1 = 0$ ✓

Test 3: Abgeschlossen unter Skalierung?
Für jedes $\vec{v} = (x, y, z) \in P$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:
$2(\alpha x) + \alpha y - \alpha z = \alpha(2x + y - z) = \alpha(0) = 0$ ✓

Gegenbeispiel: Gerade $L : x = 1, y = t, z = 0$ Dies ist

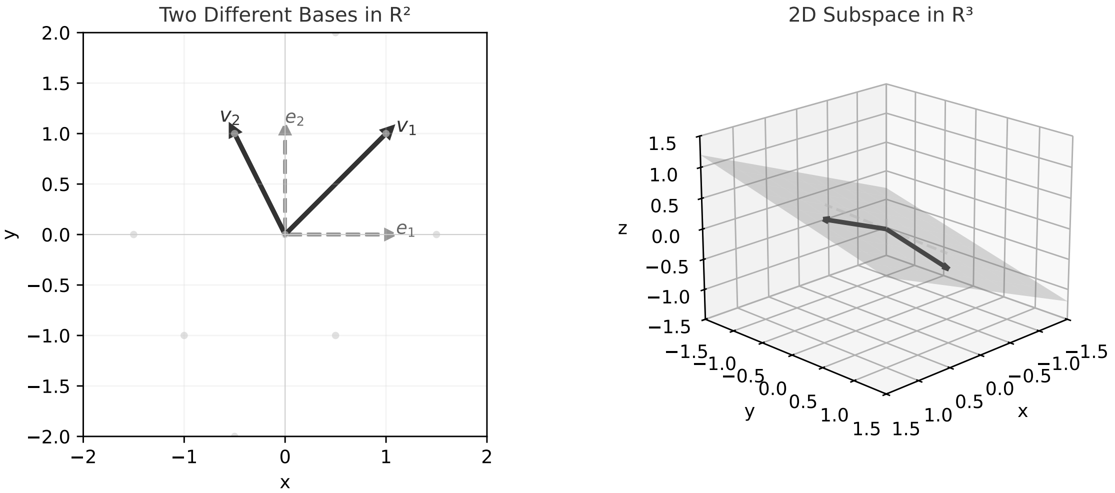
eine vertikale Gerade im 3D-Raum. **Test 1: Enthält die**

Null?
$(0, 0, 0) \notin L$ da $x = 1 \neq 0$ $\times$ Gerade scheitert am ersten

Test, also kein Unterraum! **Wichtige Erkenntnis:**

Geometrische Objekte durch den Ursprung sind potenzielle Unterräume; solche nicht durch den Ursprung niemals.

Systematisches Testen verifiziert Unterraumeigenschaften



Basis liefert eindeutige Koordinatendarstellung für jeden Vektor

Lineare Unabhängigkeit
Vektoren $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ sind unabhängig, wenn:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

impliziert $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ **Test auf Unabhängigkeit:**

- Bilde Matrix $A = [\vec{v}_1 | \cdots | \vec{v}_k]$
- Vektoren unabhängig $\Leftrightarrow N(A) = \{\vec{0}\}$
- Für quadratische Matrizen: $\det(A) \neq 0$

Span
Alle Linearkombinationen:

$$\text{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i : \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Eigenschaften:

- Span ist immer ein Unterraum
- Minimale spannende Menge = Basis
- $\dim(\text{span}) \leq$ Anzahl der Vektoren

Rang einer Matrix:
$\text{rang}(A) = \dim(\text{Spaltenraum})$

Unabhängigkeit sichert Eindeutigkeit; Span sichert Existenz von Darstellungen

Teste auf Unabhängigkeit:
$\vec{v}_1 = (1,2,0)^T$, $\vec{v}_2 = (0,1,1)^T$, $\vec{v}_3 = (1,0,1)^T$

Methode 1: Determinantentest
Bilde Matrix $A = [\vec{v}_1|\vec{v}_2|\vec{v}_3]$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Berechne Determinante:

$\det(A) = 1(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) - 0 + 1(2 \cdot 1 - 1 \cdot 0)$
$= 1(1) + 1(2) = 3 \neq 0$ ✓ Vektoren sind linear

unabhängig!

Methode 2: Löse $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$
Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aus (1): $\alpha_3 = -\alpha_1$

Aus (3): $\alpha_2 = -\alpha_3 = \alpha_1$
In (2): $2\alpha_1 + \alpha_1 = 3\alpha_1 = 0$
Daher: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ✓

Beide Methoden bestätigen lineare Unabhängigkeit

Teil IV: Anwendungen

Anwendungen: Computergrafik

3D-Grafik-Pipeline

1. Modellkoordinaten
2. Welttransformation
3. Ansichtstransformation
4. Projektionstransformation
5. Bildschirmkoordinaten

Homogene Koordinaten in 3D:

$$(x, y, z) \to (x, y, z, 1)$$

4×4 Matrizen für alle Transformationen

Häufige Operationen:

- Modellanimation: $T(t) \cdot R(t) \cdot S$
- Kamerabewegung: V^{-1} Matrix
- Perspektive: Division durch w
- Clipping: Test in homogen

Vorteile:

- Einheitliches Framework für alle Transformationen
- Hardware-Optimierung (GPU)
- Effiziente Komposition

Moderne Grafik-APIs verwenden 4×4 Matrizen für alle räumlichen Transformationen

Problemstellung:
Gegeben: Vektor $\vec{v}$ in Basis $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$
Gesucht: Koordinaten in Basis $B' = \{\vec{b}'_1, \ldots, \vec{b}'_n\}$
Basiswechselmatrix:

Falls $P = [\vec{b}'_1 | \cdots | \vec{b}'_n]$, dann:
$[\vec{v}]_{B'} = P^{-1}[\vec{v}]_{\text{standard}}$ Für Basis zu Basis:

$[\vec{v}]_{B'} = P_{B'}^{-1} P_B [\vec{v}]_B$ **Spezialfall:**

Standardbasis zu neuer Basis:
$[\vec{v}]_B = B^{-1}\vec{v}$

Anwendungen:

- Hauptkomponentenanalyse
- Diagonalisierung von Matrizen
- Fourier-Transformation
- Koordinatensystem-Rotation

Matrixähnlichkeit:
$A' = P^{-1}AP$
Gleiche Transformation, andere Basis **Eigenzerlegung:**

Wähle Basis aus Eigenvektoren:
A wird diagonal

Basiswechsel offenbart intrinsische Struktur linearer Transformationen

Basiswechsel: Konkretes Beispiel

Problem: Drücke $\vec{v} = (4, 3)$ in rotierter Basis aus
Standardbasis: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$
Neue Basis (45° Rotation): $B' = \{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2\}$ wobei:

$\vec{b}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$, $\vec{b}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$

Schritt 1: Bilde Basiswechselmatrix

$$P = [\vec{b}'_1 | \vec{b}'_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Schritt 2: Finde Inverse

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

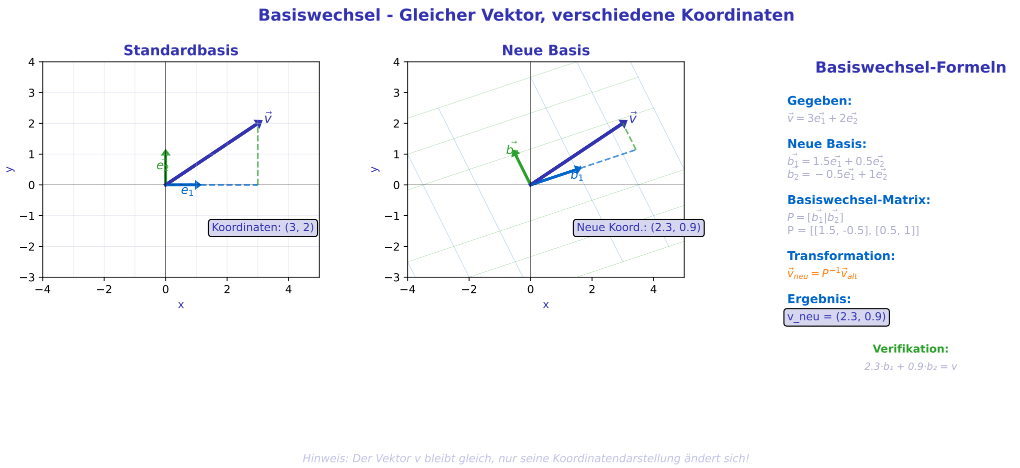
Schritt 3: Transformiere Koordinaten

$$[\vec{v}]_{B'} = P^{-1}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Verifikation:
$\frac{7}{\sqrt{2}}\vec{b}'_1 + \frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{b}'_2$
$= \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T + \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$
$= \frac{7}{2}(1, 1)^T + \frac{-1}{2}(-1, 1)^T = (4, 3)^T$ ✓

Basiswechsel ist Koordinatenneuinterpretation



Gleicher Vektor, verschiedene Koordinatendarstellungen in unterschiedlichen Basissystemen

Woche 2 Zusammenfassung

Lineare Abbildungen

- Erhalten Linearkombinationen
- Dargestellt durch Matrizen
- Geometrische Operationen

Homogene Koordinaten

- Linearisieren affine Transformationen
- Fügen eine Dimension hinzu
- Vereinheitlichen Transformationsframework

Vektorräume

- Unterräume sind abgeschlossene Mengen
- Basis liefert Koordinaten
- Dimension ist invariant

Schlüsselanwendungen

- Computergrafik-Pipeline
- Datenanalyse (PCA)
- Lösung linearer Systeme

Anhang: Kurzreferenz und Rechenwerkzeuge

Matrixoperationen

- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\mathrm{spur}(A+B) = \mathrm{spur}(A) + \mathrm{spur}(B)$

2D-Transformationskatalog

- Rotation: $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
- Skalierung: $S_{sx,sy} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$
- Scherung: $H_k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Unterraum-Test Checkliste

1. Enthält Nullvektor?
2. Abgeschlossen unter Addition?
3. Abgeschlossen unter Skalarmultiplikation?

Unabhängigkeitstest

1. Bilde Matrix aus Vektoren
2. Berechne Determinante (falls quadratisch)
3. Oder: Reduziere auf Zeilenstufenform
4. Prüfe auf Pivot in jeder Spalte

Wichtige Formeln und Verfahren auf einen Blick

Anhang B: Häufige Fehler

Warum Translation nicht linear ist
Beweis: $T(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$
$T(\vec{0}) = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b} \neq \vec{0}$ $\times$

Unterraum-Fehler

- Null vergessen: Kugeloberfläche
- Nicht abgeschlossen: nur erster Quadrant
- Vereinigungsfehler: Vereinigung zweier Geraden durch Ursprung (außer gleiche Gerade)

Unabhängigkeit $\neq$ Orthogonalität
$(1, 1)$ und $(1, 0)$ sind unabhängig aber nicht orthogonal

Dimensionsverwirrung

- Nullraumdimension + Rang $= n$
- Basis muss genau $\dim(V)$ Vektoren haben
- Mehr Vektoren als Dimension $\Rightarrow$ abhängig

Matrix-Multiplikationsreihenfolge
$AB \neq BA$ im Allgemeinen
Transformationen wirken von rechts nach links:
$T_2(T_1(\vec{x})) = T_2 \circ T_1 = M_2 M_1 \vec{x}$

Homogene Koordinatenfehler
$(2, 4, 2)$ und $(1, 2, 1)$ repräsentieren denselben Punkt!
Immer normalisieren beim Vergleichen

Häufige Fehler in der linearen Algebra vermeiden

Schnelle 2×2 Determinante

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Merkregel: Hauptdiagonale minus Nebendiagonale

Schnelle 3×3 Determinante (Regel von Sarrus)

Kopiere erste zwei Spalten nach rechts:

$$\begin{matrix} a & b & c & | & a & b \\ d & e & f & | & d & e \\ g & h & i & | & g & h \end{matrix}$$

Addiere Produkte der Diagonalen nach rechts, subtrahiere Produkte nach links

Inverse einer 2×2 Matrix

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Tausche Diagonale, negiere Nebendiagonale

Gram-Schmidt-Orthogonalisierung

Gegeben $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, erzeuge orthonormal:

1. $\vec{u}_1 = \vec{v}_1/||\vec{v}_1||$
2. $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1$
3. $\vec{u}_2 = \vec{w}_2/||\vec{w}_2||$

Projektionsformel

Projiziere $\vec{v}$ auf $\vec{u}$:

$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{||\vec{u}||^2}\vec{u}$

Kreuzprodukt-Merkregel

$\vec{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \vec{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \vec{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$

Merke: $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ Muster mit Determinante

Effiziente Berechnungstechniken für häufige Operationen

Anhang D: Matrixmultiplikation - Einfache Beispiele

Beispiel 1: 2×2 Multiplikation
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Schritt für Schritt:
$(AB)_{11} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$
$(AB)_{12} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$
$(AB)_{21} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$
$(AB)_{22} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

Beispiel 2: Einheitsmatrix
$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Eigenschaft: $IA = AI = A$ immer!

Verifikation:
$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \checkmark$

Beispiel 3: Nullmatrix
$0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$ für alle Matrizen

Matrixmultiplikation: Zeile mal Spalte, Element für Element

Aufgabe 1: Rotation um 90°
Rotiere $\vec{v} = (1, 0)$ um 90° gegen Uhrzeigersinn:

$$R_{90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{90}\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resultat: $(1, 0) \to (0, 1)$ ✓

Aufgabe 2: Skalierung
Skaliere $\vec{v} = (3, 2)$ mit Faktor 2 in x, 3 in y:

$$S\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3: Spiegelung an y-Achse
Spiegle $\vec{v} = (4, 3)$:

$$F_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_y\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4: Komposition
Erst rotiere 90°, dann skaliere mit 2:

$$S \cdot R_{90} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Teste mit $(1, 0)$: $(1, 0) \to (0, 1) \to (0, 2)$ ✓

Transformationen komponieren durch Matrixmultiplikation

Anhang F: Unterraum-Schnelltests

Test 1: Gerade durch Ursprung
$L = \{t(1,2,3) : t \in \mathbb{R}\}$

1. Nullvektor? $t = 0 \Rightarrow (0,0,0) \in L$ ✓
2. Addition? $t_1\vec{v} + t_2\vec{v} = (t_1 + t_2)\vec{v} \in L$ ✓
3. Skalierung? $\alpha(t\vec{v}) = (\alpha t)\vec{v} \in L$ ✓

Ergebnis: Unterraum! ✓

Test 2: Ebene nicht durch Ursprung
$P = \{(x,y,z) : x + y + z = 1\}$

1. Nullvektor? $0 + 0 + 0 = 0 \neq 1$ $\times$

Ergebnis: Kein Unterraum! $\times$

Test 3: Erster Quadrant
$Q = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$

1. Nullvektor? $(0,0) \in Q$ ✓
2. Addition? $(1,1) + (1,1) = (2,2) \in Q$ ✓
3. Skalierung? $-1 \cdot (1,1) = (-1,-1) \notin Q$ $\times$

Ergebnis: Kein Unterraum! $\times$

Test 4: Lösungsraum
$N = \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{0}\}$ für beliebige Matrix A
Immer ein Unterraum! (Nullraum) ✓

Merke: Durch Ursprung ist notwendig aber nicht hinreichend!

Anhang G: Basis und Span - Beispiele

Beispiel 1: Span in $\mathbb{R}^2$
$\vec{v}_1 = (1, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, 1)$
$\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = ?$

Teste lineare Unabhängigkeit:
$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$ ✓

$\Rightarrow \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \mathbb{R}^2$ (ganze Ebene!)

Beispiel 2: Basis für $\mathbb{R}^3$?
$\vec{b}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{b}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{b}_3 = (1, 1, 1)$
Determinante $= 1 \neq 0 \Rightarrow$ Basis! ✓

Beispiel 3: Standardbasis transformieren
Drücke $(5, 3)$ in Basis $B = \{(2, 1), (1, 2)\}$ aus:

Löse: $\alpha_1(2, 1) + \alpha_2(1, 2) = (5, 3)$
$2\alpha_1 + \alpha_2 = 5$
$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3$

Aus zweiter: $\alpha_1 = 3 - 2\alpha_2$
In erste: $2(3 - 2\alpha_2) + \alpha_2 = 5$
$6 - 4\alpha_2 + \alpha_2 = 5$
$\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_1 = 7/3$

$[(5, 3)]_B = (7/3, 1/3)$ ✓

Basis ermöglicht eindeutige Koordinatendarstellung

Übung 1: Konvertierung
Kartesisch $\to$ Homogen:
$(3,4) \to (3,4,1)$ oder $(6,8,2)$ oder $(9,12,3)$...

Homogen $\to$ Kartesisch:
$(6,8,2) \to (6/2, 8/2) = (3,4)$ ✓
$(15,20,5) \to (15/5, 20/5) = (3,4)$ ✓

Übung 2: Äquivalente Punkte
Welche repräsentieren denselben Punkt?
A: $(2,3,1)$, B: $(4,6,2)$, C: $(6,9,3)$, D: $(1,2,1)$

A,B,C sind gleich: $(2,3)$ ✓
D ist anders: $(1,2)$ $\times$

Übung 3: Komposition
Rotiere 45°, dann verschiebe um $(1,2)$:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Komposition: $T \cdot R =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teste mit $(1,0,1)$:
Ergebnis: $(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2} + 2, 1)$ ✓

Homogene Koordinaten vereinfachen Transformationskomposition