# Lineare Algebra Woche 1

## Geometrische Grundlagen

Themen: Vektoren, Produkte, Geraden, Ebenen, Abstände und Winkel

# Übersicht

**Teil I: Vektor-Grundlagen**

- Vektordefinition und Notation
- Addition und Skalarmultiplikation
- Betrag und Einheitsvektoren

**Teil II: Produkte**

- Skalarprodukt
- Kreuzprodukt (Vektorprodukt)
- Geometrische Interpretationen
- Anwendungen

**Teil III: Geraden und Ebenen**

- Parameterdarstellung
- Normalenform
- Koordinatenform
- Schnittprobleme

**Teil IV: Messungen**

- Abstände zwischen Objekten
- Winkel zwischen Objekten
- Projektionen
- Praktische Anwendungen

---

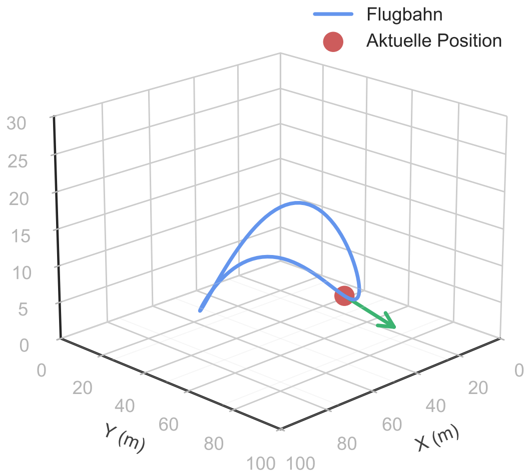
**Grundlage zum Verständnis geometrischer Beziehungen im Raum**

# Warum Lineare Algebra?

**Anwendungen in der Praxis**

- GPS-Navigation: Position im 3D-Raum
- Computergrafik: 3D-Spiele, Filme
- Maschinelles Lernen: Neuronale Netze
- Ingenieurwesen: Statik, Dynamik
- Wirtschaft: Optimierungsprobleme
- Robotik: Bewegungsplanung

**Kernfrage:**
Wie beschreiben wir mathematisch Bewegung und Beziehungen im Raum?




Beispiel: Drohnennavigation erfordert Vektorberechnungen für Position,

# Teil I: Vektoren und Operationen

**Definition**

Ein Vektor ist eine gerichtete Größe mit:

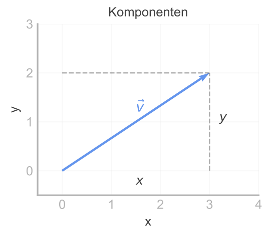
- Betrag (Länge)
- Richtung
- Keinem festen Anfangspunkt

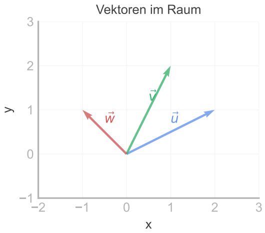
**Notation**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

**Interpretation**

- $x$: Komponente in x-Richtung
- $y$: Komponente in y-Richtung
- $z$: Komponente in z-Richtung




**Beispiel:**

GPS-Verschiebung von $(0, 0, 0)$ nach $(100, 50, 10)$ ist

Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$

**Vektoren repräsentieren Verschiebung, Geschwindigkeit, Kraft und andere gerichtete Größen**

# Vektoroperationen

**Addition**

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$$

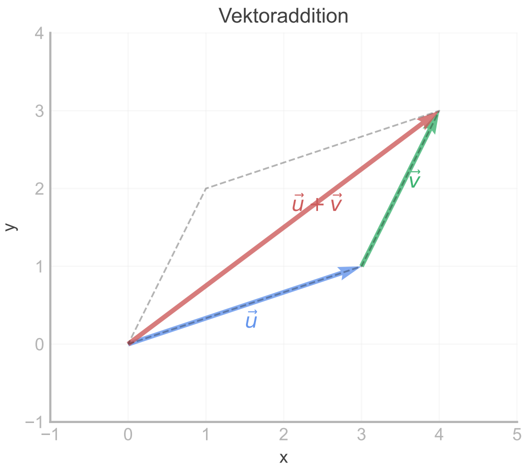
Beispiel: Kräfte oder Verschiebungen kombinieren
**Skalarmultiplikation**

$$k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \\ k \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Geschwindigkeit oder Kraft skalieren **Betrag**

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Beispiel: Abstandsberechnung




**Eigenschaften:**

- Kommutativ: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

**Beispiel: Kräfte auf einen Körper**

Kraft 1: $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ N

Kraft 2: $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ N **Gesamtkraft:**

$$\vec{F}_{ges} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Betrag der Gesamtkraft:**

$$|\vec{F}_{ges}| = \sqrt{4 + 36 + 1} = \sqrt{41} \approx 6.4 \text{ N}$$

**Einheitsvektor berechnen**

Richtung der Gesamtkraft:

$$\vec{e}_F = \frac{\vec{F}_{ges}}{|\vec{F}_{ges}|} = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Verifikation:**

$$|\vec{e}_F| = \frac{1}{\sqrt{41}} \sqrt{4 + 36 + 1} = 1$$

**Verdopplung der ersten Kraft:**

$$2\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Praktische Berechnungen mit Vektoren in der Mechanik**

# Teil II: Produkte von Vektoren

# Das Skalarprodukt - Ausrichtung messen

**Definition**

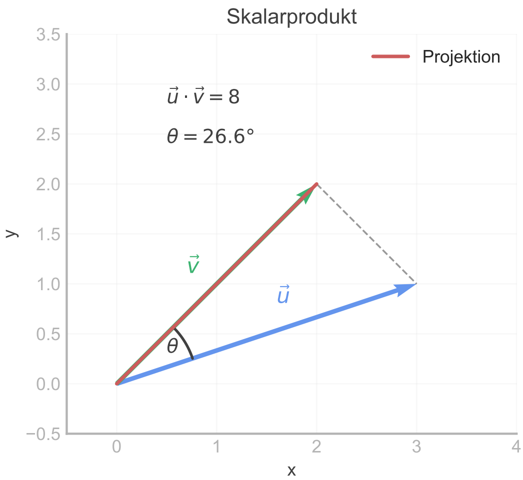
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

**Geometrische Formel**

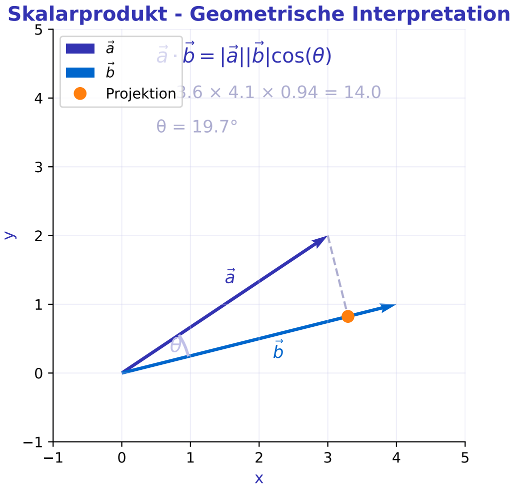
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\theta)$$

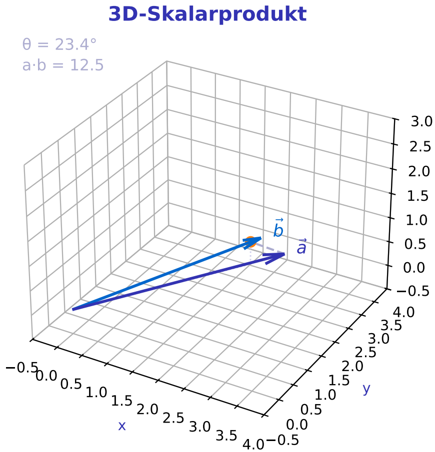
**Schlüsseleigenschaften:**

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
- Kommutativ: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$




**Anwendungen:**



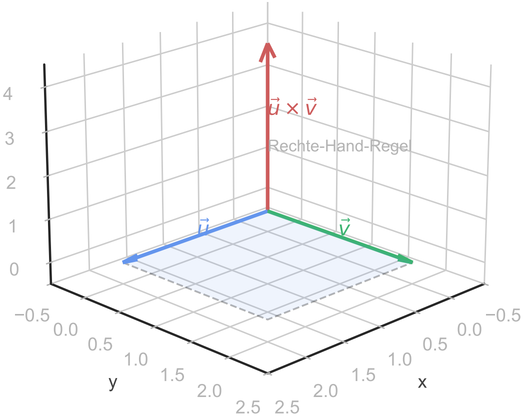

**Links: 2D Visualisierung mit Projektion und Winkel. Rechts: 3D Darstellung der gleichen Konzepte**

**Definition**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

**Eigenschaften:**

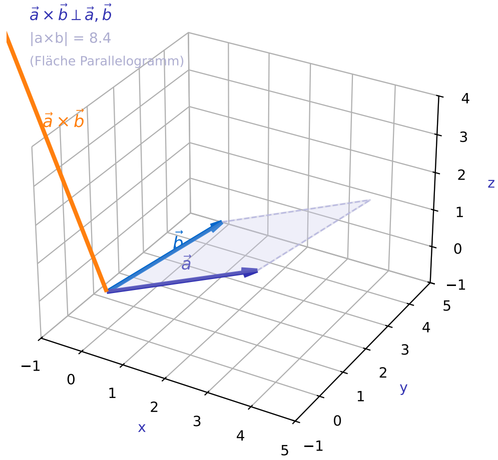
- $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ und $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$
- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$
- Antikommutativ: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- Rechte-Hand-Regel bestimmt Richtung



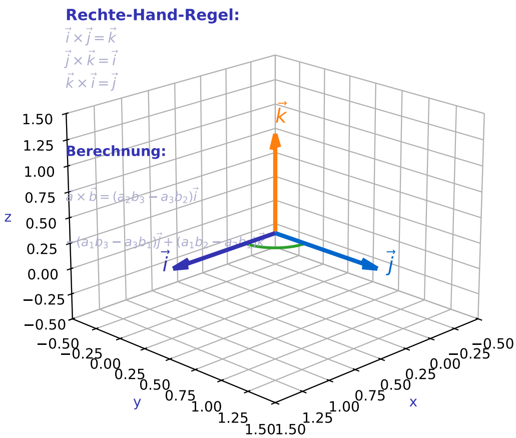

**Anwendungen:**

# Kreuzprodukt - Visualisierung und Rechte-Hand-Regel

## Kreuzprodukt - Geometrische Darstellung




## Rechte-Hand-Regel




**Links: Parallelogramm-Fläche und Senkrechte. Rechts: Rechte-Hand-Regel mit Basisvektoren**

# Produkte: Konkretes Beispiel

**Gegeben:** $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **Skalarprodukt:**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 4$$

**Winkel zwischen Vektoren:**

$$|\vec{u}| = \sqrt{5}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{6}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{30}} \approx 0.73$$

$$\theta \approx 42.3$$

**Kreuzprodukt:**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Verifikation der Orthogonalität:**

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 2 - 2 + 0 = 0$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 1 - 4 + 3 = 0$$

**Parallelogrammfläche:**

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

**Beide Produkte haben unterschiedliche geometrische Bedeutungen**

# Teil III: Geraden und Ebenen

# Geraden im Raum

**Parameterform**

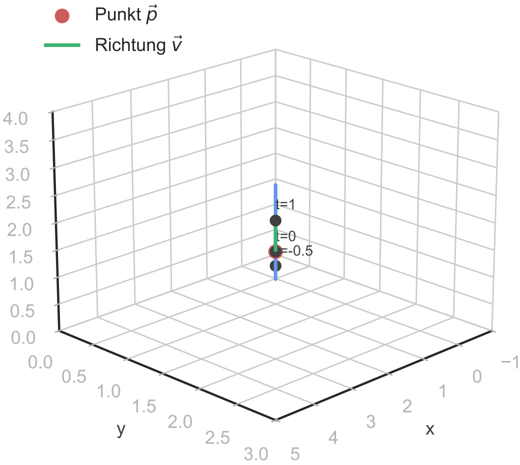
$$g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

**Komponenten:**

- $\vec{p}$: Stützvektor (beliebiger Punkt auf Gerade)
- $\vec{v}$: Richtungsvektor
- $t$: Parameter (kann Zeit sein)

**Zweipunkteform:**
Gerade durch $A$ und $B$:

$$\vec{x} = \vec{A} + t(\vec{B} - \vec{A})$$




**Beispiel:**

**1. Parameterform**

$$E : \vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}$$

Zwei Parameter, zwei Richtungsvektoren **2.**

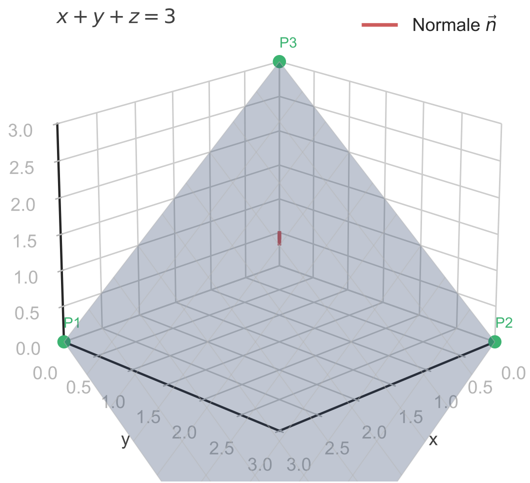
**Normalenform**

$$E : \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$$

Normalenvektor senkrecht zur Ebene **3. Koordinatenform**

$$E : ax + by + cz = d$$

wobei $(a, b, c) = \vec{n}$ und $d = \vec{n} \cdot \vec{p}$




**Umrechnung:**

**Aufgabe: Ebene durch drei Punkte**
$A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ **Schritt 1:**

**Richtungsvektoren**

$$\vec{u} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2: Normalenvektor**

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Schritt 3: Koordinatenform**
Mit $\vec{n} = (1,1,1)$ und Punkt $A(1,0,0)$:

$$d = \vec{n} \cdot \vec{A} = 1 + 0 + 0 = 1$$

**Ebenengleichung:**

$$E : x + y + z = 1$$

**Verifikation:**

$A : 1 + 0 + 0 = 1$
$B : 0 + 1 + 0 = 1$
$C : 0 + 0 + 1 = 1$

**Von drei Punkten zur Ebenengleichung in Koordinatenform**

# Teil IV: Abstände und Winkel

**Punkt zu Punkt**

$$d(P, Q) = |\vec{Q} - \vec{P}|$$

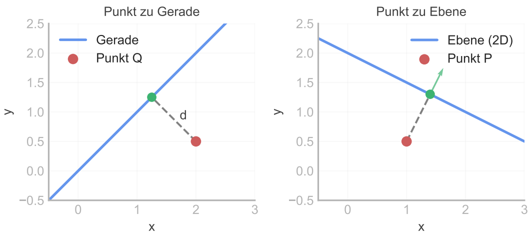
**Punkt zu Gerade**

$$d(Q, g) = \frac{|(\vec{Q} - \vec{P}) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

wobei $\vec{P}$ auf Gerade mit Richtung $\vec{v}$ **Punkt zu Ebene**

$$d(Q, E) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{Q} - d|}{|\vec{n}|}$$

für Ebene $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$

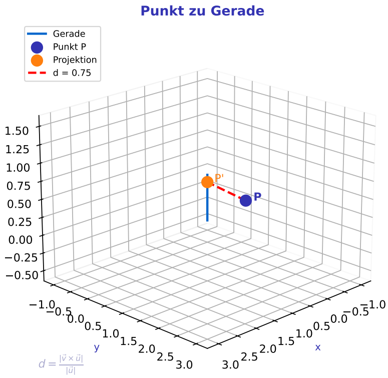


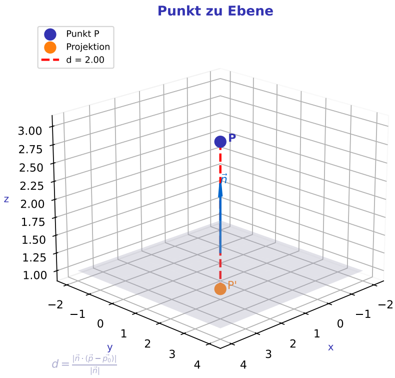

**Windschiefe Geraden**

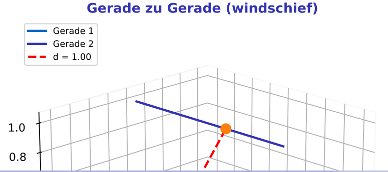
Für Geraden $g_1 : \vec{p}_1 + t\vec{v}_1$ und $g_2 : \vec{p}_2 + s\vec{v}_2$:

$$d = \frac{|(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$$

**Abstandsformeln nutzen Kombinationen von Skalar- und Kreuzprodukt**




## Abstandsformeln - Zusammenfassung

**Punkt zu Punkt:**

$d = |\vec{p_2} - \vec{p_1}|$

**Punkt zu Gerade:**

### Zwischen Vektoren

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

### Zwischen Geraden

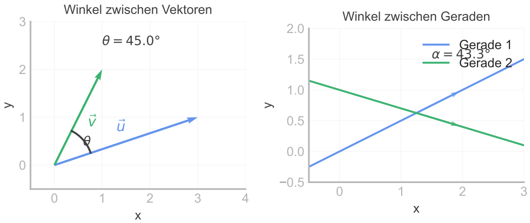
Nutze Richtungsvektoren:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|}$$

### Zwischen Ebenen

Nutze Normalenvektoren:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$




### Gerade zu Ebene

Winkel $\alpha$ zwischen Gerade (Richtung $\vec{v}$) und Ebene (Normale $\vec{n}$):

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}$$

Hinweis: Wir nutzen Sinus, da $\vec{v}$ und $\vec{n}$ senkrecht sind, wenn die Gerade parallel zur Ebene ist

**Winkel werden mit dem Skalarprodukt und Einheitsvektoren berechnet**

**Vektor auf Vektor**
Projektion von $\vec{u}$ auf $\vec{v}$:

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$$

**Punkt auf Gerade**

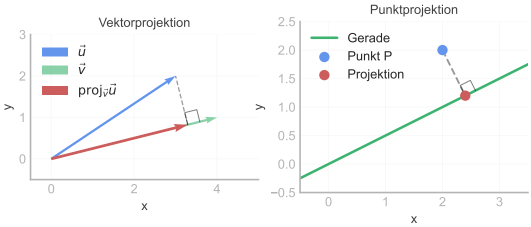
Nächster Punkt auf Gerade $\vec{p} + t\vec{v}$ zu Punkt $Q$:

$$P = \vec{p} + \frac{(\vec{Q} - \vec{p}) \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$$

**Punkt auf Ebene**

Projektion von $Q$ auf Ebene mit Normale $\vec{n}$ durch $\vec{p}$:

$$P = \vec{Q} - \frac{(\vec{Q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$




**Anwendungen:**

- Schattenberechnungen
- Probleme des nächsten Punktes
- Komponentenanalyse
- Arbeitsberechnungen in Physik
- Optimierungsprobleme

**Projektionen zerlegen Vektoren in parallele und senkrechte Komponenten**

# Anwendungen in der Praxis

**Computergrafik**

- Ray Tracing: Geraden-Ebenen-Schnitte
- Oberflächennormalen: Kreuzprodukte
- Beleuchtung: Skalarprodukt für Winkel
- Kollisionserkennung: Abstände

**Ingenieurwesen**

- Kräfteanalyse: Vektoraddition
- Drehmoment: Kreuzprodukt
- Strukturanalyse: Projektionen
- Kinematik: Parametergeraden

**Navigation & Robotik**

- GPS-Positionierung: Vektordifferenzen
- Bahnplanung: Parameterkurven
- Hindernisvermeidung: Abstände
- Orientierung: Winkelberechnungen

**Data Science**

- Feature-Vektoren: hohe Dimensionen
- Ähnlichkeit: Skalarprodukt
- Hauptkomponenten: Projektionen
- Optimierung: Gradientenvektoren

---

**Vektormathematik bildet die Grundlage für zahlreiche technische Bereiche**

# Woche 1 Zusammenfassung

### Kernkonzepte

- Vektoren: Betrag und Richtung
- Operationen: Addition, Skalarmultiplikation
- Skalarprodukt: Ausrichtungsmaß
- Kreuzprodukt: senkrechte Vektoren

### Geometrische Objekte

- Geraden: $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$
- Ebenen: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$
- Parameter- vs. Normalenformen

### Berechnungen

- Abstandsformeln
- Winkelberechnungen
- Projektionsmethoden
- Schnittprobleme

### Schlüsselformeln

- $\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$
- $|\vec{u} \times \vec{v}| =$ Fläche
- $d = \frac{|(\vec{Q}-\vec{P})\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$

# Anhang: Übungsaufgaben und Lösungen

**Aufgabe 1: Vektoraddition**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2: Betrag berechnen**

$$|\vec{a}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} \approx 3.74$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21} \approx 4.58$$

**Aufgabe 3: Einheitsvektor**

Normiere $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: $|\vec{c}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$$\vec{e}_c = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$ **Verifikation:**

$$|\vec{e}_c| = \sqrt{4/9 + 4/9 + 1/9} = 1$$

**Grundlegende Vektoroperationen bilden die Basis für komplexere Berechnungen**

**Aufgabe 1: Winkel zwischen Vektoren**

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

$|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = \sqrt{2}$ $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = 45$ **Aufgabe 2: Orthogonalität testen**

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 2 - 4 = 0$
$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

**Aufgabe 3: Projektion**

Projiziere $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$

$|\vec{v}|^2 = 1$ $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{3}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **Interpretation:**

Die x-Komponente von $\vec{u}$ ist 3

**Das Skalarprodukt ist zentral für Winkel- und Projektionsberechnungen**

# Anhang C: Kreuzprodukt - Übungen

**Aufgabe 1: Kreuzprodukt berechnen**

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$

**Rechte-Hand-Regel:**

Finger von x nach y $\Rightarrow$ Daumen zeigt nach z **Aufgabe 2:**

**Parallelogrammfläche**

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = 6$ Flächeneinheiten

**Aufgabe 3: Normale zur Ebene**

Ebene durch: $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,2)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einheitsnormale: $\vec{e}_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **Häufiger Fehler:**

Reihenfolge beachten! $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

**Das Kreuzprodukt erzeugt orthogonale Vektoren und berechnet Flächen**

**Aufgabe 1: Gerade durch zwei Punkte**

$P(1,2,3)$, $Q(4,3,1)$ Richtungsvektor: $\vec{v} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Geradengleichung:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Test:** $t = 0$: Punkt $P$

$t = 1$: Punkt $Q$

**Aufgabe 2: Parallele Geraden?**

$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Prüfe: $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$

$\Rightarrow$ Geraden sind parallel! **Aufgabe 3: Schnittwinkel**

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, also $\theta = 45$

**Aufgabe 1: Von Parameter zu Koordinaten**

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Normale:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Mit Punkt $(1, 0, 0)$: $d = 1$

Koordinatenform: $x - y + z = 1$ **Aufgabe 2: Abstand**

**Punkt-Ebene**

Punkt $Q(2, 1, 3)$, Ebene $2x + y - z = 1$

$d = \frac{|4+1-3-1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

**Aufgabe 3: Schnittgerade zweier Ebenen**

$E_1 : x + y + z = 1$

$E_2 : x - y + 2z = 0$ Richtung der Schnittgeraden:

$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Finde einen

Punkt: Setze $z = 0$

$x + y = 1,\ x - y = 0 \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$ Schnittgerade:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 1: Gerade-Ebene-Schnitt**

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ebene: $x + y + z = 3$ Einsetzen: $(t) + (t) + (5 - t) = 3$

$t + 5 = 3 \Rightarrow t = -2$ Schnittpunkt: $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ **Verifikation:**

$-2 + (-2) + 7 = 3$

**Aufgabe 2: Spiegelung an Ebene**

Punkt $P(3, 4, 5)$, Ebene $z = 0$ (xy-Ebene) Normale:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Projektion auf Ebene: $(3, 4, 0)$

Gespiegelter Punkt: $P' = (3, 4, -5)$ **Aufgabe 3: Volumen**

**Tetraeder**

Ecken: $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$

$V = \frac{1}{6}|(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}|$

$= \frac{1}{6}|\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3| = \frac{1}{6}$

**Kombinierte Probleme testen das Verständnis aller Konzepte**