Uebungspruefung

Lineare Algebra

5 Aufgaben – 50 Punkte – 90 Minuten

Aufgabe 1: 3D-Geometrie — Aufgabe 2: Transformationen — Aufgabe 3: Lineare Codes
Aufgabe 4: Orthogonalitaet — Aufgabe 5: Eigenwerte

Aufgabe 1: 3D-Geometrie [10 Punkte]

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die drei Punkte gegeben:

$$A(2,1,4), \quad B(5,4,4), \quad C(2,1,8)$$

a) **[3 Punkte]** Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C eine Ebene π aufspannen.
b) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene π in der Form $ax + by + cz = d$.
c) **[4 Punkte]** Die Punkte A, B und C bilden zusammen mit einem Punkt D (wobei $D \notin \pi$) eine Pyramide $ABCD$ mit dem Dreieck ABC als Grundflaeche.
Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide, wenn die Hoehe $h = 2$ Laengeneinheiten betraegt.

Hinweis: Verwenden Sie das Kreuzprodukt zur Berechnung von Normalenvektor und Dreiecksflaeche.

Aufgabe 2: Transformationen [10 Punkte]

Ein Dreieck mit den Ecken $P_1(2,0)$, $P_2(4,0)$ und $P_3(3,2)$ soll durch eine Folge von Transformationen in ein neues Dreieck ueberfuehrt werden.
Die gewuenschten Transformationen sind:

1. Drehung um 90° (gegen den Uhrzeigersinn) um den Ursprung
2. Skalierung (Zoom) mit Faktor $s = 2$
3. Verschiebung um den Vektor $(3,1)^T$

a) **[6 Punkte]** Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen R (Rotation), S (Skalierung) und T (Translation) in homogenen Koordinaten (3×3 Matrizen).
b) **[2 Punkte]** Berechnen Sie die Gesamttransformationsmatrix $M = T \cdot S \cdot R$.
c) **[2 Punkte]** Berechnen Sie die neuen Koordinaten des Punktes P_1 nach Anwendung von M.

Hinweis: $\cos(90^\circ) = 0$, $\sin(90^\circ) = 1$

Aufgabe 3: Lineare Codes [10 Punkte]

Ein linearer Code ueber $\mathbb{Z}_2$ besitze die Pruefmatrix:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) **[4 Punkte]** Geben Sie fuer diesen Code eine Generatormatrix G an.
Hinweis: Bringen Sie H zuerst in systematische Form $[P|I_r]$.

b) **[3 Punkte]** Der Code sei ein $[n, k, d]$-Code. Bestimmen Sie n, k und d.

c) **[3 Punkte]** Pruefen Sie, ob der Vektor $\vec{c} = (1, 0, 1, 1, 1, 0)^T$ ein gueltiges Codewort ist.
Berechnen Sie dazu das Syndrom $\vec{s} = H \cdot \vec{c}^T$.

Hinweis: In $\mathbb{Z}_2$ gilt $1 + 1 = 0$ (Addition modulo 2).

Aufgabe 4: Orthogonalitaet [10 Punkte]

Teil 1 [5 Punkte]: Konstruieren Sie fuer den Vektorraum, der durch die zwei Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird, eine orthogonale Basis $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens.

Teil 2 [5 Punkte]: Die drei Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine orthogonale Basis fuer $\mathbb{R}^3$. (Die Orthogonalitaet muss nicht nachgewiesen werden.)

Stellen Sie den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Basisvektoren dar:

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \alpha_3 \vec{b}_3$$

Hinweis: Bei orthogonaler Basis gilt $\alpha_i = \frac{\vec{x} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i}$.

Aufgabe 5: Eigenwerte und Diagonalisierung [10 Punkte]

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.
Hinweis: Loesen Sie $\det(A - \lambda I) = 0$.

b) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert λ_i den zugehoerigen Eigenvektor.

c) **[3 Punkte]** Ist A diagonalisierbar?
Wenn ja, finden Sie die Matrix P (Eigenvektoren als Spalten) und die Diagonalmatrix D, so dass $A = PDP^{-1}$.
Wenn nein, begruenden Sie, warum A nicht diagonalisierbar ist.

Hinweis: Eine 2×2 Matrix mit 2 verschiedenen Eigenwerten ist immer diagonalisierbar.

Zusatzaufgabe A: 3D-Geometrie

[Bonus] Gegeben sind die Punkte $P(1,2,3)$, $Q(4,2,3)$ und $R(1,5,3)$.

a) Berechnen Sie den Flaecheninhalt des Dreiecks PQR.
b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $S(1,2,8)$ von der Ebene durch P, Q, R.
c) Liegt der Punkt $T(2,3,3)$ auf der Ebene durch P, Q, R? Begruenden Sie.

Diese Aufgabe dient zur zusaetzlichen Uebung und wird nicht bewertet.

Zusatzaufgabe B: Transformationen

[Bonus] Ein Punkt $P(4,2)$ soll um den Punkt $Z(1,1)$ um 180° rotiert werden.

a) Beschreiben Sie die notwendigen Transformationsschritte.
b) Stellen Sie die Gesamttransformationsmatrix auf.
c) Berechnen Sie die Koordinaten des rotierten Punktes P'.

Hinweis: Rotation um beliebigen Punkt = Translation zum Ursprung + Rotation + Translation zurueck.

Zusatzaufgabe C: Lineare Codes

[Bonus] Gegeben ist der $[7, 4, 3]$-Hamming-Code mit der Generatormatrix:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Kodieren Sie die Nachricht $\vec{m} = (1, 0, 1, 1)$ zu einem Codewort $\vec{c}$.
b) Wie viele Fehler kann dieser Code erkennen? Wie viele korrigieren?
c) Bestimmen Sie die zugehoerige Pruefmatrix H.

Hinweis: Kodierung: $\vec{c} = \vec{m} \cdot G$. **Bei** $G = [I_k|P]$ **ist** $H = [P^T|I_r]$.

Ende der Uebungspruefung

Loesungen finden Sie im separaten Dokument

Viel Erfolg beim Lernen!