

# Loesungen

Uebungspruefung Lineare Algebra

Ausfuehrliche Rechenwege fuer alle 5 Aufgaben

**Aufgabe:** Zeigen, dass  $A(2, 1, 4)$ ,  $B(5, 4, 4)$ ,  $C(2, 1, 8)$  eine Ebene aufspannen.

**Loesung:**

**Schritt 1:** Richtungsvektoren bilden

$$\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 4 - 1 \\ 4 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 2 - 2 \\ 1 - 1 \\ 8 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:** Kreuzprodukt berechnen

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Schritt 3:** Pruefung:  $\vec{n} \neq \vec{0}$  ✓

**Antwort:** Da  $\vec{n} \neq \vec{0}$ , sind  $\vec{AB}$  und  $\vec{AC}$  linear unabhangig, also spannen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  eine Ebene auf.

Merke: Kreuzprodukt = 0 bedeutet parallele Vektoren (keine Ebene moeglich)

**Aufgabe:** Ebenengleichung in Form  $ax + by + cz = d$

**Loesung:**

**Schritt 1:** Normalenvektor (aus Teil a)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:** Ebenengleichung aufstellen

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{A}) = 0$$

$$12(x - 2) - 12(y - 1) + 0(z - 4) = 0$$

$$12x - 24 - 12y + 12 = 0$$

$$12x - 12y = 12$$

**Schritt 3:** Vereinfachen (durch 12 teilen)

$$x - y = 1$$

**Antwort:**  $x - y = 1$  oder äquivalent  $1 \cdot x + (-1) \cdot y + 0 \cdot z = 1$

**Verifikation:** Punkt A:  $2 - 1 = 1$  ✓, Punkt B:  $5 - 4 = 1$  ✓, Punkt C:  $2 - 1 = 1$  ✓

**Aufgabe:** Volumen der Pyramide mit Hoehe  $h = 2$

**Loesung:**

**Schritt 1:** Grundflaeche berechnen (Dreieck ABC)

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{12^2 + (-12)^2 + 0^2} = \sqrt{144 + 144} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

**Schritt 2:** Volumen berechnen

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Basis}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}$$

**Antwort:**  $V = 4\sqrt{2} \approx 5.66$  Volumeneinheiten

**Alternative:** Spatprodukt  $V = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$  wenn  $D$  gegeben ist

**Aufgabe:** Matrizen fuer Rotation  $90^\circ$ , Skalierung  $s = 2$ , Translation  $(3, 1)^T$

**Rotationsmatrix** ( $\theta = 90^\circ$ ,  $\cos 90^\circ = 0$ ,  $\sin 90^\circ = 1$ ):

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Skalierungsmatrix** ( $s = 2$ ):

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Translationsmatrix** ( $(t_x, t_y) = (3, 1)$ ):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

In homogenen Koordinaten: Punkt  $(x, y)$  wird zu  $(x, y, 1)^T$

**Aufgabe:**  $M = T \cdot S \cdot R$  berechnen

**Schritt 1:**  $S \cdot R$  berechnen

$$S \cdot R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:**  $T \cdot (S \cdot R)$  berechnen

$$M = T \cdot S \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Antwort:**  $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Reihenfolge:  $M$  wird von rechts nach links angewendet (erst  $R$ , dann  $S$ , dann  $T$ )

**Aufgabe:** Neue Koordinaten von  $P_1(2, 0)$

**Schritt 1:**  $P_1$  in homogene Koordinaten

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:** Transformation anwenden

$$\vec{p}'_1 = M \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Schritt 3:** Zurueck zu kartesischen Koordinaten

$$P'_1 = \left( \frac{3}{1}, \frac{5}{1} \right) = (3, 5)$$

**Antwort:**  $P'_1 = (3, 5)$

**Verifikation:**  $P_1(2, 0) \xrightarrow{R} (0, 2) \xrightarrow{S} (0, 4) \xrightarrow{T} (3, 5) \checkmark$

**Aufgabe:**  $G$  aus  $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  bestimmen

**Schritt 1:**  $H$  ist bereits in Form  $[P|I_3]$ , wobei:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:**  $G = [I_k|P^T]$  mit  $k = n - r = 6 - 3 = 3$

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Antwort:**

$$G = [I_3|P^T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Verifikation:**  $H \cdot G^T$  muss Nullmatrix sein (in  $\mathbb{Z}_2$ )

**Aufgabe:**  $n, k, d$  bestimmen

$n =$  **Codelaenge:**

$$n = \text{Spaltenanzahl von } H = 6$$

$k =$  **Dimension:**

$$k = n - r = 6 - 3 = 3 \quad (\text{wobei } r = \text{Rang}(H) = \text{Zeilenanzahl})$$

$d =$  **Minimaldistanz:**

Suche minimale Anzahl linear abhaengiger Spalten von  $H$ :

- Keine zwei Spalten sind gleich  $\Rightarrow d \geq 2$
- Spalten 1, 2, 4:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$
- Spalten 1, 3, 6:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$
- Spalten 1, 2, 3:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$

**Antwort:**  $[6, 3, 3]$ -Code

$d = 3$ : Kann 2 Fehler erkennen, 1 Fehler korrigieren

**Aufgabe:** Ist  $\vec{c} = (1, 0, 1, 1, 1, 0)^T$  ein Codewort?

**Schritt 1:** Syndrom berechnen  $\vec{s} = H \cdot \vec{c}^T$  (in  $\mathbb{Z}_2$ )

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:** Zeile fuer Zeile (mod 2)

$$s_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 0$$

$$s_2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 0$$

$$s_3 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

**Antwort:** Ja,  $\vec{c}$  ist ein gueltiges Codewort (Syndrom =  $\vec{0}$ ).

Syndrom  $\neq \vec{0}$  wuerde auf Uebertragungsfehler hindeuten

**Aufgabe:** Orthogonale Basis aus  $\vec{v}_1 = (1, 2, 2)^T$ ,  $\vec{v}_2 = (2, 1, -2)^T$

**Schritt 1:**  $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:**  $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2)$

Berechne Skalarprodukte:

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 = 2 + 2 - 4 = 0$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 1 + 4 + 4 = 9$$

Projektion:

$$\text{proj}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2) = \frac{0}{9} \cdot \vec{u}_1 = \vec{0}$$

Also:

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Antwort:**  $\vec{u}_1 = (1, 2, 2)^T$ ,  $\vec{u}_2 = (2, 1, -2)^T$  (waren bereits orthogonal!)

**Verifikation:**  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 2 + 2 - 4 = 0 \checkmark$

**Aufgabe:**  $\vec{x} = (5, 3, 7)^T$  als Linearkombination von  $\vec{b}_1 = (1, 1, 0)^T$ ,  $\vec{b}_2 = (1, -1, 0)^T$ ,  $\vec{b}_3 = (0, 0, 1)^T$

**Koeffizienten berechnen** (orthogonale Basis:  $\alpha_i = \frac{\vec{x} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i}$ ):

$$\alpha_1 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} = \frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 7 \cdot 0}{1 + 1 + 0} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\alpha_2 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2} = \frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 7 \cdot 0}{1 + 1 + 0} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\alpha_3 = \frac{\vec{x} \cdot \vec{b}_3}{\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_3} = \frac{5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 7 \cdot 1}{0 + 0 + 1} = \frac{7}{1} = 7$$

**Antwort:**  $\vec{x} = 4\vec{b}_1 + 1\vec{b}_2 + 7\vec{b}_3$

**Verifikation:**

$$4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1 \\ 4 - 1 \\ 0 + 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

✓

Bei orthogonaler Basis: kein LGS noetig, direkte Formel genuegt

**Aufgabe:** Eigenwerte von  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

**Schritt 1:** Charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 \cdot 1 \\ &= 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10\end{aligned}$$

**Schritt 2:** Nullstellen (pq-Formel oder Faktorisierung)

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$$

**Antwort:**  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 2$

**Verifikation:**

- $\text{Spur}(A) = 4 + 3 = 7 = \lambda_1 + \lambda_2 \checkmark$
- $\det(A) = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 10 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \checkmark$

---

**Alternative:**  $\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$  ergibt 5 und 2

**Fuer**  $\lambda_1 = 5$ : Loese  $(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 2v_2$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(oder Vielfaches)

**Fuer**  $\lambda_2 = 2$ : Loese  $(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(oder Vielfaches)

**Antwort:**  $\vec{v}_1 = (2, 1)^T$  zu  $\lambda_1 = 5$ ,  $\vec{v}_2 = (-1, 1)^T$  zu  $\lambda_2 = 2$

**Verifikation:**  $A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\vec{v}_1 \checkmark$

**Frage:** Ist  $A$  diagonalisierbar?

**Antwort:** Ja, da  $A$  zwei verschiedene Eigenwerte hat ( $\lambda_1 = 5 \neq \lambda_2 = 2$ ).

**Matrix  $P$**  (Eigenvektoren als Spalten):

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Diagonalmatrix  $D$**  (Eigenwerte in gleicher Reihenfolge):

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Verifikation:**  $AP = PD$

$$AP = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

✓

**Antwort:**  $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Anwendung:**  $A^{100} = PD^{100}P^{-1}$  mit  $D^{100} = \text{diag}(5^{100}, 2^{100})$

## Ende der Loesungen

Wichtige Formeln:

Kreuzprodukt	$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$
Pyramidenvolumen	$V = \frac{1}{3} A_{\text{Basis}} \cdot h$
Projektion	$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u}$
Eigenwerte	$\det(A - \lambda I) = 0$
Diagonalisierung	$A = PDP^{-1}$

Viel Erfolg bei der Pruefung!