

Lösungen

Kurztest Lineare Algebra

Musterlösungen mit Punkteverteilung

Für Dozierende

Lösung Aufgabe 1 (5 Punkte)

(a) Rang (3 Pkt.):

Gauß-Elimination:

$Z_2 - 2Z_1, Z_3 - Z_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Z_3 - Z_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zwei Nichtnullzeilen:

$\text{rang}(A) = 2$ (3 Pkt.)

Punkteverteilung:

- 2 Pkt.: Korrekte Gauß-Schritte
- 1 Pkt.: Rang = 2

Aufgabe 1: Bei richtigem Ansatz aber Rechenfehlern Teilpunkte vergeben

(b) Kern (2 Pkt.):

Aus Zeilenstufenform:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -2x_2, x_3 = 0$$

Freie Variable: x_2

$$\ker(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (2 \text{ Pkt.})$$

Punkteverteilung:

- 1 Pkt.: Gleichungssystem aufgestellt
- 1 Pkt.: Korrekter Basisvektor

Alternative Antwort: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist auch korrekt (Vielfaches).

Lösung Aufgabe 2

Suche α_1, α_2 mit:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 3$$

$$\alpha_2 = 2$$

Aus zweiter Gleichung: $\alpha_2 = 2$

Einsetzen in erste: $\alpha_1 + 2 = 3$

$\Rightarrow \alpha_1 = 1$

Lösung:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ Pkt.})$$

Punkteverteilung:

- 2 Pkt.: Ansatz korrekt (LGS aufgestellt)
- 2 Pkt.: Lösung des LGS
- 1 Pkt.: Korrekte Darstellung als Koordinatenvektor

Verifikation:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

✓

Aufgabe 2: LGS-Lösung ist der Hauptteil der Aufgabe

Lösung Aufgabe 3

(a) Codieren (2 Pkt.):

$$c = m \cdot G = (1, 1) \cdot G$$

$$c = 1 \cdot (1, 0, 1, 1) + 1 \cdot (0, 1, 1, 0)$$

In \mathbb{F}_2 (mit $1 + 1 = 0$):

$$c = (1, 0, 1, 1) + (0, 1, 1, 0) = (1, 1, 0, 1)$$

$$c = (1, 1, 0, 1) \quad (2 \text{ Pkt.})$$

Punkteverteilung:

- 1 Pkt.: Ansatz (Zeilen addieren)
- 1 Pkt.: Korrekte Addition in \mathbb{F}_2

(b) Prüfmatrix (3 Pkt.):

G ist in Standardform: $G = (I_2 | P)$

$$\text{mit } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Prüfmatrix: $H = (P^T | I_2)$

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ Pkt.})$$

Punkteverteilung:

- 1 Pkt.: P identifiziert
- 1 Pkt.: P^T berechnet
- 1 Pkt.: H korrekt aufgestellt

Verifikation: $G \cdot H^T = 0$ prüfen (optional)

Notenskala (15 Punkte)

- 14-15 Punkte: Sehr gut (1.0-1.3)
- 12-13 Punkte: Gut (1.7-2.3)
- 10-11 Punkte: Befriedigend (2.7-3.3)
- 8-9 Punkte: Ausreichend (3.7-4.0)
- 0-7 Punkte: Nicht bestanden (5.0)

Bestehensgrenze: 8 von 15 Punkten (53%)

Punkteverteilung Gesamt

- **Aufgabe 1:** 5 Punkte (Gauß 3, Kern 2)
- **Aufgabe 2:** 5 Punkte (Basiswechsel)
- **Aufgabe 3:** 5 Punkte (Codieren 2, Prüfmatrix 3)

Häufige Fehler

Aufgabe 1:

- Vorzeichenfehler bei Gauß
- Vergessen: Freie Variablen identifizieren

Aufgabe 2:

- Falsche Gleichung aufgestellt
- Koordinaten verwechselt

Aufgabe 3:

- Vergessen: $1 + 1 = 0$ in \mathbb{F}_2
- P und P^T verwechselt

Teilpunkte

Bei richtigem Ansatz aber Rechenfehler großzügig Teilpunkte vergeben.

Rechenweg ist wichtig für Teilpunkte – nur Endergebnis ohne Weg gibt maximal 50 Prozent der Punkte