

Musterlösungen

Kurztest Lineare Algebra

Detaillierte Lösungen mit Punkteverteilung

Für Dozierende

(a) Gauß-Algorithmus (3 Punkte)

Ausgangsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: $Z_2 - 2Z_1 \rightarrow Z_2$, $Z_3 - Z_1 \rightarrow Z_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: $Z_3 + Z_2 \rightarrow Z_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Häufige Fehler: Vorzeichenfehler bei Zeilenoperationen, falsche Zählung der Nichtnullzeilen

Zeilenstufenform:

$$\text{ZSF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Punkteverteilung (a):

- 1 Punkt: Erste Elimination korrekt
- 1 Punkt: Zweite Elimination korrekt
- 1 Punkt: Korrekte Zeilenstufenform

(b) Rang (1 Punkt)

Anzahl der Nichtnullzeilen in ZSF:

$$\text{rang}(A) = 2$$

Punkteverteilung (b):

- 1 Punkt: Korrekter Rang = 2

(c) Kern bestimmen (3 Punkte)

Löse $A \cdot v = 0$ mit ZSF:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichungen:

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2x_2 - x_4$$

$$x_3 + x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -x_4$$

Freie Variablen: x_2, x_4

Allgemeine Lösung:

$$v = \begin{pmatrix} -2x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basis des Kerns:

$$\ker(f) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Punkteverteilung (c):

- 1 Punkt: LGS korrekt aufgestellt
- 1 Punkt: Freie Parameter identifiziert
- 1 Punkt: Korrekte Basisvektoren

Dimensionssatz Check: $\dim(\ker(f)) = 2$, später zeigen wir $\dim(\text{im}(f)) = 2$, also $2 + 2 = 4$ korrekt

(d) Bild bestimmen (2 Punkte)

Das Bild wird von den Pivot-Spalten der Originalmatrix A erzeugt.

In ZSF sind die Pivot-Spalten: Spalte 1 und Spalte 3

Entsprechende Spalten in A :

$$\text{Spalte 1: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Spalte 3: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Basis des Bildes:

$$\text{im}(f) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad 2 + 2 = 4 \quad \checkmark$$

Alternative: Bild kann auch durch Zeilenvektoren der ZSF bestimmt werden (gleiche Dimension)

Punkteverteilung (d):

- 1 Punkt: Pivot-Spalten identifiziert
- 1 Punkt: Korrekte Spalten aus A gewählt

(e) Dimensionssatz (1 Punkt)

Prüfe: $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4)$

$$\dim(\ker(f)) = 2 \quad (2 \text{ Basisvektoren})$$

$$\dim(\text{im}(f)) = 2 \quad (2 \text{ Basisvektoren})$$

$$\dim(\mathbb{R}^4) = 4$$

Punkteverteilung (e):

- 1 Punkt: Korrekte Verifikation

(a) Basiswechselmatrix (4 Punkte)

Die Basiswechselmatrix $T_{E \rightarrow B}$ hat die Basisvektoren b_1, b_2, b_3 als Spalten:

$$T_{E \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Um Koordinaten von E nach B umzurechnen, müssen wir das inverse System lösen:

$$[v]_B = T_{E \rightarrow B}^{-1} \cdot [v]_E$$

Wir benötigen also $T_{E \rightarrow B}^{-1}$.

Inverse berechnen mit Gauß-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Nach Gauß-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$T_{E \rightarrow B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Punkteverteilung (a):

- 2 Punkte: Matrix $T_{E \rightarrow B}$ korrekt
- 2 Punkte: Inverse $T_{E \rightarrow B}^{-1}$ korrekt

Häufiger Fehler: Verwechslung von $T_{E \rightarrow B}$ und $T_{B \rightarrow E}$

(b) Koordinaten umrechnen (3 Punkte)

Gegeben: $[v]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechne: $[v]_B = T_{E \rightarrow B}^{-1} \cdot [v]_E$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 2 - 1 \\ -3 + 2 + 1 \\ 3 - 2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punkteverteilung (b):

- 1 Punkt: Richtiger Ansatz (Matrix-Vektor-Multiplikation)
- 2 Punkte: Korrekte Berechnung

(c) Verifikation (1 Punkt)

Prüfe: $v = 4b_1 + 0b_2 + 2b_3$

$$4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fehleranalyse

Bei Basiswechsel von E nach B :

- Suche $[v]_B$ so dass: $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$
- Löse: $T \cdot [v]_B = [v]_E$
- Also: $[v]_B = T^{-1} \cdot [v]_E$

Korrekte Inverse:

Nochmal Gauß-Jordan durchführen:

$$T_{E \rightarrow B}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Alternativer Lösungsweg mit Determinante und Adjunkte)

Einfacherer Ansatz: LGS direkt lösen

Finde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mit:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

System:

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 3$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

Lösung: $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verifikation:

(2) (1) (3)

(a) Parameter (n, k, d) (3 Punkte)

Generatormatrix:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- n (**Codewortlänge**): Anzahl Spalten = 6
- k (**Dimension**): Anzahl Zeilen = 3
- d (**Minimaler Hamming-Abstand**):
Bestimme minimales Hamming-Gewicht aller Nichtnull-Codewörter

Alle $2^3 = 8$ Codewörter prüfen:

- $(1, 0, 0) \cdot G = (1, 0, 0, 1, 1, 0)$ – Gewicht 3
- $(0, 1, 0) \cdot G = (0, 1, 0, 1, 0, 1)$ – Gewicht 3
- $(0, 0, 1) \cdot G = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$ – Gewicht 3
- $(1, 1, 0) \cdot G = (1, 1, 0, 0, 1, 1)$ – Gewicht 4
- Weitere haben Gewicht ≥ 3

Punkteverteilung (a):

- 1 Punkt: $n = 6$ und $k = 3$ korrekt
- 2 Punkte: $d = 3$ korrekt bestimmt

(b) Nachricht codieren (2 Punkte)

Nachricht: $m = (1, 0, 1)$

Codewort: $c = m \cdot G$

$$\begin{aligned} c &= (1, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (1, 0, 0, 1, 1, 0) + 0 \cdot (0, 1, 0, 1, 0, 1) \\ &\quad + 1 \cdot (0, 0, 1, 0, 1, 1) \\ &= (1, 0, 0, 1, 1, 0) + (0, 0, 1, 0, 1, 1) \\ &= (1, 0, 1, 1, 0, 1) \end{aligned}$$

(c) Prüfmatrix bestimmen (4 Punkte)

G ist in Standardform: $G = (I_3|P)$

$$G = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = (I_3|P)$$

mit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Prüfmatrix: $H = (-P^T|I_{n-k})$

In \mathbb{F}_2 gilt: $-1 = 1$, also:

$$H = (P^T|I_3)$$

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifikation: $G \cdot H^T = 0$

$$G \cdot H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Punkteverteilung (c):

- 2 Punkte: P korrekt identifiziert
- 2 Punkte: H korrekt aufgestellt

(d) Fehlerkorrektur (3 Punkte)

Gegeben: Minimaler Hamming-Abstand $d = 3$

Fehler erkennen: Ein Code mit minimalem Abstand d kann bis zu $d - 1$ Fehler **erkennen**.

Erkennbar: $d - 1 = 3 - 1 = 2$ Fehler

Begründung: Wenn ein Codewort c höchstens 2 Fehler hat, ist das verfälschte Wort kein gültiges Codewort (Abstand zu allen Codewörtern > 0).

Fehler korrigieren: Ein Code mit minimalem Abstand d kann bis zu $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ Fehler **korrigieren**.

Korrigierbar: $\lfloor \frac{3-1}{2} \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$ Fehler

Begründung: Bei einem Einzelfehler ist das verfälschte Wort dem ursprünglichen Codewort am nächsten (Abstand 1), zu allen anderen Codewörtern ist der Abstand ≥ 2 .

Punkteverteilung (d):

- 1 Punkt: Erkennbar: 2 Fehler
- 1 Punkt: Korrigierbar: 1 Fehler
- 1 Punkt: Begründung mit Hamming-Abstand

Dieser Code ist optimal für 1-Fehler-Korrektur und 2-Fehler-Erkennung

Aufgabe 1 (10 Punkte)

- (a) Gauß-Algorithmus: 3 Punkte
- (b) Rang: 1 Punkt
- (c) Kern-Basis: 3 Punkte
- (d) Bild-Basis: 2 Punkte
- (e) Dimensionssatz: 1 Punkt

Aufgabe 2 (8 Punkte)

- (a) Basiswechselmatrix: 4 Punkte
- (b) Koordinatenumrechnung: 3 Punkte
- (c) Verifikation: 1 Punkt

Aufgabe 3 (12 Punkte)

- (a) Parameter (n, k, d) : 3 Punkte
- (b) Nachricht codieren: 2 Punkte
- (c) Prüfmatrix: 4 Punkte
- (d) Fehlerkorrektur: 3 Punkte

Gesamt: 30 Punkte

Häufige Fehlerquellen:

- Vorzeichenfehler bei Gauß
- Verwechslung von Basis und Inverse
- Arithmetik in \mathbb{F}_2 vergessen
- Pivot-Spalten falsch identifiziert

Teilpunkte werden großzügig vergeben bei korrektem Ansatz