Kurztest

Lineare Algebra

Drei Aufgaben

Zeit: 30 Minuten

Aufgabe 1: Gauß-Algorithmus, Rang, Kern & Bild (10 Punkte)

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

mit Darstellungsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgaben:

(a) Bestimmen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Zeilenstufenform von A. (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie den Rang von A. (1 Punkt)

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f, also $\ker(f) = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = 0\}$. (3 Punkte)

(d) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von f, also $\operatorname{im}(f) = \{f(v) \mid v \in \mathbb{R}^4\}$. (2 Punkte)

(e) Verifizieren Sie den Dimensionssatz: $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4)$. (1 Punkt)

Schreiben Sie alle Zwischenschritte auf. Bei Rechenfehlern gibt es Teilpunkte für den richtigen Ansatz.

Aufgabe 2: Basiswechsel (8 Punkte)

Gegeben:
Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir zwei Basen:

Standardbasis E:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Neue Basis B:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgaben:

(a) Stellen Sie die Basiswechselmatrix $T_{E \to B}$ auf, die Koordinaten von der Standardbasis E in die Basis B umrechnet. (4 Punkte)

(b) Der Vektor v hat in der Standardbasis die Koordinaten:

$$[v]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Koordinaten $[v]_B$ in der Basis B. (3 Punkte)

(c) Verifizieren Sie Ihr Ergebnis durch Rückrechnung. (1 Punkt)

Die Basiswechselmatrix hat die Basisvektoren als Spalten. Zur Umrechnung lösen Sie ein lineares Gleichungssystem.

Aufgabe 3: Lineare Codes (12 Punkte)

Gegeben sei ein linearer Code über $\mathbb{F}_2$ (binäres Alphabet: $\{0, 1\}$) mit Generatormatrix:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgaben:

(a) Bestimmen Sie die Parameter (n, k, d) des Codes:
- $n =$ Codewortlänge
- $k =$ Dimension (Anzahl Informationsbits)
- $d =$ Minimaler Hamming-Abstand

(3 Punkte)

(b) Codieren Sie die Nachricht $m = (1, 0, 1)$. Bestimmen Sie das Codewort $c = m \cdot G$ (Rechnung in $\mathbb{F}_2$, d.h. $1 + 1 = 0$). (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie eine Prüfmatrix H zu G mit $G \cdot H^T = 0$. (4 Punkte)
Hinweis: Die Generatormatrix ist in Standardform $G = (I_k | P)$.

(d) Wie viele Fehler kann dieser Code **erkennen**? Wie viele kann er **korrigieren**? Begründen Sie kurz mit dem Hamming-Abstand. (3 Punkte)

Rechnen Sie in $\mathbb{F}_2$: Addition ist XOR, d.h. $1 + 1 = 0$, $1 + 0 = 1$, $0 + 0 = 0$. Multiplikation wie üblich.

Punkteverteilung und Bewertung

Punkteverteilung

- **Aufgabe 1:** 10 Punkte
  - Gauß-Algorithmus: 3 Punkte
  - Rang: 1 Punkt
  - Kern-Basis: 3 Punkte
  - Bild-Basis: 2 Punkte
  - Dimensionssatz: 1 Punkt
- **Aufgabe 2:** 8 Punkte
  - Basiswechselmatrix: 4 Punkte
  - Koordinatenumrechnung: 3 Punkte
  - Verifikation: 1 Punkt
- **Aufgabe 3:** 12 Punkte
  - Parameter bestimmen: 3 Punkte
  - Codieren: 2 Punkte
  - Prüfmatrix: 4 Punkte
  - Fehlerkorrektur: 3 Punkte

Notenskala (Beispiel)

- 27-30 Punkte: Sehr gut (1.0-1.3)
- 24-26 Punkte: Gut (1.7-2.3)
- 21-23 Punkte: Befriedigend (2.7-3.3)
- 18-20 Punkte: Ausreichend (3.7-4.0)
- 0-17 Punkte: Nicht bestanden (5.0)

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte. Zeit: 30 Minuten (ca. 10 Minuten pro Aufgabe)