Lektion 05: Folgen, Reihen und Finanzmathematik – Vorlesungsnotizen

Analysis Kurs
Digital Finance

1 Einfuehrung und Motivation

Folgen und Reihen bilden das Fundament der Analysis. Ohne den Grenzwertbegriff gaebe es keine Ableitung, kein Integral und keine Differentialgleichung. Zugleich sind Folgen und Reihen das natuerliche Werkzeug fuer die Finanzmathematik: Zinseszins, Annuitaeten und Tilgungsplaene beruhen auf geometrischen Folgen und Reihen.

Diese Lektion verknuepft die mathematische Theorie mit oekonomischen Anwendungen – von der Zinseszinsrechnung ueber Preiselastizitaeten bis zu Wachstumsmodellen.

Lernziele

Nach dieser Lektion koennen Sie:

LZ1 Arithmetische und geometrische Folgen aufstellen und auswerten.

LZ2 Den Grenzwertbegriff praezise (ε-N-Definition) formulieren und Grenzwerte berechnen.

LZ3 Konvergenzkriterien (Quotienten-, Wurzel-, Leibniz-Kriterium) auf Reihen anwenden.

LZ4 Zinseszins, Barwert und Endwert berechnen.

LZ5 Annuitaetendarlehen und Tilgungsplaene aufstellen.

LZ6 Preiselastizitaeten berechnen und oekonomisch interpretieren.

LZ7 Exponentielles und logistisches Wachstum modellieren.

LZ8 Folgen, Reihen und Finanzmathematik mit Python/NumPy implementieren.

2 Folgen

Definition 2.1 (Folge)**.** Eine **(reelle) Folge** ist eine Abbildung $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Man schreibt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz (a_n). Das Element a_n heisst das n**-te Glied** der Folge.

Es gibt zwei Arten, eine Folge zu beschreiben:

- **Explizit:** a_n wird direkt durch eine Formel in n angegeben, z. B. $a_n = \frac{1}{n}$.
- **Rekursiv:** a_n wird aus vorherigen Gliedern berechnet, z. B. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$.

2.1 Arithmetische Folgen

Definition 2.2 (Arithmetische Folge)**.** Eine Folge (a_n) heisst **arithmetisch**, wenn die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist: $a_{n+1} - a_n = d$ fuer alle n.

Arithmetische Folge

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\,(2a_1 + (n-1)d).$$

Beispiel 2.1. Die Folge $3, 7, 11, 15, 19, \ldots$ hat $a_1 = 3$ und $d = 4$. Das 50. Glied ist $a_{50} = 3 + 49 \cdot 4 = 199$. Die Summe der ersten 50 Glieder: $S_{50} = \frac{50}{2}(3 + 199) = 5050$.

2.2 Geometrische Folgen

Definition 2.3 (Geometrische Folge)**.** Eine Folge (a_n) mit $a_n \neq 0$ heisst **geometrisch**, wenn der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ fuer alle n.

Geometrische Folge

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \qquad S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1).$$

Beispiel 2.2. Die Folge $2, 6, 18, 54, \ldots$ hat $a_1 = 2$ und $q = 3$. Das 8. Glied: $a_8 = 2 \cdot 3^7 = 4374$.

Anwendung

Geometrische Folgen modellieren Zinseszins: Ein Anfangskapital K_0 bei jaehrlicher Verzinsung mit Zinssatz i waechst nach n Jahren auf $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$. Hier ist $q = 1 + i$ der Aufzinsungsfaktor.

2.3 Monotonie und Beschraenktheit

Definition 2.4 (Monotonie)**.** Eine Folge (a_n) heisst

- **monoton wachsend**, falls $a_{n+1} \geq a_n$ fuer alle n,
- **streng monoton wachsend**, falls $a_{n+1} > a_n$ fuer alle n,
- **monoton fallend**, falls $a_{n+1} \leq a_n$ fuer alle n,
- **streng monoton fallend**, falls $a_{n+1} < a_n$ fuer alle n.

Definition 2.5 (Beschraenktheit)**.** (a_n) heisst **nach oben beschraenkt**, falls ein $M \in \mathbb{R}$ existiert mit $a_n \leq M$ fuer alle n; **nach unten beschraenkt**, falls $a_n \geq m$; **beschraenkt**, falls beides gilt.

Satz 2.1 (Monotoniekriterium)**.** Jede monotone und beschraenkte Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Intuition

Stellen Sie sich eine Treppe vor, die immer hoeher steigt, aber eine Decke hat – sie muss sich einem Punkt unter der Decke naehern. Das ist die Idee hinter dem Monotoniekriterium.

3 Konvergenz und Grenzwerte

Definition 3.1 (Konvergenz einer Folge)**.** Eine Folge (a_n) **konvergiert** gegen $a \in \mathbb{R}$, geschrieben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq N: \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Der Wert a heisst **Grenzwert** (Limes) der Folge.

Haeufiger Fehler

Die Quantorenreihenfolge ist entscheidend: *Fuer jedes* $\varepsilon > 0$ muss ein N existieren – nicht umgekehrt. Ausserdem muss a_n den Grenzwert nicht annehmen, sondern sich ihm nur beliebig naehern.

3.1 Grenzwertgesetze

Satz 3.1 (Grenzwertgesetze)**.** Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

1. **Summe:** $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.
2. **Produkt:** $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
3. **Quotient:** $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$.
4. **Skalierung:** $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a$ fuer $c \in \mathbb{R}$.

3.2 Sandwichsatz

Satz 3.2 (Sandwich-/Einschliessungssatz)**.** Seien (a_n), (b_n), (c_n) Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ fuer alle $n \geq N_0$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Beispiel 3.1. Fuer $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ gilt $-\frac{1}{n} \leq b_n \leq \frac{1}{n}$. Da beide aeusseren Folgen gegen 0 konvergieren, folgt $b_n \to 0$.

3.3 Wichtige Grenzwerte

Standardgrenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k > 0), \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1), \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \approx 2{,}71828, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Beispiel 3.2 (Polynomquotient)**.** $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n}{n^2+1}$: Dividiere Zaehler und Nenner durch n^2:

$$\frac{3 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3+0}{1+0} = 3.$$

Faustregel: Beim Quotienten zweier Polynome bestimmt das Verhaeltnis der fuehrenden Koeffizienten den Grenzwert (gleicher Grad), 0 (Zaehlergrad $<$) oder $\pm\infty$ (Zaehlergrad $>$).

4 Reihen

Definition 4.1 (Reihe und Partialsumme)**.** Sei (a_n) eine Folge. Die n**-te Partialsumme** ist $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Die **(unendliche) Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ ist definiert als $\lim_{n\to\infty} S_n$, sofern dieser Grenzwert existiert. In diesem Fall heisst die Reihe **konvergent**.

4.1 Geometrische Reihe

Satz 4.1 (Geometrische Reihe)**.** Fuer $|q| < 1$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Fuer $|q| \geq 1$ divergiert die Reihe.

Beispiel 4.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

4.2 Arithmetische Reihe (Gauss-Formel)

Gauss-Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Die Summe der ersten n natuerlichen Zahlen waechst quadratisch; als unendliche Reihe divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} k$ offensichtlich.

4.3 Konvergenzkriterien

Satz 4.2 (Notwendige Bedingung)**.** Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so gilt $a_n \to 0$. Die Umkehrung ist falsch (Gegenbeispiel: harmonische Reihe).

Satz 4.3 (Quotientenkriterium)**.** Sei $a_n \neq 0$ fuer alle n und $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

- $L < 1$: Die Reihe konvergiert absolut.
- $L > 1$: Die Reihe divergiert.
- $L = 1$: Keine Aussage moeglich.

Satz 4.4 (Wurzelkriterium (Cauchy))**.** Sei $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

- $L < 1$: Die Reihe konvergiert absolut.
- $L > 1$: Die Reihe divergiert.
- $L = 1$: Keine Aussage moeglich.

Beispiel 4.2 (Quotientenkriterium angewendet)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$: Es gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2} < 1$. Also konvergiert die Reihe absolut.

Haeufiger Fehler

Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, obwohl $\frac{1}{n} \to 0$. Dies ist das Standardgegenbeispiel zur Verwechslung von "$a_n \to 0$" und "Reihe konvergiert".

4.4 Potenzreihen

Definition 4.2 (Potenzreihe)**.** Eine **Potenzreihe** um x_0 ist eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Der **Konvergenzradius** R gibt an, fuer welche x die Reihe konvergiert: $|x - x_0| < R$.

Konvergenzradius (Formel von Cauchy–Hadamard)

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{bzw. praktisch oft} \qquad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Beispiel 4.3. Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat $R = \infty$; sie konvergiert fuer alle $x \in \mathbb{R}$ und stellt e^x dar. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hat $R = 1$.

5 Zinsrechnung

5.1 Einfache Verzinsung

Bei einfacher Verzinsung werden die Zinsen nur auf das Anfangskapital berechnet:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i),$$

wobei K_0 das Anfangskapital, i der Zinssatz pro Periode und n die Anzahl der Perioden ist. Das Wachstum ist **linear**.

5.2 Zinseszins (Compound Interest)

Zinseszinsformel

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n.$$

Der Aufzinsungsfaktor $q = 1 + i$ beschreibt die geometrische Folge des Kapitals.

Beispiel 5.1. $K_0 = 5\,000$ EUR, $i = 3\%$, $n = 10$ Jahre: $K_{10} = 5\,000 \cdot (1{,}03)^{10} \approx 5\,000 \cdot 1{,}3439 = 6\,719{,}58$ EUR. Bei einfacher Verzinsung: $K_{10} = 5\,000 \cdot (1 + 10 \cdot 0{,}03) = 6\,500$ EUR. Die Differenz von 219,58 EUR ist der Zinseszins-Effekt.

5.3 Unterjaehrige und stetige Verzinsung

Bei m-maliger Verzinsung pro Jahr mit Nominalzins i:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}.$$

Der **Effektivzins** ist $i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$.

Stetige Verzinsung

Im Grenzfall $m \to \infty$ ergibt sich die stetige Verzinsung:

$$K(t) = K_0 \cdot \mathrm{e}^{i \cdot t}.$$

Dies folgt aus $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = \mathrm{e}^i$.

Intuition

Stetige Verzinsung ist der theoretische Grenzfall: Die Zinsen werden in jedem unendlich kleinen Zeitintervall dem Kapital zugeschlagen. In der Praxis approximiert monatliche oder taegliche Verzinsung dies sehr gut.

5.4 Verdopplungszeit und 72er-Regel

Die exakte Verdopplungszeit bei Zinseszins ist:

$$n^* = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)}.$$

72er-Regel (Faustregel)

$$n^* \approx \frac{72}{i_\%},$$

wobei $i_\%$ der Zinssatz in Prozent ist (z. B. $i_\% = 6$ fuer 6%).

Beispiel 5.2. Bei 8%: $n^* \approx \frac{72}{8} = 9$ Jahre. Exakt: $\frac{\ln 2}{\ln 1{,}08} \approx 9{,}01$ Jahre – hervorragende Naeherung.

5.5 Barwert und Endwert

Definition 5.1 (Barwert und Endwert)**.** Der **Endwert** (Future Value) EW einer heutigen Zahlung K_0 ist $\text{EW} = K_0(1+i)^n$. Der **Barwert** (Present Value) BW einer kuenftigen Zahlung K_n ist:

$$\text{BW} = \frac{K_n}{(1+i)^n} = K_n \cdot (1+i)^{-n}.$$

Der Faktor $(1+i)^{-n}$ heisst **Abzinsungsfaktor** (Diskontfaktor).

Anwendung

Barwertberechnungen sind fundamental in der Investitionsrechnung: Um zwei Zahlungsstroeme zu vergleichen, rechnet man alle Zahlungen auf denselben Zeitpunkt (typischerweise heute) ab.

6 Annuitaeten und Tilgung

6.1 Annuitaetenformel

Ein Kredit K_0 wird ueber n Perioden mit konstantem Zinssatz i durch gleiche Raten A (Annuitaeten) getilgt. Die Rate ergibt sich aus der Bedingung, dass der Barwert aller Raten gleich K_0 sein muss:

$$K_0 = A \cdot \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k} = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}.$$

Annuitaetenformel

$$A = K_0 \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = K_0 \cdot \text{ANF}(i,n).$$

Der Ausdruck $\text{ANF}(i,n) = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$ ist der **Annuitaetenfaktor** (Kapitalwiedergewinnungsfaktor).

Beispiel 6.1. Kredit $K_0 = 100\,000$ EUR, $i = 4\%$, $n = 20$ Jahre:

$$A = 100\,000 \cdot \frac{0{,}04 \cdot (1{,}04)^{20}}{(1{,}04)^{20} - 1} = 100\,000 \cdot \frac{0{,}04 \cdot 2{,}1911}{1{,}1911} \approx 7\,358{,}18 \text{ EUR/Jahr}.$$

6.2 Tilgungsplan

In jeder Periode k setzt sich die Annuitaet zusammen aus:

- **Zinsanteil:** $Z_k = i \cdot R_{k-1}$ (Zinsen auf die Restschuld).
- **Tilgungsanteil:** $T_k = A - Z_k$.
- **Neue Restschuld:** $R_k = R_{k-1} - T_k$.

Da R_{k-1} sinkt, sinkt Z_k und T_k steigt – bei konstanter Annuitaet.

Beispiel 6.2 (Tilgungsplan-Ausschnitt)**.** $K_0 = 10\,000$ EUR, $i = 5\%$, $n = 5$ Jahre, $A = 2\,309{,}75$ EUR:

Jahr	Restschuld (Anfang)	Zinsen	Tilgung	Restschuld (Ende)
1	10 000,00	500,00	1 809,75	8 190,25
2	8 190,25	409,51	1 900,24	6 290,01
3	6 290,01	314,50	1 995,25	4 294,76
4	4 294,76	214,74	2 095,01	2 199,75
5	2 199,75	110,00	2 199,75	0,00

6.3 Rentenbarwert

Definition 6.1 (Rentenbarwert)**.** Der **Rentenbarwert** ist der heutige Wert einer Reihe von n gleichbleibenden Zahlungen A:

$$\mathrm{BW}_{\mathrm{Rente}} = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = A \cdot \mathrm{RBF}(i, n).$$

Der **Rentenbarwertfaktor** $\mathrm{RBF}(i, n) = \frac{1}{\mathrm{ANF}(i,n)}$ ist der Kehrwert des Annuitaetenfaktors.

Anwendung

Der Rentenbarwert beantwortet die Frage: “Wie viel muss ich heute anlegen, um n Jahre lang eine jaehrliche Rente von A Euro zu beziehen?”

7 Preiselastizitaet

Definition 7.1 (Preiselastizitaet der Nachfrage)**.** Die **Preiselastizitaet der Nachfrage** misst die prozentuale Aenderung der Nachfragemenge Q bei einer prozentualen Preisaenderung P:

$$E = \frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}.$$

7.1 Klassifikation

Betrag	Bezeichnung	Interpretation
$\lvert E\rvert > 1$	elastisch	Nachfrage reagiert ueberproportional
$\lvert E\rvert = 1$	einheitselastisch	proportionale Reaktion
$\lvert E\rvert < 1$	unelastisch	Nachfrage reagiert unterproportional
$\lvert E\rvert = 0$	perfekt unelastisch	keine Mengenreaktion
$\lvert E\rvert = \infty$	perfekt elastisch	unendliche Mengenreaktion

7.2 Umsatzwirkung

Der Umsatz ist $R = P \cdot Q$. Die Aenderung bei einer Preisaenderung haengt von der Elastizitaet ab:

- $|E| > 1$ (elastisch): Preiserhoehung **senkt** den Umsatz.
- $|E| < 1$ (unelastisch): Preiserhoehung **steigert** den Umsatz.
- $|E| = 1$: Umsatz bleibt (lokal) gleich.

Beispiel 7.1. Nachfragefunktion $Q(P) = 100 - 2P$. Bei $P = 20$: $Q = 60$, $\frac{dQ}{dP} = -2$, also $E = (-2) \cdot \frac{20}{60} = -\frac{2}{3}$. Da $|E| = \frac{2}{3} < 1$, ist die Nachfrage unelastisch – eine moderate Preiserhoehung wuerde den Umsatz steigern.

Haeufiger Fehler

Die Elastizitaet ist *nicht* konstant entlang einer linearen Nachfragekurve! Sie aendert sich mit dem Preisniveau: Bei hohen Preisen (nahe dem Prohibitivpreis) ist die Nachfrage elastisch, bei niedrigen Preisen unelastisch.

8 Wachstumsmodelle

8.1 Exponentielles Wachstum

Definition 8.1 (Exponentielles Wachstum)**.** Ein Bestand $P(t)$ waechst **exponentiell**, wenn die Wachstumsrate proportional zum Bestand ist: $\frac{dP}{dt} = r \cdot P$. Die Loesung ist:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{rt}.$$

Fuer $r > 0$ waechst P unbeschraenkt (Wachstum), fuer $r < 0$ faellt P gegen Null (Zerfall). Die **Verdopplungszeit** ist $t_2 = \frac{\ln 2}{r}$, die **Halbwertszeit** $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{|r|}$.

Anwendung

Exponentielles Wachstum beschreibt kurzfristig viele Phaenomene: fruehe Ausbreitung von Krankheiten, Zinswachstum, Bakterienvermehrung. Langfristig ist es unrealistisch, da Ressourcen begrenzt sind.

8.2 Logistisches Wachstum

Definition 8.2 (Logistisches Wachstum)**.** Das **logistische Modell** begrenzt das Wachstum durch eine Tragfaehigkeit K:

$$\frac{dP}{dt} = r \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

Die Loesung ist:

$$P(t) = \frac{K}{1 + c \cdot e^{-rt}}, \qquad c = \frac{K - P_0}{P_0}.$$

Eigenschaften des logistischen Wachstums

- Fuer $P \ll K$: naeherungsweise exponentielles Wachstum $P \approx P_0 e^{rt}$.
- Wendepunkt bei $P = K/2$: hier ist das Wachstum am schnellsten.
- $\lim_{t\to\infty} P(t) = K$: der Bestand stabilisiert sich.

Beispiel 8.1 (Marktdurchdringung)**.** Ein neues Produkt hat ein Marktpotenzial von $K = 10\,000$ Nutzer, Anfangsbestand $P_0 = 100$, Wachstumsrate $r = 0{,}5$ pro Monat. Dann $c = \frac{9900}{100} = 99$ und $P(t) = \frac{10\,000}{1+99\cdot e^{-0{,}5t}}$. Nach 10 Monaten: $P(10) \approx \frac{10\,000}{1+99\cdot 0{,}00674} \approx 6\,010$ Nutzer.

9 Python-Anwendungen

9.1 Folgen und Reihen mit NumPy

Listing 1: Arithmetische und geometrische Folge

```python
import numpy as np

# Arithmetische Folge: a_1 = 3, d = 4, n = 50
n = np.arange(1, 51)
a_arith = 3 + (n - 1) * 4
print(f"a_50 = {a_arith[-1]}")  # 199

# Geometrische Folge: a_1 = 2, q = 3
a_geom = 2 * 3**(n - 1)
print(f"a_8 = {a_geom[7]}")      # 4374

# Partialsummen der geometrischen Reihe
S = np.cumsum(0.5**np.arange(0, 20))
print(f"S_20 = {S[-1]:.6f}")    # nahe 2.0
```

9.2 Zinseszins und Sparplan

Listing 2: Zinseszins und Sparplan

```python
import numpy as np

K0 = 10_000     # Anfangskapital
i = 0.04        # 4% p.a.
n = 20          # Jahre

# Endkapital
Kn = K0 * (1 + i)**n
print(f"Endkapital: {Kn:,.2f} EUR")

# Sparplan: monatliche Einzahlung 200 EUR, 5% p.a.
rate = 200
i_m = 0.05 / 12   # Monatszins
monate = 20 * 12
# Endwert eines Sparplans (nachschuessig)
EW = rate * ((1 + i_m)**monate - 1) / i_m
print(f"Sparplan-Endwert: {EW:,.2f} EUR")
```

9.3 Annuitaetenrechnung und Tilgungsplan

Listing 3: Tilgungsplan

```python
import numpy as np

K0 = 100_000    # Kreditbetrag
i = 0.05        # 5% Zinsen
```

```
n = 10            # Jahre
A = K0 * i * (1+i)**n / ((1+i)**n - 1)
print(f"Annuitaet: {A:,.2f} EUR")

# Tilgungsplan erstellen
R = K0
for k in range(1, n + 1):
    Z = i * R                      # Zinsen
    T = A - Z                      # Tilgung
    R = R - T                      # Restschuld
    print(f"Jahr {k:2d}: Z={Z:9,.2f}  T={T:9,.2f}  R={R:10,.2f}")
```

9.4 Logistisches Wachstum

Listing 4: Logistisches Wachstumsmodell

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

K = 10_000          # Tragfaehigkeit
P0 = 100            # Anfangswert
r = 0.5             # Wachstumsrate
c = (K - P0) / P0

t = np.linspace(0, 25, 500)
P = K / (1 + c * np.exp(-r * t))

plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(t, P, color='#3333B2', linewidth=2)
plt.axhline(y=K, color='gray', linestyle='--', label=f'K = {K}')
plt.xlabel('Zeit t')
plt.ylabel('P(t)')
plt.title('Logistisches Wachstum')
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.tight_layout()
plt.savefig('logistic_growth.pdf')
```

10 Zusammenfassung und Formelsammlung

Folgen

Typ	Explizite Formel	Partialsumme
Arithmetisch	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
Geometrisch	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$

Reihen

Reihe	Formel	Bedingung
Geometrisch	$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$	$\lvert q \rvert < 1$
Gauss	$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	endliche Summe
Harmonisch	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	divergiert!

Konvergenzkriterien

Kriterium	Konvergenz wenn
Quotientenkriterium	$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| < 1$
Wurzelkriterium	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|a_n\|} < 1$
Notwendige Bedingung	$a_n \to 0$ (nur notwendig, nicht hinreichend)

Finanzmathematik

Groesse	Formel
Zinseszins	$K_n = K_0(1+i)^n$
Stetige Verzinsung	$K(t) = K_0\mathrm{e}^{it}$
Barwert	$\mathrm{BW} = K_n(1+i)^{-n}$
72er-Regel	$n^* \approx 72/i_{\%}$
Annuitaet	$A = K_0 \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$
Rentenbarwertfaktor	$\mathrm{RBF} = \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$

Elastizitaet und Wachstum

Konzept	Formel
Preiselastizitaet	$E = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$
Exponentielles Wachstum	$P(t) = P_0\mathrm{e}^{rt}$
Logistisches Wachstum	$P(t) = \frac{K}{1+c\,\mathrm{e}^{-rt}}$