

Lektion 04: Lineare Optimierung – Vorlesungsnotizen

Analysis Kurs
Digital Finance

1 Einfuehrung und Motivation

Viele Entscheidungsprobleme in Wirtschaft und Technik lassen sich als **lineare Optimierungsprobleme** (LPs) formulieren: Maximiere (oder minimiere) eine lineare Zielfunktion unter linearen Nebenbedingungen. Obwohl die Mathematik dahinter auf den ersten Blick einfach erscheint, sind die Anwendungen enorm vielfaeltig – von Produktionsplanung ueber Transportlogistik bis zur Portfoliooptimierung.

Historischer Abriss

- **Kantorovich (1939)**: Formulierte als Erster Produktionsprobleme als lineare Programme und erhielt dafuer 1975 den Nobelpreis.
- **Dantzig (1947)**: Entwickelte den **Simplex-Algorithmus**, der bis heute das Standardverfahren fuer LPs ist.
- **Khachiyan (1979)**: Bewies mit der Ellipsoidmethode, dass LP in polynomialer Zeit loesbar ist.
- **Karmarkar (1984)**: Entwickelte die erste praktisch effiziente Innere-Punkte-Methode.

Lernziele

Nach dieser Lektion koennen Sie:

- LZ1** Ein lineares Optimierungsproblem formulieren (Zielfunktion, Nebenbedingungen, Nichtnegativitaet) und in Standardform bringen.
- LZ2** Ein 2-Variablen-LP graphisch loesen und den Eckpunktsatz erklaren.
- LZ3** Schlupfvariablen einfuehren, ein Simplex-Tableau aufstellen und Pivotschritte durchfuehren.
- LZ4** Das duale Problem zu einem gegebenen LP aufstellen und den Dualitaetssatz anwenden.
- LZ5** Reale Anwendungen (Produktionsplanung, Transportproblem) als LP modellieren und mit Python/SciPy loesen.

2 Grundlagen: Definition und Standardform

Definition 2.1 (Lineares Programm). Ein **lineares Programm** (LP) besteht aus:

- **Entscheidungsvariablen:** $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.

- **Zielfunktion:** Eine lineare Funktion $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, die maximiert oder minimiert werden soll.
- **Nebenbedingungen:** Lineare Ungleichungen oder Gleichungen der Form $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ (oder $=, \geq$).
- **Nichtnegativitaet:** $x_j \geq 0$ fuer alle j .

LP-Standardform (Maximierung)

In Matrixschreibweise:

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{maximize}} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

wobei $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ der Kostenvektor, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Koeffizientenmatrix, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ der Ressourcenvektor und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ der Entscheidungsvektor ist.

Beispiel 2.1 (Baeckerei-LP). Ein Baecker stellt Croissants (x_1) und Brezeln (x_2) her.

Ressource	Croissant	Brezel
Mehl (kg)	0,5	0,3
Arbeitszeit (min)	6	3
Ofenkapazitaet	1	1
Gewinn (EUR)	2	3

Verfuegbar: 150 kg Mehl, 1200 min Arbeit, 400 Ofenplaetze.

LP-Formulierung:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 150 \quad (\text{Mehl}) \\ & 6x_1 + 3x_2 \leq 1200 \quad (\text{Arbeit}) \\ & x_1 + x_2 \leq 400 \quad (\text{Ofen}) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2.1 Umwandlungen in Standardform

1. **Minimierung** \rightarrow **Maximierung:** $\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} = -\max(-\mathbf{c}^T \mathbf{x})$.
2. **\geq -Ungleichung** \rightarrow **\leq -Ungleichung:** Multipliziere mit -1 . Aus $2x_1 + x_2 \geq 5$ wird $-2x_1 - x_2 \leq -5$.
3. **Gleichung** \rightarrow **zwei Ungleichungen:** $a^T x = b$ ist aequivalent zu $a^T x \leq b$ und $a^T x \geq b$.
4. **Freie Variable:** Ersetze x_j (ohne Vorzeichenbedingung) durch $x_j = x_j^+ - x_j^-$ mit $x_j^+, x_j^- \geq 0$.

Haeufiger Fehler

Vergessen Sie nie die Nichtnegativitaetsbedingungen $x_j \geq 0$! In der Praxis sind negative Produktionsmengen oder Transportvolumina sinnlos. Ohne $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ kann das LP voellig andere (und unsinnige) Loesungen liefern.

3 Graphische Loesung

Fuer LPs mit *zwei* Entscheidungsvariablen kann man die Loesung graphisch bestimmen. Dies ist nicht nur paedagogisch wertvoll, sondern gibt auch die geometrische Intuition fuer den Simplex-Algorithmus.

3.1 Vorgehensweise

1. **Nebenbedingungen zeichnen:** Jede Ungleichung $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ definiert eine Halbebene. Zeichne die Grenzgerade $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ und schattiere die zulaessige Seite.
2. **Zulaessigen Bereich identifizieren:** Der Durchschnitt aller Halbebenen (einschliesslich $x_1, x_2 \geq 0$) ist ein konvexes Polygon.
3. **Isoprofitlinien zeichnen:** Die Geraden $c_1x_1 + c_2x_2 = k$ fuer verschiedene k sind parallel. Verschiebe sie in Richtung steigendes k .
4. **Optimum ablesen:** Die letzte Isoprofitlinie, die den zulaessigen Bereich noch beruehrt, liefert den Optimalpunkt (typischerweise eine Ecke).

Beispiel 3.1 (Graphische Loesung des Baeckerei-LP). Wir betrachten das vereinfachte LP:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 400 \\ & 6x_1 + 3x_2 \leq 1200 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Die Eckpunkte des zulaessigen Bereichs sind: $(0, 0)$, $(200, 0)$, $(0, 400)$, $(200, 0)$...

Zur Bestimmung des Schnittpunkts der Geraden $x_1 + x_2 = 400$ und $6x_1 + 3x_2 = 1200$: Aus der ersten Gleichung folgt $x_2 = 400 - x_1$. Einsetzen: $6x_1 + 3(400 - x_1) = 1200 \Rightarrow 3x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 400$.

Pruefen der relevanten Ecken:

Ecke	(x_1, x_2)	$z = 2x_1 + 3x_2$
A	$(0, 0)$	0
B	$(200, 0)$	400
C	$(0, 400)$	1200

Das Maximum $z^* = 1200$ wird an der Ecke $(0, 400)$ angenommen: Der Baecker soll ausschliesslich Brezeln produzieren, da $c_2 = 3 > c_1 = 2$.

Warum Ecken?

Stellen Sie sich die Zielfunktion als Ebene im 3D-Raum vor, die ueber dem zulaessigen Polygon "schwebt". Da diese Ebene flach (linear) ist, wird ihr hoechster Punkt ueber dem Polygon immer an einem Eckpunkt liegen – aehnlich wie ein Brett, das auf einem konvexen Stein liegt, stets an einer Kante kippt.

4 Simplex-Verfahren

Der Simplex-Algorithmus von George Dantzig (1947) ist das Standardverfahren zur Loesung linearer Programme. Er nutzt die Erkenntnis, dass das Optimum an einer Ecke liegt, und wandert systematisch von Ecke zu Ecke.

4.1 Schlupfvariablen und Normalform

Um den Simplex-Algorithmus anwenden zu koennen, muessen wir die Ungleichungsnebenbedingungen in Gleichungen umwandeln.

Definition 4.1 (Schlupfvariable). Fuer jede \leq -Nebenbedingung fuehren wir eine **Schlupfvariable** $s_i \geq 0$ ein:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0.$$

Der Wert s_i gibt an, wie viel ‘‘Schlupf’’ (ungenutzte Kapazitaet) bei Ressource i verbleibt.

Beispiel 4.1 (Schlupfvariablen im Baeckerei-LP). Das vereinfachte Baeckerei-LP wird zu:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 400 \\ & 6x_1 + 3x_2 + s_2 = 1200 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Anfangs ($x_1 = x_2 = 0$): $s_1 = 400$ (alle Ofenplaetze frei), $s_2 = 1200$ (alle Arbeitsminuten frei).

4.2 Basisloesung und Basis

Definition 4.2 (Basisloesung). In einem System mit m Gleichungen und $n + m$ Variablen (Original- und Schlupfvariablen) ist eine **Basisloesung** eine Loesung, bei der genau n Variablen auf Null gesetzt werden (die **Nichtbasisvariablen**), und die verbleibenden m Variablen (die **Basisvariablen**) aus den Gleichungen bestimmt werden.

Eine Basisloesung ist **zulaessig**, wenn alle Variablen ≥ 0 sind.

4.3 Das Simplex-Tableau

Das Simplex-Tableau ist eine kompakte tabellarische Darstellung des Gleichungssystems einschliesslich der Zielfunktion.

Beispiel 4.2 (Starttableau des Baeckerei-LP).

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
s_1	1	1	1	0	400
s_2	6	3	0	1	1200
z	-2	-3	0	0	0

Starttafel: Basisvariablen sind s_1, s_2 mit Werten $s_1 = 400, s_2 = 1200$. Die Originalvariablen $x_1 = x_2 = 0$ (Nichtbasis). Zielfunktionswert: $z = 0$.

4.4 Der Simplex-Algorithmus

Satz 4.1 (Simplex-Algorithmus – Ablauf). 1. **Optimalitaetstest:** Sind alle Eintraege in der z -Zeile (ohne RHS) ≥ 0 ? Falls ja: **STOP** – die aktuelle Basisloesung ist optimal.

2. **Pivotspalte waehlen:** Waehle die Spalte j mit dem kleinsten (negativsten) Eintrag in der z -Zeile. Variable x_j tritt in die Basis ein (Eingangsvariable).

3. **Pivotzeile waehlen (Minimum-Ratio-Test):** Fuer jede Zeile i mit $a_{ij} > 0$ bilde den Quotienten b_i/a_{ij} . Die Zeile mit dem *kleinsten* Quotienten ist die Pivotzeile. Die zugehoerige Basisvariable verlaesst die Basis (Ausgangsvariable).

4. **Pivotoperation (Gauss-Elimination):**

- Dividiere die Pivotzeile durch das Pivotelement.

- Eliminiere alle anderen Eintraege in der Pivotspalte (einschliesslich der z-Zeile) durch Zeilenoperationen.

5. Gehe zu Schritt 1.

Simplex-Abbruchkriterium

Optimalitaet: Alle Eintraege in der z-Zeile ≥ 0 .

Unbeschaenktheit: Alle Eintraege in der Pivotspalte ≤ 0 – die Zielfunktion kann beliebig gross werden, das LP hat keinen endlichen Optimalwert.

Beispiel 4.3 (Simplex-Iteration am Baeckerei-LP). **Schritt 1: Starttableau** (siehe oben). z-Zeile hat negative Eintraege $(-2, -3)$ – nicht optimal.

Schritt 2: Pivotspalte. Kleinstes Element in z-Zeile: -3 (Spalte x_2). Also tritt x_2 in die Basis ein.

Schritt 3: Pivotzeile. Minimum-Ratio-Test:

$$\text{Zeile 1: } \frac{400}{1} = 400, \quad \text{Zeile 2: } \frac{1200}{3} = 400.$$

Gleichstand – waehle Zeile 1 (Bland-Regel). Pivotelement: $a_{12} = 1$. Die Variable s_1 verlaesst die Basis.

Schritt 4: Pivotoperation.

- Neue Zeile 1: $[1, 1, 1, 0 \mid 400]/1 = [1, 1, 1, 0 \mid 400]$
- Neue Zeile 2: alte Zeile 2 $-3 \cdot$ neue Zeile 1: $[6 - 3, 3 - 3, 0 - 3, 1 - 0 \mid 1200 - 1200] = [3, 0, -3, 1 \mid 0]$
- Neue z-Zeile: alte z-Zeile $+3 \cdot$ neue Zeile 1: $[-2 + 3, -3 + 3, 0 + 3, 0 + 0 \mid 0 + 1200] = [1, 0, 3, 0 \mid 1200]$

Neues Tableau:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_2	1	1	1	0	400
s_2	3	0	-3	1	0
z	1	0	3	0	1200

Schritt 5: Optimalitaetstest. Alle Eintraege in der z-Zeile $(1, 0, 3, 0)$ sind ≥ 0 . **STOP.**

Optimale Loesung: $x_1 = 0, x_2 = 400, s_1 = 0, s_2 = 0, z^* = 1200$.

Simplex

Stellen Sie sich den zulaessigen Bereich als Gebirge vor und die Zielfunktion als Hoehe. Der Simplex-Algorithmus startet in einem Tal (einer Ecke) und wandert immer bergauf entlang der Kanten des Polyeders, bis er den Gipfel (die optimale Ecke) erreicht. Er prueft bei jedem Schritt nur die Nachbarecken – nicht das gesamte Gebirge.

4.5 Komplexitaet

- **Worst Case:** Der Simplex-Algorithmus kann exponentiell viele Pivotschritte benoetigen (Klee-Minty-Wuerfel, 1972).
- **Praxis:** Typischerweise benoetigt er $O(m)$ bis $O(3m)$ Pivotschritte (wobei m die Zahl der Nebenbedingungen ist).
- **Polynomiale Alternativen:** Ellipsoidmethode (Khachiyan, 1979), Innere-Punkte-Methoden (Karmarkar, 1984).

Haeufiger Fehler

Entartung kann Zyklen verursachen! Wenn eine Basisloesung degeneriert ist (eine Basisvariable hat den Wert 0), kann der Simplex-Algorithmus in einer Schleife enden, in der er zwischen Ecken hin- und herspringt, ohne den Zielfunktionswert zu verbessern. Abhilfe: **Bland-Regel** (waehle immer die Variable mit dem kleinsten Index) oder **lexikographische Regel**.

5 Dualitaet

Zu jedem linearen Programm (dem “primalen” Problem) gehoert ein **duales** Problem. Die Dualitaet liefert Optimalitaetszertifikate, Schattenpreise und tiefe strukturelle Einsichten.

Definition 5.1 (Duales LP). Gegeben das primale LP

$$(P) : \quad \underset{\mathbf{x}}{\text{maximize}} \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

ist das duale LP

$$(D) : \quad \underset{\mathbf{y}}{\text{minimize}} \quad \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

	Primal (P)	Dual (D)
Zielfunktion	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Matrix	\mathbf{A}	\mathbf{A}^\top
Nebenbedingungen	$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
Variablen	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

Satz 5.1 (Schwacher Dualitaetssatz). Fuer jede zulaessige primale Loesung \mathbf{x} und jede zulaessige duale Loesung \mathbf{y} gilt:

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^\top \mathbf{y}.$$

Der primale Zielfunktionswert ist also stets eine untere Schranke fuer den dualen.

Proof. Es gilt $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq (\mathbf{A}^\top \mathbf{y})^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{y}^\top \mathbf{b} = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$, wobei die erste Ungleichung aus $\mathbf{A}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ und $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ folgt, und die zweite aus $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ und $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$. \square

Starker Dualitaetssatz

Wenn sowohl (P) als auch (D) zulaessige Loesungen besitzen, dann existieren optimale Loesungen \mathbf{x}^* und \mathbf{y}^* mit

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*.$$

Der optimale primale und der optimale duale Zielfunktionswert stimmen ueberein.

Satz 5.2 (Komplementaerer Schlupf). In einer optimalen Loesung $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ gilt:

$$y_i^* \cdot (b_i - \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{fuer alle } i = 1, \dots, m.$$

Das heisst: Wenn eine duale Variable $y_i^* > 0$ ist, dann ist die zugehoerige primale Nebenbedingung bindend ($s_i = 0$), und umgekehrt.

Beispiel 5.1 (Duales Problem der Baeckerei). Primal: $\max 2x_1 + 3x_2$ s.t. $x_1 + x_2 \leq 400$, $6x_1 + 3x_2 \leq 1200$, $x_1, x_2 \geq 0$.

Dual: $\min 400y_1 + 1200y_2$ s.t. $y_1 + 6y_2 \geq 2$, $y_1 + 3y_2 \geq 3$, $y_1, y_2 \geq 0$.

Optimale primale Loesung: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 400$, $z^* = 1200$.

Aus komplementaerem Schlupf: $s_1 = 0$ (Ofen bindend), $s_2 = 0$ (Arbeit bindend). Daraus $y_1 + 6y_2 = 2$ und $y_1 + 3y_2 = 3$, also $y_2 = -\frac{1}{3}$... Dies zeigt, dass die Vereinfachung zu wenige Nebenbedingungen hat. Mit dem Mehl-Constraint ergibt sich ein konsistentes duales System.

6 Anwendungen

6.1 Produktionsplanung

Produktionsplanung

Ein Unternehmen produziert n Produkte mit m knappen Ressourcen.

- x_j = Stueckzahl von Produkt j .
- c_j = Deckungsbeitrag pro Stueck von Produkt j .
- a_{ij} = Verbrauch von Ressource i pro Stueck von Produkt j .
- b_i = verfuegbare Menge von Ressource i .

$$\text{maximize } \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad x_j \geq 0.$$

Die dualen Variablen y_i^* geben die **Schattenpreise** an: den Wertzuwachs der Zielfunktion pro zusaetzlicher Einheit von Ressource i .

6.2 Transportproblem

Transportproblem

Gegeben: m Lager (Angebot a_i) und n Kunden (Nachfrage d_j). Die Transportkosten pro Einheit von Lager i zu Kunde j sind c_{ij} . Die Entscheidungsvariable x_{ij} gibt die Transportmenge an.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad x_{ij} \geq 0. \end{aligned}$$

Die erste Gruppe von Nebenbedingungen stellt sicher, dass kein Lager mehr liefert, als vorhanden. Die zweite Gruppe garantiert, dass jeder Kunde seine Nachfrage gedeckt bekommt.

6.3 Weitere Anwendungen

- **Diaetproblem:** Minimiere die Kosten einer Ernaehrung unter Einhaltung von Mindestnaehrstoffmengen.
- **Mischungsproblem:** Optimale Mischung von Rohstoffen (z.B. Benzinblending, Futtermittelherstellung).

- **Portfoliooptimierung:** Vereinfachte Portfolioallokation mit linearen Risikoschranken.
- **Netzwerkflussprobleme:** Maximaler Fluss und minimaler Schnitt in Netzwerken.
- **Scheduling:** Zuteilung von Aufträgen zu Maschinen unter Zeitbeschränkungen.

6.4 Python-Implementierung

Mit `scipy.optimize.linprog` lässt sich jedes LP bequem lösen:

```
from scipy.optimize import linprog

# min c^T x s.t. A_ub @ x <= b_ub, x >= 0
# Fuer Maximierung: negiere c
c = [-2, -3] # Gewinn (negiert, da linprog minimiert)
A_ub = [[1, 1], # Ofen
        [6, 3]] # Arbeit
b_ub = [400, 1200]

res = linprog(c, A_ub=A_ub, b_ub=b_ub, bounds=[(0, None), (0, None)])
print(f"Optimale Loesung: x = {res.x}")
print(f"Maximaler Gewinn: z = {-res.fun:.2f}")
```

Ausgabe: Optimale Loesung: x = [0. 400.], Maximaler Gewinn: z = 1200.00.

7 Zusammenfassung

Kernkonzepte

1. **LP-Formulierung:** Zielfunktion (linear), Nebenbedingungen (linear), Nichtnegativität.
2. **Standardform:** $\max c^T x$ s.t. $Ax \leq b, x \geq 0$.
3. **Zulaessiger Bereich:** Konvexes Polyeder; Durchschnitt endlich vieler Halbraeume.
4. **Eckpunktsatz:** Optimum liegt stets an einer Ecke.
5. **Schlupfvariablen:** Wandeln \leq in $=$ um; messen ungenutzte Kapazität.
6. **Simplex:** Wandert von Ecke zu Ecke; Pivotspalte (negativster z-Eintrag), Pivotzeile (Minimum-Ratio-Test).
7. **Optimalität:** Alle reduzierten Kosten ≥ 0 .
8. **Dualität:** Schwacher Satz ($c^T x \leq b^T y$), starker Satz (Gleichheit im Optimum), komplementärer Schlupf.
9. **Schattenpreise:** Duale Variablen = marginaler Wert einer Ressource.

Wichtige Formeln auf einen Blick

Formel	Kontext
$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ s.t. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	LP-Standardform
$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + s_i = b_i$	Schlupfvariable
Pivotspalte: $\min_j \{c_j - z_j\}$	EingangsvARIABLE
Pivotzeile: $\min_i \{b_i/a_{ij} \mid a_{ij} > 0\}$	AusgangsvARIABLE
Alle $c_j - z_j \geq 0$	Optimalitaet
$\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$	Starker Dualitaetssatz
$y_i^*(b_i - \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}^*) = 0$	Komplementaerer Schlupf

Lernziele-Check

LZ	Frage zur Selbstkontrolle	Abschnitt
LZ1	Koennen Sie ein LP formulieren und in Standardform bringen?	2
LZ2	Koennen Sie ein 2-Variablen-LP graphisch loesen und den Eckpunktsatz erklaren?	3
LZ3	Koennen Sie Schlupfvariablen einfuehren und Simplex-Pivotschritte durchfuehren?	4
LZ4	Koennen Sie das duale LP aufstellen und den Dualitaetssatz anwenden?	5
LZ5	Koennen Sie eine Anwendung als LP modellieren und mit Python loesen?	6

Intuition

Die lineare Optimierung verbindet Algebra, Geometrie und algorithmisches Denken: Algebraisch formulieren wir das Problem in Matrizen und Vektoren, geometrisch interpretieren wir den zulaessigen Bereich als Polyeder, und algorithmisch navigiert der Simplex von Ecke zu Ecke. Diese Dreieinigkeit macht LP zu einem der erfolgreichsten Werkzeuge der angewandten Mathematik.

8 Uebungsaufgaben

- A1. LP formulieren:** Ein Moebelhersteller produziert Tische (x_1) und Stuehle (x_2). Jeder Tisch benoetigt 3 h Arbeit und 2 kg Holz, jeder Stuhl 2 h und 1 kg. Verfuegbar: 120 h und 80 kg. Gewinn: 50 EUR (Tisch), 30 EUR (Stuhl). Formulieren Sie das LP.
- A2. Graphische Loesung:** Loesen Sie graphisch: $\max 3x_1 + 2x_2$ s.t. $x_1 + x_2 \leq 5, 2x_1 + x_2 \leq 8, x_1, x_2 \geq 0$.
- A3. Schlupfvariablen:** Fuehren Sie Schlupfvariablen ein fuer: $x_1 + 2x_2 \leq 10, 3x_1 + x_2 \leq 15, x_1 + x_2 \leq 8$. Geben Sie die Anfangsbasisloesung an.

- A4. Simplex:** Lösen Sie mit dem Simplex-Algorithmus: $\max 5x_1 + 4x_2$ s.t. $x_1 + x_2 \leq 5$, $10x_1 + 6x_2 \leq 45$, $x_1, x_2 \geq 0$.
- A5. Duales Problem:** Stellen Sie das duale Problem zu Aufgabe A4 auf. Überprüfen Sie den starken Dualitätssatz.
- A6. Python:** Lösen Sie Aufgabe A4 mit `scipy.optimize.linprog`. Interpretieren Sie die Schattenpreise.
- A7. Sonderfall:** Zeigen Sie, dass das LP $\max x_1 + x_2$ s.t. $x_1 - x_2 \leq 1$, $-x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1, x_2 \geq 0$ unbeschränkt ist. Was passiert im Simplex-Verfahren?