Lektion 03: Komplexe Zahlen – Vorlesungsnotizen

Analysis Kurs
Digital Finance

1 Einfuehrung und Motivation

Viele algebraische Gleichungen besitzen keine reelle Loesung. Die einfachste ist $x^2+1=0$: Kein $x \in \mathbb{R}$ erfuellt $x^2=-1$, denn Quadrate reeller Zahlen sind stets nichtnegativ. Die komplexen Zahlen erweitern $\mathbb{R}$ genau so, dass *jedes* Polynom vollstaendig zerfaellt – ein Ergebnis, das als **Fundamentalsatz der Algebra** bekannt ist.

Historischer Abriss

- **Cardano (1545):** Stiess bei der Loesung kubischer Gleichungen auf Ausdruecke mit $\sqrt{-1}$ und nannte sie "nutzlos".
- **Euler (1748):** Fuehrte die Schreibweise $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ ein und entdeckte die Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$.
- **Gauss (1799):** Bewies den Fundamentalsatz der Algebra und deutete komplexe Zahlen als Punkte in der Ebene.

Lernziele

Nach dieser Lektion koennen Sie:

LZ1 Komplexe Zahlen in Normalform $z = a + b\mathrm{i}$ definieren und arithmetisch verknuepfen.

LZ2 Betrag, Konjugierte und die Gausssche Zahlenebene verwenden.

LZ3 Komplexe Zahlen in Polarform darstellen und die Eulersche Formel anwenden.

LZ4 Potenzen und n-te Wurzeln mit dem Satz von de Moivre berechnen.

LZ5 Anwendungen in der Wechselstromtechnik, Signalverarbeitung und Finanzmathematik skizzieren.

LZ6 Einfache Rechnungen mit Python (`cmath`, `numpy`) durchfuehren.

2 Definition und Normalform

Definition 2.1 (Imaginaere Einheit)**.** Die **imaginaere Einheit** i ist definiert durch

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Definition 2.2 (Komplexe Zahl)**.** Eine **komplexe Zahl** z hat die Form

$$z = a + b\mathrm{i}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Dabei heisst $a = \mathrm{Re}(z)$ der **Realteil** und $b = \mathrm{Im}(z)$ der **Imaginaerteil**. Die Menge aller komplexen Zahlen ist $\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Gleichheit komplexer Zahlen

Zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$ und $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$ sind genau dann gleich, wenn

$$a_1 = a_2 \quad \text{und} \quad b_1 = b_2.$$

Gleichheit erfordert also Uebereinstimmung in *beiden* Komponenten.

Beispiel 2.1 (Spezialfaelle).

- $z = 3 + 0\mathrm{i} = 3$ ist eine reelle Zahl ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
- $z = 0 + 4\mathrm{i} = 4\mathrm{i}$ ist **rein imaginaer**.
- $z = 0 + 0\mathrm{i} = 0$ ist die komplexe Null.

Beispiel 2.2 (Realteil und Imaginaerteil bestimmen). $z = -2 + 5\mathrm{i}$: $\quad \mathrm{Re}(z) = -2, \quad \mathrm{Im}(z) = 5.$
$w = 7 - 3\mathrm{i}$: $\quad \mathrm{Re}(w) = 7, \quad \mathrm{Im}(w) = -3.$
Beachte: Der Imaginaerteil ist *reell* (hier -3, nicht $-3\mathrm{i}$).

Haeufiger Fehler

Der Imaginaerteil $\mathrm{Im}(z)$ ist eine **reelle Zahl**, nicht der "imaginaere Anteil" $b\mathrm{i}$. Fuer $z = 2 - 7\mathrm{i}$ ist $\mathrm{Im}(z) = -7$ (nicht $-7\mathrm{i}$).

Intuition

$\mathbb{R}$ ist in $\mathbb{C}$ eingebettet: Jede reelle Zahl a ist die komplexe Zahl $a + 0\mathrm{i}$. Die Erweiterung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist die kleinstmoegliche, in der $x^2 + 1 = 0$ loesbar wird.

3 Gaussche Zahlenebene

Die komplexe Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ laesst sich als Punkt (a, b) in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen. Diese geometrische Deutung heisst **Gausssche Zahlenebene** (oder Argand-Diagramm).

- Die **horizontale Achse** (Abszisse) traegt den Realteil – sie heisst **reelle Achse**.
- Die **vertikale Achse** (Ordinate) traegt den Imaginaerteil – sie heisst **imaginaere Achse**.
- Der **Ursprung** entspricht $z = 0$.

Beispiel 3.1 (Punkte in der Gaussschen Ebene). $z_1 = 3 + 2\mathrm{i}$ liegt bei $(3, 2)$; $z_2 = -1 + 4\mathrm{i}$ bei $(-1, 4)$; $z_3 = -2 - 3\mathrm{i}$ bei $(-2, -3)$. Die reellen Zahlen liegen alle auf der horizontalen Achse, die rein imaginaeren auf der vertikalen.

Intuition

Die Gausssche Ebene macht die Arithmetik komplexer Zahlen *geometrisch sichtbar*: Addition wird zur Vektoraddition, Multiplikation zur Drehstreckung. Diese Verknuepfung von Algebra und Geometrie ist die eigentliche Staerke der komplexen Zahlen.

Haeufiger Fehler

Verwechseln Sie die Gausssche Zahlenebene nicht mit dem $\mathbb{R}^2$: Zwar stimmen die Punkte ueberein, aber $\mathbb{C}$ besitzt eine *Multiplikation*, die $\mathbb{R}^2$ als Vektorraum nicht hat.

4 Grundrechenarten

Seien $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$ und $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$ komplexe Zahlen.

4.1 Addition und Subtraktion

Definition 4.1 (Addition und Subtraktion)**.**

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}, \qquad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathrm{i}.$$

Addition und Subtraktion erfolgen **komponentenweise**, genau wie bei Vektoren im $\mathbb{R}^2$.

Beispiel 4.1 (Addition und Subtraktion)**.** $z_1 = 3 + 2\mathrm{i}$, $\quad z_2 = 1 - 5\mathrm{i}$:

$$z_1 + z_2 = 4 - 3\mathrm{i}, \qquad z_1 - z_2 = 2 + 7\mathrm{i}.$$

4.2 Multiplikation

Definition 4.2 (Multiplikation)**.**

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathrm{i}.$$

Man multipliziert “wie Binome” und ersetzt i^2 durch -1.

Multiplikation ausfuehrlich

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1\mathrm{i})(a_2 + b_2\mathrm{i}) \\ &= a_1a_2 + a_1b_2\mathrm{i} + b_1a_2\mathrm{i} + b_1b_2\mathrm{i}^2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Beispiel 4.2 (Multiplikation)**.** $(2 + 3\mathrm{i})(4 - \mathrm{i}) = 8 - 2\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2 = 8 + 10\mathrm{i} - 3(-1) = 11 + 10\mathrm{i}$.

Haeufiger Fehler

Vergessen Sie beim Ausmultiplizieren nicht, $\mathrm{i}^2 = -1$ einzusetzen! Ein haeufiger Fehler ist, den Term $b_1b_2\mathrm{i}^2$ als $+b_1b_2$ statt $-b_1b_2$ zu behandeln.

4.3 Division

Division durch konjugiert Erweitern

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1\mathrm{i})(a_2 - b_2\mathrm{i})}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Im Nenner steht eine *reelle* Zahl, da $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$.

Beispiel 4.3 (Division)**.**

$$\frac{3 + 4\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}} = \frac{(3 + 4\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})}{(1 - 2\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})} = \frac{3 + 6\mathrm{i} + 4\mathrm{i} + 8\mathrm{i}^2}{1 + 4} = \frac{-5 + 10\mathrm{i}}{5} = -1 + 2\mathrm{i}.$$

Haeufiger Fehler

Bei der Division **niemals** einfach Real- und Imaginaerteile getrennt dividieren! $\frac{a_1+b_1\mathrm{i}}{a_2+b_2\mathrm{i}} \neq \frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2}\mathrm{i}$. Immer mit der Konjugierten erweitern.

4.4 Rechengesetze

Koerperaxiome von $\mathbb{C}$

Fuer alle $z, w, u \in \mathbb{C}$:

$$z + w = w + z, \quad z \cdot w = w \cdot z \qquad \text{(Kommutativitaet)} \tag{1}$$
$$(z + w) + u = z + (w + u), \quad (z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u) \qquad \text{(Assoziativitaet)} \tag{2}$$
$$z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u \qquad \text{(Distributivitaet)} \tag{3}$$

Neutrales Element der Addition: $0 = 0 + 0\mathrm{i}$. Neutrales Element der Multiplikation: $1 = 1 + 0\mathrm{i}$.
$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein **Koerper** – allerdings **nicht angeordnet** (es gibt keine sinnvolle Ordnung "$<$" auf $\mathbb{C}$).

Haeufiger Fehler

Ausdruecke wie $z_1 < z_2$ fuer komplexe Zahlen sind **sinnlos**, sofern z_1, z_2 nicht beide reell sind. Man kann nur die *Betraege* vergleichen: $|z_1| < |z_2|$.

5 Betrag und Konjugierte

5.1 Konjugiert komplexe Zahl

Definition 5.1 (Konjugierte)**.** Die **konjugiert komplexe Zahl** zu $z = a + b\mathrm{i}$ ist

$$\overline{z} = a - b\mathrm{i}.$$

Geometrisch: Spiegelung an der reellen Achse.

Rechenregeln fuer die Konjugierte

$$\overline{(\overline{z})} = z \tag{4}$$
$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \tag{5}$$
$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \tag{6}$$
$$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \tag{7}$$
$$z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) \tag{8}$$

Beispiel 5.1 (Konjugierte berechnen)**.** $z = 4 - 3\mathrm{i}$: $\quad \overline{z} = 4 + 3\mathrm{i}$. Kontrolle: $z + \overline{z} = 8 = 2 \cdot 4 = 2\,\mathrm{Re}(z)$ ✓

5.2 Betrag (Modulus)

Definition 5.2 (Betrag)**.** Der **Betrag** (Modulus) von $z = a + b\mathrm{i}$ ist

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0.$$

Geometrisch: Abstand des Punktes z vom Ursprung in der Gaussschen Ebene.

Fundamentale Beziehung $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 .$$

Diese Identitaet ist der Schluessel zur Division und zu vielen Beweisen.

Beispiel 5.2 (Betrag berechnen)**.** $z = 3 + 4i$: $|z| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.
$w = -1 - i$: $|w| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$.
Kontrolle: $z \cdot \overline{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 9 + 16 = 25 = |z|^2$ ✓

Eigenschaften des Betrags

Fuer alle $z, w \in \mathbb{C}$:

$$|z| \geq 0, \quad \text{mit } |z| = 0 \iff z = 0 \qquad \text{(Definitheit)} \tag{9}$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \qquad \text{(Multiplikativitaet)} \tag{10}$$

$$|z + w| \leq |z| + |w| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \tag{11}$$

$$|\overline{z}| = |z| \qquad \text{(Konjugation aendert Betrag nicht)} \tag{12}$$

Intuition

Die Dreiecksungleichung besagt geometrisch: Der direkte Weg (Summe) ist nie laenger als der Umweg ueber die einzelnen Vektoren. In der Gaussschen Ebene: Die Laenge der Diagonale eines "Vektorparallelogramms" ist hoechstens die Summe der Seitenlaengen.

Haeufiger Fehler

$|z + w| \neq |z| + |w|$ im Allgemeinen! Gleichheit gilt nur, wenn z und w in dieselbe Richtung zeigen (d. h. $w = \lambda z$ mit $\lambda \geq 0$). Analoger Fehler: $|z|^2 \neq z^2$ (ausser $z \in \mathbb{R}$).

6 Polarform

6.1 Polarkoordinaten

Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ laesst sich durch ihren Betrag $r = |z|$ und ihren **Winkel** (Argument) φ beschreiben:

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \qquad r > 0,\ \varphi \in (-\pi, \pi].$$

Definition 6.1 (Argument)**.** Das **Argument** von $z = a + bi \neq 0$ ist der Winkel $\varphi = \mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$, gemessen von der positiven reellen Achse gegen den Uhrzeigersinn. Es gilt:

$$\tan\varphi = \frac{b}{a} \quad (\text{fuer } a \neq 0),$$

wobei der Quadrant beachtet werden muss.

Umrechnung Normalform ↔ Polarform

Normalform → Polar:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \varphi = \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{atan2}(b, a).$$

Polar → Normalform:

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi.$$

Beispiel 6.1 (Umrechnung in Polarform)**.** $z = 1 + \mathrm{i}$: $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\quad \varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$. Also $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Haeufiger Fehler

$\arctan(b/a)$ allein liefert den Winkel nur im 1. und 4. Quadranten korrekt. Liegt z im 2. oder 3. Quadranten, muss π addiert oder subtrahiert werden. Verwenden Sie in der Praxis die Funktion $\operatorname{atan2}(b, a)$.

6.2 Eulersche Formel

Eulersche Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi.$$

Damit laesst sich jede komplexe Zahl $z \neq 0$ schreiben als

$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \qquad r = |z|\,,\ \varphi = \operatorname{Arg}(z).$$

Beispiel 6.2 (Spezielle Werte der Eulerschen Formel)**.**

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0} &= 1, \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} &= \mathrm{i}, \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} &= -1 \quad \text{(Eulersche Identitaet: } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0\text{)}, \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 3\pi/2} &= -\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Intuition

Die Eulersche Formel verknuepft die Exponentialfunktion mit Sinus und Kosinus. Geometrisch beschreibt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ einen Punkt auf dem **Einheitskreis** (Radius 1) unter dem Winkel φ. Multiplikation mit r skaliert den Radius.

6.3 Multiplikation und Division in Polarform

Multiplikation und Division in Polarform

Fuer $z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad \text{(Betraege multiplizieren, Winkel addieren)} \tag{13}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad \text{(Betraege dividieren, Winkel subtrahieren)} \tag{14}$$

Beispiel 6.3 (Multiplikation in Polarform)**.** $z_1 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$, $\quad z_2 = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$:

$$z_1 \cdot z_2 = 6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/6+\pi/3)} = 6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = 6\mathrm{i}.$$

Intuition

Multiplikation in $\mathbb{C}$ ist eine **Drehstreckung**: Der Betrag wird gestreckt (Faktor r_2), der Winkel gedreht (um φ_2). Daher ist Multiplikation mit $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$ eine Drehung um 90.

7 Potenzen und Wurzeln

7.1 Satz von de Moivre

Satz 7.1 (de Moivre)**.** Fuer $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$z^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = r^n\big(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)\big).$$

Satz von de Moivre

$$\big(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\big)^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi).$$

Potenzieren einer komplexen Zahl: Betrag potenzieren, Winkel mit n multiplizieren.

Beispiel 7.1 (Potenz berechnen)**.** $(1+\mathrm{i})^8$: $\quad r = \sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$.

$$(1+\mathrm{i})^8 = (\sqrt{2})^8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 8\cdot\pi/4} = 16 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi} = 16 \cdot 1 = 16.$$

Kontrolle: $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$, $(2\mathrm{i})^2 = -4$, $(-4)^2 = 16$ ✓

7.2 n-te Wurzeln

Satz 7.2 (n-te Wurzeln einer komplexen Zahl)**.** Fuer $w = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, besitzt die Gleichung $z^n = w$ genau n Loesungen:

$$z_k = \sqrt[n]{R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Phi + 2\pi k)/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Die n Wurzeln liegen auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{R}$, gleichmaessig verteilt im Abstand $\frac{2\pi}{n}$.

Beispiel 7.2 (Dritte Wurzeln von $z = 8$)**.** $w = 8 = 8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0}$, also $R = 8$, $\Phi = 0$, $n = 3$:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\,\mathrm{e}^{0} = 2, \\ z_1 &= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi/3} = 2\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}, \\ z_2 &= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 4\pi/3} = 2\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = -1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Die drei Wurzeln bilden ein gleichseitiges Dreieck auf dem Kreis mit Radius 2.

7.3 Einheitswurzeln

Definition 7.1 (Einheitswurzeln)**.** Die n**-ten Einheitswurzeln** sind die Loesungen von $z^n = 1$:

$$\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi k/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Mit $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi/n}$ (primitive n-te Einheitswurzel) gilt $\omega_k = \omega^k$.

Summe der Einheitswurzeln

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.$$

Die n-ten Einheitswurzeln heben sich bei Summation exakt auf – sie bilden ein regulaeres n-Eck, dessen Schwerpunkt im Ursprung liegt.

Beispiel 7.3 (Vierte Einheitswurzeln)**.** $n = 4$: $\quad \omega = e^{i\pi/2} = i$.

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = i, \quad \omega_2 = -1, \quad \omega_3 = -i.$$

Summe: $1 + i + (-1) + (-i) = 0$ ✓

8 Anwendungen

8.1 Wechselstromtechnik und Impedanz

Komplexe Impedanz in der Elektrotechnik

In der Wechselstromtechnik werden Spannungen und Stroeme als komplexe Zeiger dargestellt: $U(t) = \hat{U}\, e^{i\omega t}$.
Die **Impedanz** (komplexer Widerstand) eines Bauteils ist:

- Ohmscher Widerstand: $Z_R = R \quad$ (rein reell)
- Kondensator: $Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C} \quad$ (rein imaginaer)
- Spule: $Z_L = i\omega L \quad$ (rein imaginaer)

Serienschaltung: $Z_{\text{ges}} = Z_R + Z_L + Z_C$.
Das Ohmsche Gesetz wird komplex: $U = Z \cdot I$. Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom ergibt sich direkt aus $\operatorname{Arg}(Z)$.

Beispiel 8.1 (RC-Serienschaltung)**.** $R = 100\,\Omega$, $C = 10\,\mu\text{F}$, $\omega = 1000\,\text{s}^{-1}$:

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} = 100 - \frac{i}{1000 \cdot 10^{-5}} = 100 - 100i\ \Omega.$$

Betrag: $|Z| = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2} \approx 141\,\Omega$.
Phasenwinkel: $\varphi = \arctan(-1) = -\pi/4 = -45$ (Strom eilt Spannung voraus).

8.2 Signalverarbeitung: Fourier-Motivation

Fourier-Darstellung mit komplexen Exponentialen

Die **Fourier-Reihe** stellt ein periodisches Signal als Summe komplexer Exponentialfunktionen dar:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ik\omega_0 t}, \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-ik\omega_0 t}\, dt.$$

Die komplexe Schreibweise ist kompakter und rechnerisch einfacher als die reelle Form mit Sinus und Kosinus. Jeder Koeffizient $c_k \in \mathbb{C}$ codiert Amplitude ($|c_k|$) und Phase ($\operatorname{Arg}(c_k)$) der k-ten Harmonischen.

Die **diskrete Fourier-Transformation** (DFT), Basis moderner Signalverarbeitung, nutzt exakt die n-ten Einheitswurzeln als Basisfunktionen.

8.3 Finanzmathematische Modelle

Komplexe Zahlen in der Finanzmathematik

Obwohl Finanzgroessen reell sind, treten komplexe Zahlen in fortgeschrittenen Modellen auf:

- **Charakteristische Funktion:** Die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen X ist $\phi_X(u) = E[e^{iuX}] \in \mathbb{C}$. Im Heston-Modell laesst sich der Optionspreis ueber ϕ_X in geschlossener Form darstellen.
- **Fourier-Pricing:** Carr und Madan (1999) berechnen Optionspreise mittels Fourier-Inversion: $C(K) = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^\infty e^{-iv \ln K}\, \psi(v)\, dv$, wobei ψ von der charakteristischen Funktion abhaengt.
- **Eigenwertprobleme:** Bei Markov-Ketten mit oszillierendem Verhalten koennen komplexe Eigenwerte auftreten; ihr Betrag bestimmt die Konvergenzgeschwindigkeit, ihr Argument die Oszillationsfrequenz.

9 Python-Beispiele

9.1 Das cmath-Modul

```
import cmath

z1 = 3 + 4j          # Komplexe Zahl (Python: j statt i)
z2 = 1 - 2j

# Grundrechenarten
print(z1 + z2)        # (4+2j)
print(z1 * z2)        # (11-2j)
print(z1 / z2)        # (-1+2j)

# Betrag und Argument
print(abs(z1))         # 5.0
print(cmath.phase(z1)) # 0.9272... (Winkel in Radiant)

# Polarform
r, phi = cmath.polar(z1)
print(f"r = {r:.4f}, phi = {phi:.4f}")   # r = 5.0000, phi = 0.9273

# Zurueck in Normalform
z_back = cmath.rect(r, phi)
print(z_back)          # (3+4j)

# Eulersche Formel pruefen
import math
phi_test = math.pi / 4
```

```
euler_val = cmath.exp(1j * phi_test)
trig_val = math.cos(phi_test) + 1j * math.sin(phi_test)
print(f"Euler: {euler_val:.4f}, Trig: {trig_val:.4f}")  # identisch
```

9.2 Komplexe Zahlen mit numpy

```
import numpy as np

# Array komplexer Zahlen
z = np.array([1+1j, 2-3j, -1+0.5j])

print(np.abs(z))        # Betraege: [1.4142, 3.6056, 1.1180]
print(np.angle(z))       # Argumente in Radiant
print(z.real)            # Realteile: [1., 2., -1.]
print(z.imag)            # Imaginaerteile: [1., -3., 0.5]
print(np.conj(z))        # Konjugierte

# n-te Einheitswurzeln
n = 6
k = np.arange(n)
roots = np.exp(2j * np.pi * k / n)
print(np.round(roots, 4))
print(f"Summe: {np.sum(roots):.2e}")  # ~0 (numerisch)
```

10 Zusammenfassung

Kernkonzepte

1. **Imaginaere Einheit:** $\mathrm{i}^2 = -1$ erweitert $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$.
2. **Normalform:** $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.
3. **Gausssche Ebene:** z als Punkt (a, b); Addition = Vektoraddition.
4. **Grundrechenarten:** Addition komponentenweise; Multiplikation "wie Binome" mit $\mathrm{i}^2 = -1$; Division durch konjugiert Erweitern.
5. **Betrag:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.
6. **Polarform:** $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$; Multiplikation = Drehstreckung.
7. **Eulersche Formel:** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$.
8. **De Moivre:** $z^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$; n-te Wurzeln: n gleichverteilte Punkte auf Kreis.
9. **Anwendungen:** Impedanz, Fourier-Analyse, Finanz-Pricing.

Wichtige Formeln auf einen Blick

Formel	Kontext
$z = a + b\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^2 = -1$	Normalform
$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	Betrag (Modulus)
$z \cdot \overline{z} = \lvert z\rvert^2$	Betrag und Konjugierte
$\lvert z + w\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert w\rvert$	Dreiecksungleichung
$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$	Polarform (Euler)
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$	Eulersche Formel
$z_1 z_2 = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$	Multiplikation polar
$z^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$	Satz von de Moivre
$z_k = \sqrt[n]{R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Phi+2\pi k)/n}$	n-te Wurzeln
$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$	Summe der Einheitswurzeln
$Z = R + \mathrm{i}\omega L + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}$	Komplexe Impedanz

Lernziele-Check

LZ	Frage zur Selbstkontrolle	Abschnitt
LZ1	Koennen Sie komplexe Zahlen in Normalform addieren, multiplizieren und dividieren?	2, 4
LZ2	Beherrschen Sie Betrag, Konjugierte und die Dreiecksungleichung?	5
LZ3	Koennen Sie zwischen Normalform und Polarform umrechnen?	6
LZ4	Wenden Sie den Satz von de Moivre an und bestimmen n-te Wurzeln?	7
LZ5	Kennen Sie Anwendungen in Technik und Finanzmathematik?	8
LZ6	Koennen Sie einfache Rechnungen mit Python (`cmath`) durchfuehren?	9

Intuition

Die komplexen Zahlen vereinen Algebra und Geometrie auf elegante Weise: Jede algebraische Operation (Addition, Multiplikation, Potenzieren) hat eine klare geometrische Deutung (Translation, Drehstreckung, Winkelmultiplikation). Diese Dualitaet macht $\mathbb{C}$ zu einem unverzichtbaren Werkzeug in Mathematik, Physik und quantitativer Finanzwissenschaft.