Lektion 02: Vektoren und Matrizen

Analysis Kurs
Digital Finance

1 Einleitung

Vektoren und Matrizen bilden das Fundament der linearen Algebra und durchdringen nahezu alle quantitativen Disziplinen: Portfolios als Vektoren, Kovarianzstrukturen als Matrizen, Leontief-Modelle als Input-Output-Matrizen. Diese Lektion fuehrt systematisch in Begriffe, Rechenregeln und Anwendungen ein.

Lernziele

Nach dieser Lektion koennen Sie:

LZ1 Vektoren im $\mathbb{R}^n$ definieren, geometrisch interpretieren und verschiedene Darstellungsformen (Spalten-, Zeilenvektor) verwenden.

LZ2 Vektoroperationen (Addition, Skalarmultiplikation, Skalarprodukt, Kreuzprodukt) berechnen und geometrisch deuten.

LZ3 Matrizen definieren, wichtige Matrizentypen erkennen und Matrizenoperationen durchfuehren.

LZ4 Determinanten berechnen und inverse Matrizen bestimmen.

LZ5 Lineare Gleichungssysteme mit dem Gauss-Verfahren loesen.

LZ6 Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen und wirtschaftliche Anwendungen (Leontief, Markov, Portfolio) modellieren.

2 Vektorbegriff und Darstellungen

Definition 2.1 (Vektor)**.** Ein **Vektor** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist ein geordnetes n-Tupel reeller Zahlen: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Die Zahlen $v_1, \ldots, v_n$ heissen **Komponenten**. Ein **Spaltenvektor** ist eine $n \times 1$-Matrix, ein **Zeilenvektor** $\mathbf{v}^\mathsf{T}$ eine $1 \times n$-Matrix.

Intuition

Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ kann man sich einen Vektor als Pfeil vorstellen: Er hat eine *Richtung* und eine *Laenge* (Betrag). Der **Ortsvektor** ist der Pfeil vom Ursprung zum Punkt $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Zwei Pfeile, die durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen, repraesentieren denselben Vektor.

Beispiel 2.1 (Vektoren im $\mathbb{R}^3$)**.** $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ beschreibt einen Pfeil vom Ursprung zum Punkt $(2, -1, 3)$ mit Laenge $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$.

Haeufiger Fehler

Verwechseln Sie nicht *Punkt* und *Vektor*: Ein Punkt $P = (2, 3)$ ist eine feste Position; der Ortsvektor $\mathbf{p} = \binom{2}{3}$ ist der Pfeil vom Ursprung zu P. Zwei verschiedene Punkte koennen durch denselben Verbindungsvektor verbunden sein.

3 Vektoroperationen

Definition 3.1 (Vektoraddition und Skalarmultiplikation)**.** Fuer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (komponentenweise): $(\mathbf{u} + \mathbf{v})_i = u_i + v_i, \quad (\lambda\mathbf{v})_i = \lambda v_i$.

Intuition

Geometrisch: Addition als **Parallelogrammregel** (Pfeil $\mathbf{v}$ an Spitze von $\mathbf{u}$). Skalarmultiplikation streckt ($|\lambda| > 1$), staucht ($|\lambda| < 1$) oder kehrt die Richtung um ($\lambda < 0$).

Beispiel 3.1 (Rechnung mit Vektoren)**.** $\mathbf{u} = \binom{1}{4}, \quad \mathbf{v} = \binom{3}{-2}: \quad \mathbf{u}+\mathbf{v} = \binom{4}{2}, \quad 2\mathbf{u}-\mathbf{v} = \binom{-1}{10}$.

3.1 Linearkombination und lineare Unabhaengigkeit

Definition 3.2 (Linearkombination und lineare Unabhaengigkeit)**.** $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k$ heisst **Linearkombination**. Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ heissen **linear unabhaengig**, wenn $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ nur fuer $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ gilt.

Rechenregeln fuer Vektoren

Fuer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \qquad \text{(Kommutativitaet)} \tag{1}$$
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \qquad \text{(Assoziativitaet)} \tag{2}$$
$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \qquad \text{(Distributivgesetz)} \tag{3}$$

Haeufiger Fehler

Zwei Vektoren verschiedener Dimension koennen *nicht* addiert werden: $\binom{1}{2} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ist nicht definiert. Die Dimensionen muessen uebereinstimmen.

4 Skalarprodukt und Kreuzprodukt

4.1 Skalarprodukt

Definition 4.1 (Skalarprodukt)**.** Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i \in \mathbb{R}.$$

Geometrische Interpretation des Skalarprodukts

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|},$$

wobei θ der Winkel zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ ist. Zwei Vektoren heissen **orthogonal** ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$), wenn $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$. Die **euklidische Norm** ist $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}$; ein Vektor mit $\|\mathbf{v}\| = 1$ heisst **Einheitsvektor**.

Beispiel 4.1 (Winkelberechnung)**.** $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 3+0+0 = 3$, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{10}$.

$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{50}} \approx 0{,}424$, also $\theta \approx 64{,}9$.

4.2 Kreuzprodukt

Definition 4.2 (Kreuzprodukt)**.** Das **Kreuzprodukt** ist nur im $\mathbb{R}^3$ definiert. Fuer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften des Kreuzprodukts

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ steht **senkrecht** auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.
- $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin\theta$ (Flaecheninhalt des aufgespannten Parallelogramms).
- **Antikommutativ**: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$.

Beispiel 4.2 (Kreuzprodukt berechnen)**.** $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0{\cdot}0-2{\cdot}1 \\ 2{\cdot}3-1{\cdot}0 \\ 1{\cdot}1-0{\cdot}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Kontrolle: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\rangle = -2 + 0 + 2 = 0$ ✓

Drehmoment in der Physik

Das Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ beschreibt die Drehwirkung einer Kraft $\mathbf{F}$ am Hebelarm $\mathbf{r}$. Sein Betrag ist $\|\mathbf{M}\| = \|\mathbf{r}\| \cdot \|\mathbf{F}\| \cdot \sin\theta$.

5 Matrizenbegriff und Matrizentypen

Definition 5.1 (Matrix)**.** Eine **Matrix** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten; der Eintrag in Zeile i, Spalte j ist a_{ij}. Eine $n \times n$-Matrix heisst **quadratisch**.

Intuition

Eine Matrix organisiert Daten tabellarisch: Zeilen als Produkte, Spalten als Maerkte; a_{ij} = Absatz von Produkt i auf Markt j.

Spezielle Matrizen

- **Einheitsmatrix $\mathbf{I}_n$**: Diagonale = 1, sonst 0; $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$.
- **Diagonalmatrix**: $a_{ij} = 0$ fuer $i \neq j$.
- **Dreiecksmatrix**: Obere ($a_{ij} = 0$ fuer $i > j$) oder untere ($i < j$).
- **Symmetrisch**: $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$, d. h. $a_{ij} = a_{ji}$.

Beispiel 5.1 (Matrizentypen erkennen)**.**

Matrix	Typ	Eigenschaft
$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	Diagonal	Nur Diagonaleintraege $\neq 0$
$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	Obere Dreieck	Unter Diagonale alles 0
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$	Symmetrisch	$a_{ij} = a_{ji}$

6 Matrizenoperationen

Definition 6.1 (Matrizenoperationen)**.** Fuer $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}$: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $(\lambda \mathbf{A})_{ij} = \lambda a_{ij}$, $(\mathbf{AC})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj}$ ("Zeile mal Spalte").

Dimensionsregel: $(m \times \boldsymbol{n}) \cdot (\boldsymbol{n} \times p) = (m \times p)$

Die **inneren** Dimensionen muessen uebereinstimmen. Die Ergebnismatrix hat die Zeilenanzahl von **A** und die Spaltenanzahl von **B**.

Beispiel 6.1 (Matrizenmultiplikation)**.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

Haeufiger Fehler

Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ**: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ im Allgemeinen! Beispiel: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, aber $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Rechenregeln der Matrizenmultiplikation

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \qquad \text{(Assoziativitaet)} \tag{4}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \qquad \text{(Distributivitaet)} \tag{5}$$
$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \qquad \text{(Neutrales Element)} \tag{6}$$

7 Transponierte Matrix

Definition 7.1 (Transponierte)**.** Die **Transponierte** von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist $\mathbf{A}^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $(\mathbf{A}^\top)_{ij} = a_{ji}$ (Zeilen und Spalten vertauscht).

Beispiel 7.1 (Transponierte berechnen)**.** $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \mathbf{A}^\top = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{smallmatrix}\right)$.

Rechenregeln fuer die Transponierte

$$(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A} \tag{7}$$
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top \tag{8}$$
$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top \qquad \text{(Reihenfolge umkehren!)} \tag{9}$$

Haeufiger Fehler

Bei der Transponierten eines Produkts kehrt sich die Reihenfolge um: $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$, **nicht $\mathbf{A}^\top\mathbf{B}^\top$!**

Kovarianzmatrix

Die Kovarianzmatrix eines zentrierten Datensatzes $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ist $\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\mathbf{X}^\top\mathbf{X}$ – ein typisches Produkt aus Matrix und Transponierter.

8 Determinante

Definition 8.1 (Determinante)**.** Die **Determinante** einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine reelle Zahl, die Invertierbarkeit und Volumenverzerrung codiert.

2×2- und 3×3-Determinante

2×2: $\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc.$

3×3 (Sarrus): Fuer $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

Beispiel 8.1 (Determinanten berechnen)**.** $\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\right) = 15 - 2 = 13.$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$: $\det(\mathbf{A}) = 0 + 84 + 96 - 105 - 0 - 48 = 27.$

Wichtige Eigenschaften

- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$ (Produktsatz)
- $\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A})$; $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^n \det(\mathbf{A})$
- $\det(\mathbf{A}) \neq 0 \iff \mathbf{A}$ ist invertierbar

Intuition

$|\det(\mathbf{A})|$ gibt den **Flaecheninhalt** ($\mathbb{R}^2$) bzw. das **Volumen** ($\mathbb{R}^3$) des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelogramms/-epipeds an. $\det(\mathbf{A}) = 0$: singulaer.

Haeufiger Fehler

Sarrus gilt **nur** fuer 3×3! Fuer groessere Matrizen: Laplace-Entwicklung oder Gauss-Algorithmus.

9 Inverse Matrix

Definition 9.1 (Inverse Matrix)**.** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst **invertierbar**, wenn $\mathbf{A}^{-1}$ existiert mit $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Satz 9.1 (Existenz)**.** $\mathbf{A}$ ist invertierbar $\iff \det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Inverse einer 2×2-Matrix

Fuer $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $ad - bc \neq 0$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Merkregel: Hauptdiagonale tauschen, Nebendiagonale negieren, durch Determinante teilen.

Beispiel 9.1 (Inverse berechnen)**.** $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\det(\mathbf{A}) = 6 - 5 = 1$. $\mathbf{A}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.
Probe: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 6-5 & -2+2 \\ 15-15 & -5+6 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ✓

Rechenregeln fuer Inverse

$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$, $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ (Reihenfolge umkehren!), $(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top$, $\det\big(\mathbf{A}^{-1}\big) = 1/\det(\mathbf{A})$.

Haeufiger Fehler

$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$: Eselsbruecke – zuerst Socken, dann Schuhe; beim Ausziehen umgekehrt.

10 Lineare Gleichungssysteme

Definition 10.1 (LGS in Matrixform)**.** Ein **lineares Gleichungssystem** mit m Gleichungen und n Unbekannten: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (Koeffizientenmatrix), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (Loesungsvektor), $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ (rechte Seite).

Beispiel 10.1 (System aufstellen und loesen)**.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ hat die Matrixform $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Gauss-Elimination: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \leftarrow Z_2 - \frac{1}{2}Z_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right)$.
Rueckwaerts: $x_2 = 1$, $x_1 = 2$.

Gauss-Elimination und Loesungsfaelle

Erlaubte Zeilenumformungen: Vertauschen, Skalieren ($\neq 0$), Vielfaches addieren.

Drei Faelle:

1. **Genau eine Loesung:** $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = \mathrm{rk}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = n$. Quadratisch: $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
2. **Unendlich viele:** $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = \mathrm{rk}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) < n$.
3. **Keine:** $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) < \mathrm{rk}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

Intuition

Im $\mathbb{R}^2$: Zwei Geraden schneiden sich (eine Loesung), sind deckungsgleich (∞ viele) oder parallel (keine).

11 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 11.1 (Eigenwert und Eigenvektor)**.** Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $\lambda \in \mathbb{R}$ heisst **Eigenwert**, wenn ein $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ existiert mit $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. $\mathbf{v}$ heisst **Eigenvektor** zum Eigenwert λ.

Intuition

Eigenvektoren sind die speziellen Richtungen, die von $\mathbf{A}$ nur *gestreckt* (oder gestaucht/umgekehrt) werden, ohne ihre Richtung zu aendern. Der Eigenwert λ ist der Streckungsfaktor.

Berechnung der Eigenwerte

Eigenwerte sind die Loesungen der **charakteristischen Gleichung**:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Fuer $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gilt:

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \sum a_{ii} = \sum \lambda_i, \qquad \det(\mathbf{A}) = \prod \lambda_i.$$

Beispiel 11.1 (Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen)**.** $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Char. Polynom: $(4-\lambda)(3-\lambda)-2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$. Kontrolle: $\mathrm{Sp} = 7 = 5+2$ ✓, $\det = 10 = 5\cdot 2$ ✓.

Eigenvektoren: $\lambda_1 = 5$: $\mathbf{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$; $\quad \lambda_2 = 2$: $\mathbf{v}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Satz 11.1 (Diagonalisierung)**.** Hat $\mathbf{A}$ genau n linear unabhaengige Eigenvektoren, so ist $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ und $\mathbf{A}^k = \mathbf{PD}^k\mathbf{P}^{-1}$ mit $\mathbf{D}^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

Haeufiger Fehler

Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar! $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ hat den doppelten Eigenwert $\lambda = 1$, aber nur einen Eigenvektor.

12 Anwendungen

12.1 Leontief Input-Output-Modell

Leontief-Modell

Eine Volkswirtschaft mit n Sektoren hat die **Technologiematrix A**, wobei a_{ij} den Anteil der Produktion von Sektor j angibt, der als Input in Sektor i fliesst. Die **Leontief-Gleichung**:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{d} \iff \mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d},$$

wobei $\mathbf{x}$ die Bruttoproduktion und $\mathbf{d}$ die Endnachfrage ist.

Beispiel 12.1 (Zwei-Sektoren-Modell)**.** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \left(\begin{smallmatrix} 100 \\ 200 \end{smallmatrix}\right)$. $\quad \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}9 \end{pmatrix}$, $\det = 0{,}60$. $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d} = \left(\begin{smallmatrix} 250 \\ 333 \end{smallmatrix}\right)$.

12.2 Markov-Ketten

Markov-Ketten

Die **Uebergangsmatrix P** einer Markov-Kette hat $p_{ij} \geq 0$ und Spaltensumme 1. Zustand nach k Schritten: $\pi^{(k)} = \mathbf{P}^k \pi^{(0)}$. Die **stationaere Verteilung** π^* erfuellt $\mathbf{P}\pi^* = \pi^*$ (Eigenvektor zu $\lambda = 1$).

Beispiel 12.2 (Marktanteile)**.** 20% der A-Kunden wechseln zu B, 10% der B-Kunden zu A: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$. Stationaer ($\pi_1 + \pi_2 = 1$): $\pi_1 = \frac{1}{3}$, $\pi_2 = \frac{2}{3}$.

12.3 Portfolio und Kovarianzmatrix

Portfoliotheorie nach Markowitz

Portfolio mit Gewichten $\mathbf{w}$ ($\sum w_i = 1$), erwarteten Renditen μ und **Kovarianzmatrix** $\mathbf{\Sigma}$:

$$\mu_P = \mathbf{w}^\mathsf{T}\mu, \qquad \sigma_P^2 = \mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}.$$

Beispiel 12.3 (Diversifikationseffekt)**.** $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}09 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$: $\sigma_P^2 = \mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} = 0{,}0336$, $\sigma_P \approx 18{,}3\%$ – weniger als das gewichtete Mittel 24% (**Diversifikationseffekt**).

13 Zusammenfassung

Zentrale Konzepte

1. **Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$:** Pfeil mit Richtung und Laenge.
2. **Vektoroperationen:** Addition, Skalarmultiplikation, Linearkombination.
3. **Skalarprodukt:** $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum u_i v_i$; orthogonal $\iff$ $= 0$.
4. **Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:** Multiplikation "Zeile mal Spalte", nicht kommutativ.
5. **Determinante:** $\det(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow$ singulaer.
6. **Inverse:** existiert $\iff$ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
7. **Gauss:** LGS-Loesung durch Zeilenumformungen.
8. **Eigenwerte:** $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$; spezielle Richtungen.
9. **Anwendungen:** Leontief, Markov, Portfolio.

Wichtige Formeln auf einen Blick

Formel	Kontext
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\theta$	Skalarprodukt und Winkel
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$	Euklidische Norm
$c_{ij} = \sum_k a_{ik} \, b_{kj}$	Matrizenmultiplikation
$(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$	Transponierte eines Produkts
$\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ad - bc$	2×2-Determinante
$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$	2×2-Inverse
$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$	Charakteristische Gleichung
$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d}$	Leontief-Modell
$\sigma_P^2 = \mathbf{w}^\mathsf{T}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$	Portfolio-Varianz

Lernziele-Check

LZ	Frage zur Selbstkontrolle	Abschnitt
LZ1	Koennen Sie einen Vektor im $\mathbb{R}^n$ definieren und geometrisch darstellen?	2
LZ2	Beherrschen Sie Skalarprodukt, Norm und Kreuzprodukt?	3–4
LZ3	Koennen Sie Matrizen addieren, multiplizieren und transponieren?	5–7
LZ4	Berechnen Sie Determinanten und pruefen Sie Invertierbarkeit?	8–9
LZ5	Loesen Sie ein LGS mit dem Gauss-Verfahren?	10
LZ6	Koennen Sie Eigenwerte berechnen und wirtschaftliche Modelle aufstellen?	11–12

Intuition

Vektoren und Matrizen sind universelle Werkzeuge zur Modellierung realer Systeme. Die lineare Algebra verbindet Geometrie (Richtungen, Winkel, Volumina), Gleichungssysteme (Gauss, Inverse) und Dynamik (Eigenwerte, Markov-Ketten) zu einem einheitlichen Rahmen, der in den folgenden Lektionen intensiv weiterverwendet wird.