Lektion 01: Funktionen

Analysis Kurs
Digital Finance

1 Einleitung

Funktionen sind das zentrale Werkzeug der Analysis. Nahezu jede quantitative Aussage in Oekonomie, Finanzwesen und Naturwissenschaft laesst sich als funktionaler Zusammenhang formulieren: Der Preis einer Option haengt vom Basiswert ab, das Wachstum einer Population von der Zeit, die Nachfrage vom Preis. In dieser Lektion legen wir das Fundament fuer den gesamten Kurs.

Lernziele

Nach dieser Lektion koennen Sie:

LZ1 Den Funktionsbegriff praezise definieren und verschiedene Darstellungsformen (analytisch, tabellarisch, grafisch) verwenden.

LZ2 Elementare Funktionstypen (Polynome, Exponential-, Logarithmus-, trigonometrische Funktionen) erkennen und deren Eigenschaften beschreiben.

LZ3 Nullstellen, Polstellen, Grenzwerte, Stetigkeit, Monotonie, Extremstellen, Wendestellen und Asymptoten bestimmen.

LZ4 Funktionen addieren, multiplizieren, verketten und grafisch analysieren.

LZ5 Injektivitaet, Surjektivitaet und Bijektivitaet pruefen und Umkehrfunktionen bestimmen.

LZ6 Funktionen in Anwendungskontexten einsetzen (Zinseszins, Wachstumsmodelle, Optimierung).

2 Funktionsbegriff und Darstellungsformen

Definition 2.1 (Funktion)**.** Eine **Funktion** $f\colon D \to W$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ *genau ein* Element $y = f(x) \in W$ zuordnet.

- $D \subseteq \mathbb{R}$ heisst **Definitionsbereich** (Domain),
- $W \subseteq \mathbb{R}$ heisst **Zielbereich** (Codomain),
- $\operatorname{ran}(f) = \{f(x) \mid x \in D\}$ heisst **Wertebereich** (Range, Bild).

Intuition

Stellen Sie sich eine Funktion als eine Maschine vor: Sie werfen eine Zahl x hinein, und die Maschine gibt genau eine Zahl y zurueck. Fuer *denselben* Input liefert die Maschine immer *denselben* Output – das ist die Eindeutigkeit der Zuordnung.

2.1 Darstellungsformen

Funktionen koennen auf verschiedene Weisen dargestellt werden:

1. **Analytisch** (Formel): $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
2. **Tabellarisch**: Wertetabelle mit Paaren $(x, f(x))$.
3. **Grafisch**: Graph im kartesischen Koordinatensystem.
4. **Verbal**: "Die Flaeche eines Quadrats in Abhaengigkeit von der Seitenlaenge."

Beispiel 2.1 (Definitionsbereich bestimmen)**.** Gegeben: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$.

Zwei Einschraenkungen muessen gleichzeitig gelten:

- Unter der Wurzel muss $x - 1 \geq 0$ gelten, also $x \geq 1$.
- Der Nenner darf nicht Null sein: $x \neq 3$.

Daraus folgt: $\mathrm{dom}(f) = [1, \infty) \setminus \{3\} = [1, 3) \cup (3, \infty)$.

Haeufiger Fehler

Vergessen Sie nicht, *alle* Einschraenkungen gleichzeitig zu pruefen: Wurzeln verlangen nicht-negative Argumente, Nenner duerfen nicht Null sein, Logarithmen verlangen positive Argumente. Die Schnittmenge aller Bedingungen ergibt den Definitionsbereich.

3 Elementare Funktionstypen

3.1 Polynomfunktionen

Definition 3.1 (Polynom)**.** Ein **Polynom** vom Grad n ist eine Funktion der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0.$$

Spezialfaelle

- **Linear** ($n = 1$): $f(x) = mx + b$ (Steigung m, y-Achsenabschnitt b)
- **Quadratisch** ($n = 2$): $f(x) = ax^2 + bx + c$, Scheitelpunkt bei $x_S = -\frac{b}{2a}$
- **Kubisch** ($n = 3$): $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Beispiel 3.1 (Nullstellen eines Polynoms)**.** $f(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. Die drei Nullstellen sind $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ und $x_3 = -\sqrt{3} \approx -1{,}73$.

3.2 Gebrochenrationale Funktionen

Definition 3.2 (Gebrochenrationale Funktion)**.** Eine **gebrochenrationale Funktion** hat die Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei p und q Polynome sind und $q(x) \neq 0$ im Definitionsbereich.

Beispiel 3.2. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ und eine **senkrechte Asymptote** bei $x = 2$ sowie eine **waagerechte Asymptote** bei $y = 0$.

3.3 Potenz- und Wurzelfunktionen

Potenz- und Wurzelfunktionen

- **Potenzfunktion**: $f(x) = x^a$ fuer $a \in \mathbb{R}$
- **Wurzelfunktion**: $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ fuer $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$
- Definitionsbereich: $[0, \infty)$ fuer gerade n; $\mathbb{R}$ fuer ungerade n

3.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Definition 3.3 (Exponentialfunktion)**.** Die **Exponentialfunktion** zur Basis $a > 0$, $a \neq 1$, ist

$$f(x) = a^x, \qquad \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{ran}(f) = (0, \infty).$$

Die **natuerliche Exponentialfunktion** ist $\exp(x) = e^x$ mit der Eulerschen Zahl $e \approx 2{,}71828$.

Definition 3.4 (Logarithmus)**.** Der **Logarithmus** zur Basis a ist die Umkehrfunktion von a^x:

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x, \qquad \mathrm{dom}(\log_a) = (0, \infty), \quad \mathrm{ran}(\log_a) = \mathbb{R}.$$

Der **natuerliche Logarithmus** ist $\ln(x) = \log_e(x)$.

Logarithmengesetze

Fuer $a, b > 0$ und $r \in \mathbb{R}$:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \tag{1}$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \tag{2}$$
$$\ln(a^r) = r \cdot \ln(a) \tag{3}$$
$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \text{(Basiswechsel)} \tag{4}$$

Haeufiger Fehler

$\ln(a + b) \neq \ln(a) + \ln(b)$! Der Logarithmus einer Summe laesst sich *nicht* vereinfachen. Nur Produkte und Quotienten lassen sich in Summen und Differenzen von Logarithmen umwandeln.

3.5 Trigonometrische Funktionen

Definition 3.5 (Sinus und Kosinus)**.** Die Funktionen $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ und $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ sind 2π-periodisch:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

Wichtige Identitaeten

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \tag{5}$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \tag{6}$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \tag{7}$$

3.6 Umkehrfunktionen

Satz 3.1 (Existenz der Umkehrfunktion)**.** Eine Funktion $f\colon D \to W$ besitzt genau dann eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon \operatorname{ran}(f) \to D$, wenn f **injektiv** ist. Es gilt dann:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in D \qquad \text{und} \qquad f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in \operatorname{ran}(f).$$

Beispiel 3.3 (Wichtige Umkehrfunktionen)**.**

Funktion	**Umkehrfunktion**	**Einschraenkung**
$f(x) = e^x$	$f^{-1}(x) = \ln(x)$	$x > 0$
$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$	$x \geq 0$, nur fuer f auf $[0, \infty)$
$f(x) = \sin(x)$	$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$	$x \in [-1, 1]$, f auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Intuition

Grafisch entsteht der Graph von f^{-1} durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden $y = x$.

4 Funktionseigenschaften

4.1 Nullstellen

Definition 4.1 (Nullstelle)**.** x_0 heisst **Nullstelle** von f, wenn $f(x_0) = 0$.

Beispiel 4.1. $f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ hat die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.

4.2 Polstellen und senkrechte Asymptoten

Definition 4.2 (Polstelle)**.** x_0 heisst **Polstelle** einer gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wenn $q(x_0) = 0$ und $p(x_0) \neq 0$. Bei einer Polstelle strebt $|f(x)| \to \infty$ fuer $x \to x_0$.

4.3 Grenzwerte

Definition 4.3 (Grenzwert)**.** Man schreibt $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, wenn sich $f(x)$ dem Wert L beliebig naehert, sobald x hinreichend nahe an x_0 liegt.

Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{8}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \tag{9}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{10}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \tag{11}$$

4.4 Stetigkeit

Definition 4.4 (Stetigkeit)**.** f heisst **stetig** in x_0, wenn

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Das bedeutet: Der Grenzwert existiert, $f(x_0)$ ist definiert, und beide stimmen ueberein.

Intuition

Anschaulich: Man kann den Graphen einer stetigen Funktion zeichnen, ohne den Stift abzusetzen. Jede "Luecke" oder jeder "Sprung" bedeutet eine Unstetigkeitsstelle.

4.5 Monotonie

Definition 4.5 (Monotonie)**.** f heisst auf einem Intervall I:

- **monoton wachsend**, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **streng monoton wachsend**, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
- **monoton fallend**, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,
- **streng monoton fallend**, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Satz 4.1. Ist f differenzierbar auf (a, b), so gilt:

- $f'(x) \geq 0$ fuer alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ ist monoton wachsend auf (a, b).
- $f'(x) > 0$ fuer alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend auf (a, b).

Analoge Aussagen gelten mit ≤ 0 bzw. < 0 fuer fallendes Verhalten.

4.6 Extremstellen

Definition 4.6 (Lokales Extremum)**.** x_0 heisst **lokales Maximum** von f, wenn $f(x_0) \geq f(x)$ fuer alle x in einer Umgebung von x_0. Analog fuer lokales Minimum mit $\leq$.

Notwendige und hinreichende Bedingungen

Notwendig: $f'(x_0) = 0$ (oder $f'(x_0)$ existiert nicht).
Hinreichend (2. Ableitung):

- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum in x_0
- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum in x_0

4.7 Wendestellen

Definition 4.7 (Wendestelle)**.** x_0 heisst **Wendestelle** von f, wenn f in x_0 das Kruemmungsverhalten wechselt (von links- nach rechtsgekruemmt oder umgekehrt).

Wendestellen-Kriterium

Notwendig: $f''(x_0) = 0$.
Hinreichend: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

4.8 Asymptoten

Definition 4.8 (Asymptoten)**.**

- **Waagerechte Asymptote:** $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c \Rightarrow y = c$ ist waagerechte Asymptote.
- **Senkrechte Asymptote:** $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \infty \Rightarrow x = x_0$ ist senkrechte Asymptote.
- **Schraege Asymptote:** $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (mx + b)] = 0 \Rightarrow y = mx + b$ ist schraege Asymptote.

Beispiel 4.2 (Vollstaendige Funktionsuntersuchung)**.** Untersuchen Sie $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$.

Definitionsbereich: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$, also $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
Nullstellen: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.
Polstellen: $x = -2$ und $x = 2$ (senkrechte Asymptoten).
Waagerechte Asymptote: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-1/x^2}{1-4/x^2} = 1$.
Also ist $y = 1$ die waagerechte Asymptote.
Symmetrie: $f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2-4} = \frac{x^2-1}{x^2-4} = f(x)$ – die Funktion ist gerade (achsensymmetrisch zur y-Achse).

5 Operationen auf Funktionen

5.1 Arithmetische Operationen

Definition 5.1 (Arithmetische Verknuepfungen)**.** Fuer $f, g\colon D \to \mathbb{R}$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{(Summe)} \qquad (12)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \text{(Produkt)} \qquad (13)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0 \qquad \text{(Quotient)} \qquad (14)$$

5.2 Verkettung (Komposition)

Definition 5.2 (Verkettung)**.** Die **Verkettung** von f und g ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Dabei wird *zuerst* g ausgewertet, *dann* f. Der Definitionsbereich ist $\{x \in \mathrm{dom}(g) \mid g(x) \in \mathrm{dom}(f)\}$.

Beispiel 5.1 (Verkettung berechnen)**.** $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 + 1$.
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2+1}$.
$\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$, da $x^2 + 1 > 0$ fuer alle $x \in \mathbb{R}$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1, \quad \mathrm{dom}(g \circ f) = [0, \infty)$.

Beachte: $f \circ g \neq g \circ f$ im Allgemeinen!

Haeufiger Fehler

Die Verkettung ist **nicht kommutativ**: $f \circ g \neq g \circ f$ in den meisten Faellen. Die Reihenfolge der Funktionen ist entscheidend. Achten Sie auch darauf, dass der Wertebereich der inneren Funktion im Definitionsbereich der aeusseren Funktion liegen muss.

5.3 Grafische Transformationen

Transformationen von $y = f(x)$

Transformation	Wirkung
$y = f(x) + c$	Verschiebung um c nach oben
$y = f(x - c)$	Verschiebung um c nach rechts
$y = a \cdot f(x)$	Streckung ($\lvert a\rvert > 1$) / Stauchung ($\lvert a\rvert < 1$) vertikal
$y = f(b \cdot x)$	Stauchung ($\lvert b\rvert > 1$) / Streckung ($\lvert b\rvert < 1$) horizontal
$y = -f(x)$	Spiegelung an der x-Achse
$y = f(-x)$	Spiegelung an der y-Achse

Beispiel 5.2 (Transformation anwenden)**.** Gegeben: $f(x) = x^2$. Beschreiben Sie $g(x) = -2(x-3)^2 + 5$.

Ausgehend von $f(x) = x^2$:

1. Verschiebung um 3 nach rechts: $x^2 \to (x-3)^2$
2. Vertikale Streckung um Faktor 2: $(x-3)^2 \to 2(x-3)^2$
3. Spiegelung an der x-Achse: $2(x-3)^2 \to -2(x-3)^2$
4. Verschiebung um 5 nach oben: $-2(x-3)^2 \to -2(x-3)^2 + 5$

Der Scheitel der Parabel liegt bei $(3, 5)$, sie ist nach unten geoeffnet.

6 Injektivitaet, Surjektivitaet, Bijektivitaet

Definition 6.1 (Injektiv)**.** $f\colon D \to W$ heisst **injektiv** (eineindeutig), wenn

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \qquad \text{fuer alle } x_1, x_2 \in D.$$

Aequivalent: Verschiedene Argumente liefern verschiedene Funktionswerte.

Intuition

Grafisch: Jede waagerechte Linie schneidet den Graphen in *hoechstens einem* Punkt (Horizontallinientest).

Definition 6.2 (Surjektiv)**.** $f\colon D \to W$ heisst **surjektiv**, wenn

$$\forall y \in W\; \exists x \in D\colon f(x) = y.$$

Jedes Element des Zielbereichs wird mindestens einmal getroffen.

Definition 6.3 (Bijektiv)**.** $f\colon D \to W$ heisst **bijektiv**, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W \to D$.

Beispiel 6.1 (Injektivitaet pruefen)**.**

Funktion	Injektiv?	Surjektiv?	Begruendung
$f(x) = 2x + 1,\ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	Ja	Ja	Streng monoton wachsend
$f(x) = x^2,\ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	Nein	Nein	$f(-2) = f(2)$; $-1 \notin \operatorname{ran}(f)$
$f(x) = x^2,\ f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$	Ja	Ja	Einschraenkung macht bijektiv
$f(x) = e^x,\ f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$	Ja	Ja	Streng monoton wachsend
$f(x) = \sin(x),\ f\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$	Nein	Ja	Periodisch, nicht injektiv

Satz 6.1. Jede streng monotone Funktion ist injektiv. Umgekehrt gilt dies im Allgemeinen nicht (es gibt injektive Funktionen, die nicht monoton sind).

Haeufiger Fehler

Die Begriffe haengen vom gewaehlten Definitions- und Zielbereich ab! $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$ ist weder injektiv noch surjektiv (bezogen auf $\mathbb{R}$), aber $f(x) = x^2$ auf $[0, \infty) \to [0, \infty)$ ist bijektiv. Geben Sie **immer** Definitions- und Zielbereich an.

7 Anwendungen

7.1 Zinseszins und Finanzmathematik

Zinseszinsformel

Ein Kapital K_0 wird mit jaehrlichem Zinssatz r angelegt. Nach t Jahren betraegt das Kapital:

$$K(t) = K_0 \cdot (1 + r)^t \qquad \text{(diskrete Verzinsung)}.$$

Bei stetiger Verzinsung:

$$K(t) = K_0 \cdot e^{rt}.$$

Beispiel 7.1 (Verdoppelungszeit)**.** Wie lange dauert es, bis sich ein Kapital bei $r = 5\%$ jaehrlichem Zins verdoppelt?

Wir loesen $2K_0 = K_0 \cdot (1{,}05)^t$:

$$2 = (1{,}05)^t \;\Rightarrow\; t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)} = \frac{0{,}6931}{0{,}0488} \approx 14{,}2 \text{ Jahre.}$$

Faustregel (72er-Regel): $t \approx \frac{72}{r\%} = \frac{72}{5} = 14{,}4$ Jahre.

7.2 Wachstumsmodelle

Exponentielles und logistisches Wachstum

Exponentielles Wachstum: $N(t) = N_0 \cdot e^{kt} \qquad (k > 0\text{: Wachstum, } k < 0\text{: Zerfall})$

Logistisches Wachstum: $N(t) = \dfrac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right) e^{-rt}}$

Hier ist K die Kapazitaetsgrenze (Saettigungswert), r die Wachstumsrate.

Beispiel 7.2 (Radioaktiver Zerfall)**.** Die Halbwertszeit von ^{14}C betraegt $T_{1/2} = 5730$ Jahre.

Die Zerfallskonstante ist $k = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} = \frac{0{,}6931}{5730} \approx 1{,}21 \cdot 10^{-4}$ pro Jahr.

Nach t Jahren ist noch der Anteil $N(t)/N_0 = e^{-kt}$ vorhanden.

7.3 Optimierung

Gewinnmaximierung

Ein Unternehmen hat die Erloesfunktion $E(x) = 100x - x^2$ und die Kostenfunktion $C(x) = 20x + 100$. Der Gewinn ist

$$G(x) = E(x) - C(x) = -x^2 + 80x - 100.$$

Maximum bei $G'(x) = -2x + 80 = 0 \Rightarrow x^* = 40$.
Der maximale Gewinn betraegt $G(40) = -1600 + 3200 - 100 = 1500$.

7.4 Technische Anwendungen

Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

In der Volkswirtschaftslehre beschreibt die **Cobb-Douglas-Funktion** den Output Y in Abhaengigkeit von Arbeit L und Kapital K:

$$Y = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Hier ist A die Totalfaktorproduktivitaet. Die Funktion zeigt konstante Skalenelastizitaet: Verdoppelt man L und K, verdoppelt sich auch Y.

8 Zusammenfassung

Zentrale Konzepte

1. **Funktion:** Eindeutige Zuordnung $f : D \to W$, jedem x wird genau ein $y = f(x)$ zugeordnet.
2. **Elementare Typen:** Polynome, gebrochenrationale, Exponential-, Logarithmus- und trigonometrische Funktionen bilden den Baukasten der Analysis.
3. **Eigenschaften:** Nullstellen, Polstellen, Grenzwerte, Stetigkeit, Monotonie, Extrema, Wendepunkte und Asymptoten beschreiben das Verhalten einer Funktion vollstaendig.
4. **Operationen:** Funktionen koennen addiert, multipliziert und verkettet werden. Die Verkettung ist *nicht* kommutativ.
5. **Bijektivitaet:** Nur bijektive Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion. Oft muss der Definitionsbereich eingeschraenkt werden.
6. **Anwendungen:** Zinseszins, Wachstumsmodelle, Optimierung und Produktionsfunktionen zeigen die Relevanz in Wirtschaft und Technik.

Wichtige Formeln auf einen Blick

Formel	**Kontext**
$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$	Polynom vom Grad n
$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$	Logarithmengesetz (Produkt)
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	Trigonometrische Identitaet
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$	Verkettung
$K(t) = K_0 \cdot e^{rt}$	Stetige Verzinsung
f bijektiv $\iff$ f injektiv $\wedge$ f surjektiv	Umkehrbarkeit

Intuition

Die Analysis untersucht, wie sich Funktionen verhalten – lokal (Ableitung, Stetigkeit) und global (Grenzwerte, Asymptoten). In den folgenden Lektionen werden wir diese Untersuchungen mit den Werkzeugen der Differential- und Integralrechnung systematisch vertiefen.