Folgen, Reihen und Finanzmathematik – Quiz
30 Fragen

BSc Analysis

Frage 1

Welche der folgenden Darstellungen beschreibt eine explizite Folge?

A. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 3$

B. $a_n = 2n + 1$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$

C. $a_{n+1} = 2 \cdot a_n,\ a_1 = 1$

D. a_n ist durch a_{n-1} und a_{n-2} festgelegt

Frage 1

Welche der folgenden Darstellungen beschreibt eine explizite Folge?

A. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 3$

B. $a_n = 2n + 1$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$

C. $a_{n+1} = 2 \cdot a_n,\ a_1 = 1$

D. a_n ist durch a_{n-1} und a_{n-2} festgelegt

Antwort: B

Bei einer expliziten Darstellung kann a_n direkt aus n berechnet werden, ohne vorherige Glieder zu kennen. Die Formel $a_n = 2n + 1$ liefert fuer jedes n sofort den Wert. A, C, D sind rekursive Darstellungen.

Frage 2

Wie lautet das 20. Glied der arithmetischen Folge mit $a_1 = 5$ und $d = 3$?

A. $a_{20} = 60$
B. $a_{20} = 65$
C. $a_{20} = 62$
D. $a_{20} = 58$

Frage 2

Wie lautet das 20. Glied der arithmetischen Folge mit $a_1 = 5$ und $d = 3$?

A. $a_{20} = 60$

B. $a_{20} = 65$

C. $a_{20} = 62$

D. $a_{20} = 58$

Antwort: C
$a_n = a_1 + (n-1)d$. Einsetzen: $a_{20} = 5 + 19 \cdot 3 = 5 + 57 = 62$.

Frage 3

Welches ist das 6. Glied der geometrischen Folge mit $a_1 = 2$ und $q = 3$?

A. $a_6 = 486$

B. $a_6 = 162$

C. $a_6 = 729$

D. $a_6 = 243$

Frage 3

Welches ist das 6. Glied der geometrischen Folge mit $a_1 = 2$ und $q = 3$?

A. $a_6 = 486$

B. $a_6 = 162$

C. $a_6 = 729$

D. $a_6 = 243$

Antwort: A

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Einsetzen: $a_6 = 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486$.

Frage 4

Die Folge $a_n = \frac{n+1}{n}$ ist:

A. streng monoton wachsend und unbeschraenkt

B. alternierend und divergent

C. konstant ab $n = 10$

D. streng monoton fallend und nach unten durch 1 beschraenkt

Frage 4

Die Folge $a_n = \frac{n+1}{n}$ ist:

A. streng monoton wachsend und unbeschraenkt

B. alternierend und divergent

C. konstant ab $n = 10$

D. streng monoton fallend und nach unten durch 1 beschraenkt

Antwort: D

$a_n = 1 + \frac{1}{n}$ faellt streng monoton und ist stets > 1. Die Folge konvergiert gegen 1.

Frage 5

Was besagt die ε-N-Definition der Konvergenz?

A. Eine Folge konvergiert, wenn sie monoton und beschraenkt ist

B. Fuer jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ fuer alle $n \geq N$

C. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ fuer alle n

D. Die Folge nimmt irgendwann den Grenzwert an

Frage 5

Was besagt die ε-N-Definition der Konvergenz?

A. Eine Folge konvergiert, wenn sie monoton und beschraenkt ist

B. Fuer jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ fuer alle $n \geq N$

C. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ fuer alle n

D. Die Folge nimmt irgendwann den Grenzwert an

Antwort: B

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ genau dann, wenn fuer jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a| < \varepsilon$ fuer alle $n \geq N$.

Frage 6

Welchen Grenzwert hat die Folge $a_n = \frac{3n^2+2n}{n^2+1}$?

A. 0

B. 3

C. 2

D. ∞

Frage 6

Welchen Grenzwert hat die Folge $a_n = \frac{3n^2+2n}{n^2+1}$?

A. 0

B. 3

C. 2

D. ∞

Antwort: B

Dividiere durch n^2: $a_n = \frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{1} = 3$.

Frage 7

Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ **und** $\lim_{n\to\infty} b_n = 5$**, was ist** $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$**?**

A. 7
B. 3
C. 25
D. 10

Frage 7

Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ **und** $\lim_{n\to\infty} b_n = 5$**, was ist** $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$**?**

A. 7

B. 3

C. 25

D. 10

Antwort: D

Produktsatz: $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n) = 2 \cdot 5 = 10$.

Frage 8

Die Folge $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ konvergiert gegen:

A. 1

B. 0

C. -1

D. Die Folge divergiert

Frage 8

Die Folge $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ konvergiert gegen:

A. 1

B. 0

C. -1

D. Die Folge divergiert

Antwort: B

Sandwichsatz: $-\frac{1}{n} \leq (-1)^n \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$. Beide Schranken konvergieren gegen 0, also $a_n \to 0$.

Frage 9

Was ist eine Reihe im mathematischen Sinn?

A. Ein Synonym fuer Folge
B. Eine endliche Summe von Zahlen
C. Eine geordnete Menge von reellen Zahlen
D. Die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Frage 9

Was ist eine Reihe im mathematischen Sinn?

A. Ein Synonym fuer Folge

B. Eine endliche Summe von Zahlen

C. Eine geordnete Menge von reellen Zahlen

D. Die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Antwort: D

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ ist der Grenzwert der Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Konvergenz der Reihe = Konvergenz von (S_n).

Frage 10

Welchen Wert hat die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$?

A. 1

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. ∞

Frage 10

Welchen Wert hat die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$?

A. 1

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. ∞

Antwort: B

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ fuer $|q| < 1$. Mit $q = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Frage 11

Wie lautet die Gauss-Formel fuer $1 + 2 + 3 + \ldots + n$?

A. n^2

B. $\frac{(n+1)^2}{2}$

C. $\frac{n(n-1)}{2}$

D. $\frac{n(n+1)}{2}$

Frage 11

Wie lautet die Gauss-Formel fuer $1 + 2 + 3 + \ldots + n$?

A. n^2

B. $\frac{(n+1)^2}{2}$

C. $\frac{n(n-1)}{2}$

D. $\frac{n(n+1)}{2}$

Antwort: D
$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Fuer $n = 100$: $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.

Frage 12

Das Quotientenkriterium: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, wenn:

A. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$

B. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

C. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

D. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$

Frage 12

Das Quotientenkriterium: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, wenn:

A. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$

B. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

C. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

D. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$

Antwort: B

Quotientenkriterium: Ist $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, so konvergiert die Reihe absolut fuer $L < 1$, divergiert fuer $L > 1$. Bei $L = 1$ keine Aussage.

Frage 13

Welche Aussage ueber das Wurzelkriterium ist korrekt?

A. Es betrachtet $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und liefert Konvergenz fuer Werte < 1
B. Es funktioniert nur fuer alternierende Reihen
C. Es liefert immer eine Aussage, auch wenn der Grenzwert gleich 1 ist
D. Es betrachtet die Quadratwurzel der Partialsummen

Frage 13

Welche Aussage ueber das Wurzelkriterium ist korrekt?

A. Es betrachtet $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und liefert Konvergenz fuer Werte < 1

B. Es funktioniert nur fuer alternierende Reihen

C. Es liefert immer eine Aussage, auch wenn der Grenzwert gleich 1 ist

D. Es betrachtet die Quadratwurzel der Partialsummen

Antwort: A

Wurzelkriterium (Cauchy): $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Konvergenz fuer $L < 1$, Divergenz fuer $L > 1$, keine Aussage bei $L = 1$.

Frage 14

Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius:

A. $R = 1$

B. $R = \infty$

C. $R = \mathrm{e}$

D. $R = 0$

Frage 14

Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius:

A. $R = 1$

B. $R = \infty$

C. $R = \mathrm{e}$

D. $R = 0$

Antwort: B

Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0$ fuer alle x. Die Reihe konvergiert fuer alle $x \in \mathbb{R}$, also $R = \infty$. Dies ist die Exponentialreihe e^x.

Frage 15

Welche Aussage ueber die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist richtig?

A. Sie konvergiert gegen $\ln 2$

B. Sie konvergiert gegen 1

C. Sie divergiert, obwohl $\frac{1}{n} \to 0$

D. Sie konvergiert bedingt

Frage 15

Welche Aussage ueber die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist richtig?

A. Sie konvergiert gegen $\ln 2$

B. Sie konvergiert gegen 1

C. Sie divergiert, obwohl $\frac{1}{n} \to 0$

D. Sie konvergiert bedingt

Antwort: C

Die harmonische Reihe divergiert, obwohl $\frac{1}{n} \to 0$. $a_n \to 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend fuer Konvergenz.

Frage 16

$K_0 = 10\,000$ **EUR, 5 Jahre,** 4% **p.a. – Endkapital bei jaehrlicher Verzinsung?**

A. $K_5 = 12\,000{,}00$ EUR

B. $K_5 = 12\,500{,}00$ EUR

C. $K_5 = 14\,693{,}28$ EUR

D. $K_5 = 12\,166{,}53$ EUR

Frage 16

$K_0 = 10\,000$ **EUR, 5 Jahre,** 4% **p.a. – Endkapital bei jaehrlicher Verzinsung?**

A. $K_5 = 12\,000{,}00$ EUR

B. $K_5 = 12\,500{,}00$ EUR

C. $K_5 = 14\,693{,}28$ EUR

D. $K_5 = 12\,166{,}53$ EUR

Antwort: D

$K_n = K_0(1+i)^n = 10\,000 \cdot (1{,}04)^5 \approx 12\,166{,}53$ EUR. Einfache Verzinsung wuerde nur $12\,000$ EUR ergeben.

Frage 17

Warum ist Zinseszins vorteilhafter als einfache Verzinsung?

A. Die Zinsen werden mitverzinst, was zu exponentiellem Wachstum fuehrt
B. Der Zinssatz ist hoeher
C. Die Laufzeit ist kuerzer
D. Es fallen keine Gebuehren an

Frage 17

Warum ist Zinseszins vorteilhafter als einfache Verzinsung?

A. Die Zinsen werden mitverzinst, was zu exponentiellem Wachstum fuehrt
B. Der Zinssatz ist hoeher
C. Die Laufzeit ist kuerzer
D. Es fallen keine Gebuehren an

Antwort: A
Zinseszins: $K_n = K_0(1+i)^n$ (exponentiell). Einfache Verzinsung: $K_n = K_0(1+ni)$ (linear). Langfristig dominiert der exponentielle Effekt.

Frage 18

Stetige Verzinsung $K = K_0 \cdot \mathrm{e}^{it}$ fuer $K_0 = 1000$, $i = 0{,}05$, $t = 10$?

A. 1 500,00 EUR

B. 1 648,72 EUR

C. 1 628,89 EUR

D. 1 629,00 EUR

Frage 18

Stetige Verzinsung $K = K_0 \cdot \mathrm{e}^{it}$ fuer $K_0 = 1000$, $i = 0{,}05$, $t = 10$?

A. 1 500,00 EUR

B. 1 648,72 EUR

C. 1 628,89 EUR

D. 1 629,00 EUR

Antwort: B
$K = 1000 \cdot \mathrm{e}^{0,5} \approx 1000 \cdot 1{,}64872 = 1\,648{,}72$ EUR.

Frage 19

72er-Regel: Verdopplungszeit bei 6% Zinsen?

A. ca. 6 Jahre
B. ca. 10 Jahre
C. ca. 12 Jahre
D. ca. 18 Jahre

Frage 19

72er-Regel: Verdopplungszeit bei 6% Zinsen?

A. ca. 6 Jahre

B. ca. 10 Jahre

C. ca. 12 Jahre

D. ca. 18 Jahre

Antwort: C

$\frac{72}{6} = 12$ Jahre. Exakt: $\frac{\ln 2}{\ln 1{,}06} \approx 11{,}9$ Jahre.

Frage 20

Barwert einer Zahlung von 5 000 EUR in 3 Jahren bei 5% Diskontierung?

A. 4 319,19 EUR

B. 4 500,00 EUR

C. 4 761,90 EUR

D. 5 788,13 EUR

Frage 20

Barwert einer Zahlung von 5 000 EUR in 3 Jahren bei 5% Diskontierung?

A. 4 319,19 EUR

B. 4 500,00 EUR

C. 4 761,90 EUR

D. 5 788,13 EUR

Antwort: A

$\text{BW} = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{5\,000}{(1{,}05)^3} = \frac{5\,000}{1{,}15763} \approx 4\,319{,}19$ EUR.

Frage 21

Annuitaetenformel fuer die jaehrliche Rate A bei Nominalschuld K_0, Zins i, Laufzeit n?

A. $A = K_0 \cdot \frac{i}{n}$

B. $A = K_0 \cdot (1 + i)^n$

C. $A = K_0 \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

D. $A = \frac{K_0}{n} + K_0 \cdot i$

Frage 21

Annuitaetenformel fuer die jaehrliche Rate A bei Nominalschuld K_0, Zins i, Laufzeit n?

A. $A = K_0 \cdot \frac{i}{n}$

B. $A = K_0 \cdot (1+i)^n$

C. $A = K_0 \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

D. $A = \frac{K_0}{n} + K_0 \cdot i$

Antwort: C

$A = K_0 \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$. Der Bruch ist der Annuitaetenfaktor. Die Annuitaet bleibt konstant; der Zinsanteil sinkt, der Tilgungsanteil steigt.

Frage 22

Tilgungsplan mit konstanter Annuitaet: Wie veraendert sich der Zinsanteil?

A. Er bleibt konstant

B. Er steigt

C. Er sinkt, weil die Restschuld kleiner wird

D. Er ist nur in der ersten Rate enthalten

Frage 22

Tilgungsplan mit konstanter Annuitaet: Wie veraendert sich der Zinsanteil?

A. Er bleibt konstant

B. Er steigt

C. Er sinkt, weil die Restschuld kleiner wird

D. Er ist nur in der ersten Rate enthalten

Antwort: C

Die Restschuld sinkt durch Tilgung, daher $Z_k = i \cdot R_{k-1}$ faellt. Da $A = Z_k + T_k$ konstant bleibt, steigt T_k entsprechend.

Frage 23

Was ist der Rentenbarwertfaktor?

A. Der Kehrwert des Annuitaetenfaktors
B. Die Summe aller Zinszahlungen
C. Die Differenz zwischen Ein- und Auszahlungen
D. Der Faktor zur Umrechnung von Endwert in Barwert

Frage 23

Was ist der Rentenbarwertfaktor?

A. Der Kehrwert des Annuitaetenfaktors

B. Die Summe aller Zinszahlungen

C. Die Differenz zwischen Ein- und Auszahlungen

D. Der Faktor zur Umrechnung von Endwert in Barwert

Antwort: A

$\text{RBF} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$: Kehrwert des Annuitaetenfaktors. $\text{BW} = A \cdot \text{RBF}$ gibt den heutigen Wert von n gleichen Zahlungen A an.

Frage 24

Die Preiselastizitaet der Nachfrage ist definiert als:

A. $E = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$

B. $E = \frac{\Delta P}{\Delta Q}$

C. $E = \frac{dP}{dQ} \cdot \frac{Q}{P}$

D. $E = Q \cdot P$

Frage 24

Die Preiselastizitaet der Nachfrage ist definiert als:

A. $E = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$

B. $E = \frac{\Delta P}{\Delta Q}$

C. $E = \frac{dP}{dQ} \cdot \frac{Q}{P}$

D. $E = Q \cdot P$

Antwort: A
$E = \frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$. Fuer normale Gueter ist $E < 0$ (Preis steigt $\Rightarrow$ Nachfrage sinkt).

Frage 25

Preiselastizitaet $E = -0{,}3$ **– die Nachfrage ist:**

A. elastisch – eine Preiserhoehung senkt den Umsatz stark
B. einheitselastisch – der Umsatz bleibt gleich
C. unelastisch – eine Preiserhoehung senkt die Nachfrage nur wenig
D. perfekt elastisch – jede Preisaenderung vernichtet die Nachfrage

Frage 25

Preiselastizitaet $E = -0{,}3$ – die Nachfrage ist:

A. elastisch – eine Preiserhoehung senkt den Umsatz stark

B. einheitselastisch – der Umsatz bleibt gleich

C. unelastisch – eine Preiserhoehung senkt die Nachfrage nur wenig

D. perfekt elastisch – jede Preisaenderung vernichtet die Nachfrage

Antwort: C

$|E| = 0{,}3 < 1$: unelastisch (preisunempfindlich). Eine Preiserhoehung um 1% senkt die Nachfrage nur um 0,3%; der Umsatz steigt.

Frage 26

Preiserhoehung 10%**, Elastizitaet** $E = -2$ **– Nachfrageaenderung?**

A. Sie sinkt um 5%
B. Sie sinkt um 10%
C. Sie sinkt um 20%
D. Sie steigt um 20%

Frage 26

Preiserhoehung 10%, Elastizitaet $E = -2$ – Nachfrageaenderung?

A. Sie sinkt um 5%
B. Sie sinkt um 10%
C. Sie sinkt um 20%
D. Sie steigt um 20%

Antwort: C
$\%\Delta Q = E \cdot \%\Delta P = (-2) \cdot 10\% = -20\%$. Da $|E| > 1$ (elastisch), senkt die Preiserhoehung auch den Umsatz.

Frage 27

Welches Wachstumsmodell beschreibt $P(t) = P_0 \cdot \mathrm{e}^{rt}$?

A. Lineares Wachstum
B. Exponentielles Wachstum
C. Logistisches Wachstum
D. Polynomiales Wachstum

Frage 27

Welches Wachstumsmodell beschreibt $P(t) = P_0 \cdot \mathrm{e}^{rt}$?

A. Lineares Wachstum
B. Exponentielles Wachstum
C. Logistisches Wachstum
D. Polynomiales Wachstum

Antwort: B
$P(t) = P_0\mathrm{e}^{rt}$: exponentielles Wachstum ($r > 0$) bzw. Zerfall ($r < 0$). Konstante Wachstumsrate: $\frac{dP}{dt} = rP$.

Frage 28

Was beschreibt die Tragfaehigkeit K im logistischen Modell?

A. Die Anfangspopulation
B. Die maximale Wachstumsrate
C. Den oberen Grenzwert, dem sich die Population asymptotisch naehert
D. Den Zeitpunkt der schnellsten Zunahme

Frage 28

Was beschreibt die Tragfaehigkeit K im logistischen Modell?

A. Die Anfangspopulation
B. Die maximale Wachstumsrate
C. Den oberen Grenzwert, dem sich die Population asymptotisch naehert
D. Den Zeitpunkt der schnellsten Zunahme

Antwort: C
K ist der maximale Bestand, den die Umgebung tragen kann. $\lim_{t\to\infty} P(t) = K$. Das Wachstum bremst, wenn P sich K naehert.

Frage 29

Welche Python-Bibliothek eignet sich am besten fuer Folgen und Reihen?

A. Flask
B. Django
C. matplotlib
D. NumPy

Frage 29

Welche Python-Bibliothek eignet sich am besten fuer Folgen und Reihen?

A. Flask

B. Django

C. matplotlib

D. NumPy

Antwort: D

NumPy: `np.arange`, `np.cumsum` (Partialsummen), `np.geomspace`. matplotlib visualisiert, Flask/Django sind Web-Frameworks.

Frage 30

Sparplan A: 2% **jaehrlich. Sparplan B:** 1,95% **monatlich. Welcher ist besser?**

A. Sparplan A, weil der Nominalzins hoeher ist

B. Sparplan B, weil monatliche Verzinsung den Effektivzins erhoeht

C. Beide sind gleich gut

D. Es kommt allein auf die Laufzeit an

Frage 30

Sparplan A: 2% **jaehrlich. Sparplan B:** 1,95% **monatlich. Welcher ist besser?**

A. Sparplan A, weil der Nominalzins hoeher ist

B. Sparplan B, weil monatliche Verzinsung den Effektivzins erhoeht

C. Beide sind gleich gut

D. Es kommt allein auf die Laufzeit an

Antwort: A

Effektivzins B: $(1 + \frac{0{,}0195}{12})^{12} - 1 \approx 1{,}968\%$. Da $1{,}968\% < 2{,}0\%$, ist A trotz jaehrlicher Verzinsung besser.