Folgen, Reihen und Finanzmathematik

Ueberblick in 5 Minuten

BSc Analysis

Was sind Folgen und Reihen?

**Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge –
und was passiert, wenn man sie aufaddiert.**

Zinsen

- 1000, 1050, 1102, 1158, ...
- Jedes Jahr 5 % mehr
- Ihr Geld waechst *exponentiell*

Sparplan

- Jeden Monat 200 € einzahlen
- Was hat sich nach 30 Jahren angesammelt?
- Antwort: eine *Reihe*

Wachstum

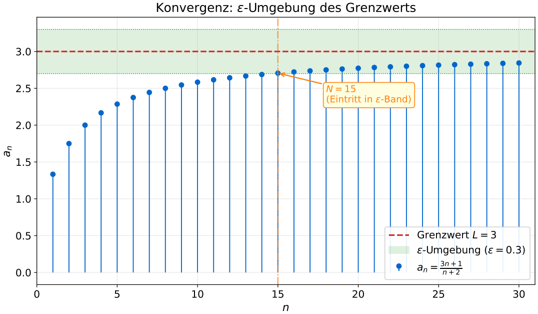
- Nutzer einer App: 100, 200, 400, ...
- Verdopplung pro Monat
- Wann kommt die Saettigung?

Kernidee

Eine **Folge** (a_n) ordnet jeder natuerlichen Zahl n einen Wert a_n zu. Eine **Reihe** $\sum a_k$ summiert die Glieder einer Folge auf.

Folgen und Reihen sind das mathematische Werkzeug hinter Zinsrechnung, Sparplaenen und Wachstumsmodellen.

Konvergenz – Wohin geht die Reise?



Grenzwert einer Folge

Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ liefert:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \quad \longrightarrow \quad 0$$

Ab irgendeinem Index liegen *alle* Glieder beliebig nahe an 0.

Alltags-Analogie

Stellen Sie sich vor, Sie gehen auf eine Wand zu – bei jedem Schritt halbieren Sie den Abstand. Sie kommen der Wand beliebig nahe, auch wenn Sie nie "ankommen".

Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.

Konvergenz bedeutet: Ab einem bestimmten Index liegen alle Folgenglieder innerhalb eines beliebig kleinen ε-Schlauchs.

Geometrische Reihe – Die Summe unendlich vieler Teile

Formel

Fuer $|q| < 1$ gilt:

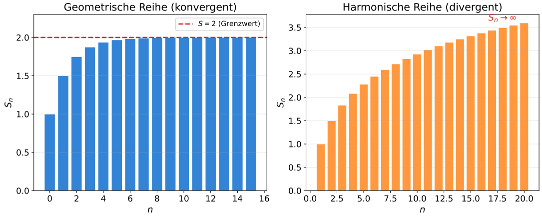
$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}$$

Beispiel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$

Anschauung:
Schneiden Sie einen Kuchen immer wieder in der Mitte durch. Alle Stuecke zusammen ergeben wieder den ganzen Kuchen.



Warum ist das wichtig?

Die geometrische Reihe ist die Grundlage fuer:

- Barwertberechnungen
- Annuitaetenformeln
- Ewige Renten

Die geometrische Reihe ist das zentrale Werkzeug der Finanzmathematik – sie verbindet Reihentheorie mit der Praxis.

Zinseszins – Ihr Geld arbeitet

Die Formel

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

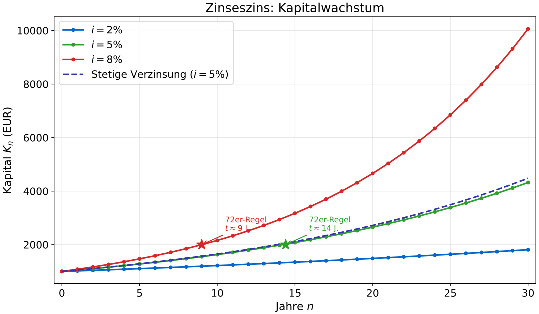
- K_0: Anfangskapital
- i: Zinssatz (z. B. 0,05 fuer 5 %)
- n: Laufzeit in Jahren

Zahlenbeispiel

$K_0 = 10\,000$ €, $i = 5\%$, $n = 30$ Jahre:

$$K_{30} = 10\,000 \cdot 1{,}05^{30} \approx \mathbf{43\,219} \text{ €}$$

Mehr als **vervierfacht** – ohne weiteres Zutun!



72er-Regel (Faustregel):

$$\text{Verdopplungszeit} \approx \frac{72}{i\,(\%)}$$

Bei 5%: $\approx 14{,}4$ Jahre bis zur Verdopplung.

Der Zinseszins ist eine geometrische Folge mit $q = 1 + i$ – exponentielles Wachstum in der Praxis.

Annuitaeten und Preiselastizitaet

Annuitaetenformel

Jaehrliche Rate A fuer einen Kredit K_0:

$$A = K_0 \cdot \frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Beispiel: $K_0 = 100\,000$ €, $i = 5\%$, $n = 10$ Jahre:

$$A \approx 12\,950\text{ €}/\text{Jahr}$$

- Die Rate bleibt **konstant**
- Am Anfang: viel Zinsen, wenig Tilgung
- Am Ende: wenig Zinsen, viel Tilgung

Preiselastizitaet der Nachfrage

$$E = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \cdot \frac{P}{Q}$$

- $|E| > 1$: **elastisch** – Konsumenten reagieren stark
- $|E| < 1$: **unelastisch** – Konsumenten kaufen trotzdem
- $|E| = 1$: **Erloes ist maximal**

Alltags-Beispiele:

- Benzin: unelastisch (man braucht es)
- Luxus-Handtaschen: elastisch (man kann verzichten)

Die Annuitaetenformel nutzt die geometrische Reihe – Preiselastizitaet verbindet Folgen (diskret) mit Ableitungen (stetig).

Zusammenfassung

Das Wichtigste in Kuerze

1. **Folgen = geordnete Zahlenreihen**
   Arithmetisch (gleichmaessig) oder geometrisch (prozentual)
2. **Konvergenz = es gibt einen Grenzwert**
   Ab einem Index liegen alle Glieder im ε-Schlauch
3. **Geometrische Reihe = Fundament der Finanzmathematik**
   $S = a/(1-q)$ fuer $|q| < 1$
4. **Zinseszins = geometrische Folge in Aktion**
   $K_n = K_0(1+i)^n$ – exponentielles Wachstum
5. **Annuitaeten und Elastizitaeten**
   Praktische Anwendungen von Reihen und Ableitungen

Merksatz

Folgen und Reihen sind die Sprache des Wachstums.

Die Kernformel?

$$S = \frac{a}{1-q}$$

Die Kernidee?
Unendlich viele Teile koennen ein endliches Ganzes ergeben.

Naechster Schritt: Konvergenzkriterien, Tilgungsplaene und Wachstumsmodelle vertiefen – in der Kernvorlesung.