

Folgen, Reihen und Finanzmathematik

Kompaktversion in 10 Minuten

BSc Analysis

Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge – und was passiert, wenn man sie aufaddiert.

Zinsen

- 1000, 1050, 1102, 1158, ...
- Jedes Jahr 5 % mehr
- Ihr Geld waechst *exponentiell*

Sparplan

- Jeden Monat 200 € einzahlen
- Was hat sich nach 30 Jahren angesammelt?
- Antwort: eine *Reihe*

Wachstum

- Nutzer einer App: 100, 200, 400, ...
- Verdopplung pro Monat
- Wann kommt die Saettigung?

Kernidee

Eine **Folge** (a_n) ordnet jeder natuerlichen Zahl n einen Wert a_n zu. Eine **Reihe** $\sum a_k$ summiert die Glieder einer Folge auf.

Folgen und Reihen sind das mathematische Werkzeug hinter Zinsrechnung, Sparplaenen und Wachstumsmodellen.

Arithmetische Folge

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

Konstante **Differenz** $d = a_{n+1} - a_n$.

Beispiele:

- 2, 5, 8, 11, 14, ... ($d = 3$)
- Lineare Abschreibung: Buchwert sinkt um festen Betrag pro Jahr
- Gehalt mit fixer Erhoehung: +50 €/Monat

Wachstum: *gleichmaessig* (linear)

Geometrische Folge

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Konstanter **Quotient** $q = a_{n+1}/a_n$.

Beispiele:

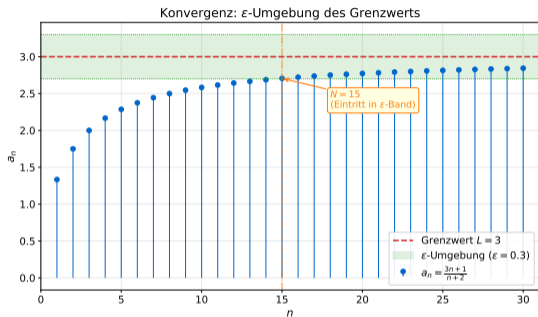
- 2, 6, 18, 54, ... ($q = 3$)
- Zinseszins: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$ mit $q = 1 + i$
- Bevoelkerung mit konstanter Wachstumsrate

Wachstum: *prozentual* (exponentiell)

Arithmetische Folge: $a_n = a_1 + (n - 1)d$



Konvergenz – Wohin geht die Reise?



Grenzwert einer Folge

Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ liefert:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rightarrow 0$$

Ab irgendeinem Index liegen *alle* Glieder beliebig nahe an 0.

ε -Definition (vereinfacht)

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ bedeutet:

Für *jede* noch so kleine Toleranz $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index N , ab dem *alle* a_n im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen.

Konvergenz ist das Fundament der Analysis – sie präzisiert, was “sich einem Wert nähern” mathematisch bedeutet.

Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

Rechenregeln

Seien $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann:

Summenregel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

Produktregel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Quotientenregel: (falls $b \neq 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Die Grenzwertsätze erlauben es, komplizierte Grenzwerte Schritt fuer Schritt auf einfache Bausteine zurueckzufuehren.

Beispiel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{n + 2}:$$

Zaehler und Nenner durch n teilen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3$$

Standard-Trick:

Zaehler und Nenner durch die **hoechste n -Potenz** teilen, dann verschwinden die "kleinen" Terme.

Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718$$

Definition

Die n -te **Partialsomme** ist

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Die **Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existiert.

Notwendiges Kriterium:

Konvergiert $\sum a_k$, so gilt $a_n \rightarrow 0$.

Achtung: Umkehrung gilt *nicht*!

$\sum \frac{1}{k} = \infty$ (harmonische Reihe), obwohl $\frac{1}{k} \rightarrow 0$.

Geometrische Reihe

Fuer $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}$$

Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

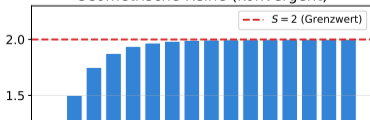
Finanzanwendung:

Barwert einer ewigen Rente:

$$BW = \frac{R}{i}$$

(geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{1+i}$)

Geometrische Reihe (konvergent)



Harmonische Reihe (divergent)



Die Formel

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

- K_0 : Anfangskapital
- i : Zinssatz (z. B. 0,05 fuer 5 %)
- n : Laufzeit in Jahren

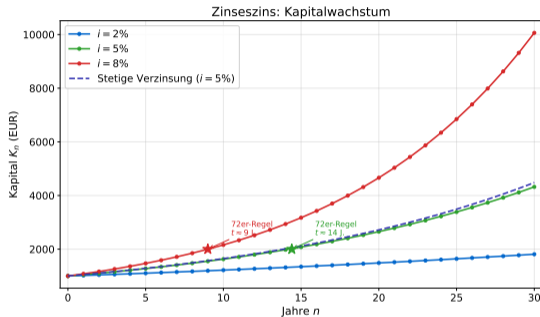
Zahlenbeispiel

$K_0 = 10\,000\text{ €}$, $i = 5\%$, $n = 30\text{ Jahre}$:

$$K_{30} = 10\,000 \cdot 1,05^{30} \approx \mathbf{43\,219\text{ €}}$$

Mehr als **vervierfacht** – ohne weiteres Zutun!

Der Zinseszins ist eine geometrische Folge mit $q = 1 + i$ – exponentielles Wachstum in der Praxis.



Stetige Verzinsung: $K(t) = K_0 \cdot e^{i \cdot t}$

Herleitung: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i/n)^n = e^i$

Exakte Verdopplungszeit

Gesucht: t_2 mit $K_0(1+i)^{t_2} = 2K_0$.

$$t_2 = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)}$$

72er-Regel (Faustregel)

$$t_2 \approx \frac{72}{i(\%)}$$

Beispiele:

- $i = 6\%$: $t_2 \approx 72/6 = 12$ Jahre
- $i = 8\%$: $t_2 \approx 72/8 = 9$ Jahre
- $i = 3\%$: $t_2 \approx 72/3 = 24$ Jahre

Die 72er-Regel ist ein beliebtes Werkzeug in der Finanzberatung – sie lässt sich ohne Taschenrechner anwenden.

Vergleich: exakt vs. 72er-Regel

i (%)	Exakt	72er-Regel
2	35,0	36,0
4	17,7	18,0
6	11,9	12,0
8	9,0	9,0
10	7,3	7,2
12	6,1	6,0

Warum 72?

Taylor-Entwicklung: $\ln(1+i) \approx i - \frac{i^2}{2}$.
Für $i \approx 8\%$ passt der Faktor 72 optimal.

Merke: Im Kopf rechnen – ideal für schnelle Abschätzungen in Finanzgesprächen!

Annuitätenformel – Gleichmaessige Kreditraten

Problem

Kredit K_0 , Zinssatz i , Laufzeit n Jahre.
Gesucht: jaehrliche Rate A .

Herleitung: Barwert aller Raten = Kredit:

$$K_0 = \sum_{t=1}^n \frac{A}{(1+i)^t} = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

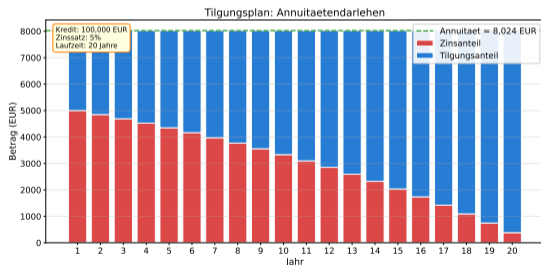
Annuitaetenformel

$$A = K_0 \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Beispiel

$K_0 = 100\,000\text{ €}$, $i = 5\%$, $n = 10\text{ Jahre}$:

$$A = 100\,000 \cdot \frac{0,05 \cdot 1,05^{10}}{1,05^{10} - 1} \approx 12\,950\text{ €/Jahr}$$



Die Annuitaetenformel ist die Umkehrung der geometrischen Reihenformel – angewandte Reihentheorie!

Annuitätendarlehen: $K_0 = 100\,000\text{ €}$, $i = 5\%$, $n = 5\text{ Jahre}$, $A \approx 23\,097\text{ €/Jahr}$.

Jahr	Restschuld (Anfang)	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	100 000	5 000	18 097	23 097
2	81 903	4 095	19 002	23 097
3	62 901	3 145	19 952	23 097
4	42 949	2 147	20 950	23 097
5	21 999	1 100	21 997	23 097
Summe		15 487	100 000	115 487

Beobachtungen:

- Annuität **bleibt konstant**
- Zinsanteil **sinkt** (weniger Restschuld)
- Tilgungsanteil **steigt** (Differenz zur Rate)

Formeln:

- Zinsen: $Z_t = K_{t-1} \cdot i$
- Tilgung: $T_t = A - Z_t$
- Restschuld: $K_t = K_{t-1} - T_t$

Am Anfang zahlt man hauptsächlich Zinsen, am Ende hauptsächlich Tilgung – typisch fuer Annuitätendarlehen.

Definition

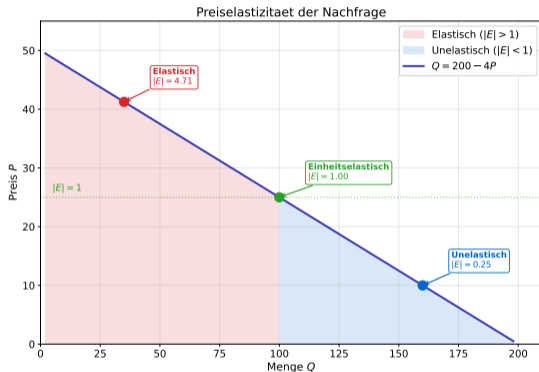
$$E = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

$ E > 1$	elastisch
$ E = 1$	einheitselastisch
$ E < 1$	unelastisch

Auswirkung auf Erloes $R = P \cdot Q$:

- $|E| > 1$: Preiserhoehung \Rightarrow Erloes **sinkt**
- $|E| < 1$: Preiserhoehung \Rightarrow Erloes **steigt**
- $|E| = 1$: Erloes ist **maximal**

Preispolitik erfordert Kenntnis der Elastizitaet – sie verbindet diskrete Aenderungen (Folgen) mit Ableitungen (Analysis).



Interpretation:

- Elastisch: Luxusgueter (Konsumenten weichen aus)
- Unelastisch: Benzin, Medikamente (man braucht es)

Exponentielles Wachstum

$$N(t) = N_0 \cdot e^{r t}$$

Konstante **relative** Wachstumsrate r .
Geometrische Folge in diskreter Zeit.

Problem: $N \rightarrow \infty$ – unrealistisch!

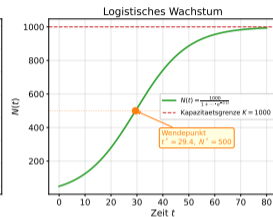
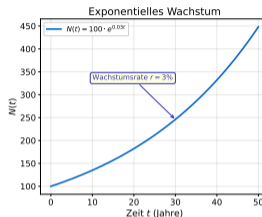
Logistisches Wachstum

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-r t}}$$

Kapazitaetsgrenze K , S-foermige Kurve.

Phasen: Anlauf \rightarrow schnelles Wachstum \rightarrow Saettigung.

Die Wahl des Wachstumsmodells bestimmt die Prognose – exponentiell ueberschaetzt langfristig, logistisch ist realistischer.



Wirtschaftliche Beispiele:

- Marktdurchdringung neuer Technologien
- Smartphone-Verbreitung (S-Kurve)
- BIP-Wachstum: $Y_t = Y_0(1 + g)^t$

Fazit: Exponentiell fuer kurze Zeitraeume, logistisch fuer langfristige Prognosen.

Das Wichtigste in Kuerze

1. **Folgen:** arithmetisch ($+d$) vs. geometrisch ($\times q$)
2. **Konvergenz:** ε -Definition, Grenzwertsatze
3. **Reihen:** Partialsummenfolge, geometrische Reihe
 $S = a/(1 - q)$
4. **Zinseszins:** $K_n = K_0(1 + i)^n$, 72er-Regel
5. **Annuitaeten:** $A = K_0 \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$
6. **Elastizitaet:** $E = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$
7. **Wachstum:** exponentiell vs. logistisch

Merksatz

Folgen und Reihen sind die Sprache des Wachstums.

Geometrische Reihe:

$$S = \frac{a}{1 - q}$$

Zinseszins:

$$K_n = K_0(1 + i)^n$$

72er-Regel:

$$t_2 \approx 72/i(\%)$$

Nachster Schritt: Konvergenzkriterien, Potenzreihen, Python-Simulationen und formale Beweise – in der Kernvorlesung.