

Folgen, Reihen und Finanzmathematik

Komplettversion mit Beweisen und Uebungen

BSc Analysis

- 1 Einführung
- 2 Folgen
- 3 Konvergenz und Grenzwerte
- 4 Reihen
- 5 Zinsrechnung
- 6 Annuitäten und Tilgung
- 7 Preiselastizität
- 8 Wachstumsmodelle
- 9 Python-Anwendungen
- 10 Historische Anmerkungen
- 11 Zusammenfassung

Am Ende dieser Lektion koennen Sie:

1. **Folgen** definieren, klassifizieren (arithmetisch, geometrisch) und auf Konvergenz untersuchen – die ε -Definition des Grenzwerts anwenden.
2. **Reihen** als Grenzwerte von Partialsummen verstehen und mit dem Quotienten-, Wurzel-, Vergleichs-, Leibniz- und Integralkriterium auf Konvergenz pruefen.
3. **Zinseszins, Annuitaeten und Tilgungsplaene** berechnen und den Zusammenhang zwischen geometrischen Reihen und Finanzmathematik erklaren.
4. **Preiselastizitaet und Wachstumsmodelle** (exponentiell, logistisch) formulieren und oekonomisch interpretieren.
5. **Formale Beweise** fuer alle zentralen Saetze vollstaendig nachvollziehen und selbstaendig fuehren.
6. **Python-Simulationen** fuer Zinsszenarien, Monte-Carlo-Analysen und Konvergenz-Visualisierungen implementieren.

Die Komplettversion enthaelt alle Beweise, Uebungsaufgaben mit Loesungen und zusaetzhche Konvergenztests.

Definition

Eine **Folge** reeller Zahlen ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Man schreibt $(a_n)_{n \geq 1}$ oder kurz (a_n) .

Explizite Darstellung:

Eine Formel gibt a_n direkt als Funktion von n an.

- $a_n = \frac{1}{n}$ (harmonische Folge)
- $a_n = (-1)^n$ (alternierend)
- $a_n = 2n - 1$ (ungerade Zahlen)

Rekursive Darstellung:

a_n wird durch vorherige Glieder definiert.

- $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$ (arithmetisch)
- $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2 a_n$ (geometrisch)
- Fibonacci: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Anschauung:

Eine Folge ist eine *geordnete Liste* von Zahlen:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

Wirtschaftliche Beispiele:

- Monatliche Umsatzzahlen eines Unternehmens
- Jaehrliche BIP-Werte eines Landes
- Tageskurse einer Aktie
- Quartalsweise Gewinnentwicklung

Notation:

$(a_n)_{n \geq 1}$ betont den Startindex.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist äquivalent.

Jede Folge ist eine Funktion auf \mathbb{N} – die Folgentheorie ist damit ein Spezialfall der Analysis.

Definition

Eine Folge heisst **arithmetisch**, wenn die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad d = a_{n+1} - a_n = \text{const.}$$

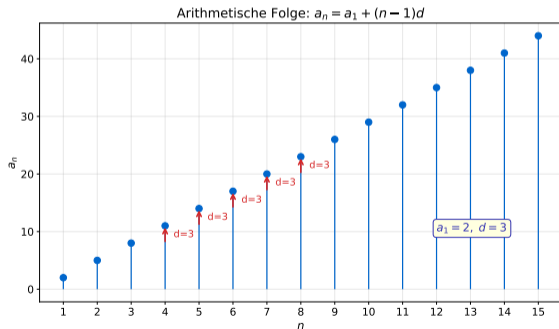
Beispiele:

- 2, 5, 8, 11, 14, ... ($d = 3$)
- 100, 95, 90, 85, ... ($d = -5$)
- $a_1 = 1000$, $d = 50$: Gehaltserhoehung um 50 €/Monat

Wirtschaftliche Anwendung:

Lineare Abschreibung eines Anlageguts:

- Anschaffungswert: $K_0 = 50\,000$ €
- Nutzungsdauer: $n = 10$ Jahre
- Jaehrliche Abschreibung: $d = -5\,000$ €
- Buchwert im Jahr k : $B_k = 50\,000 - 5\,000k$



Arithmetische Folgen modellieren gleichmaessiges (lineares) Wachstum – jeder Schritt addiert denselben Betrag.

Definition

Eine Folge heisst **geometrisch**, wenn der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist:

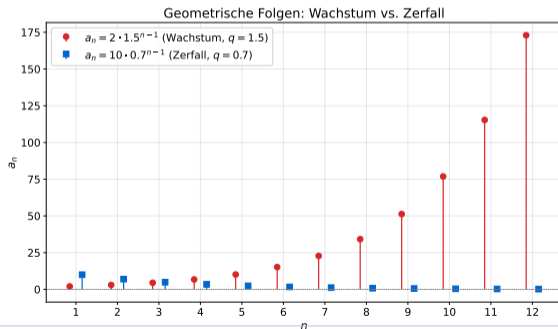
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{const.}$$

Fallunterscheidung:

- $|q| < 1$: Folge konvergiert gegen 0
- $q = 1$: konstante Folge ($a_n = a_1$)
- $|q| > 1$: Folge divergiert (wächst unbeschränkt)
- $q = -1$: alternierend ($a_1, -a_1, a_1, \dots$)

Wirtschaftliche Beispiele:

- Zinseszins: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$ mit $q = 1 + i$
- Inflation: Kaufkraft sinkt mit $q < 1$
- Bevölkerungswachstum: $N_{t+1} = r \cdot N_t$



Geometrische Folgen modellieren prozentuales (exponentielles) Wachstum – jeder Schritt multipliziert mit demselben Faktor.

Monotonie

Eine Folge (a_n) heißt

- **monoton wachsend**, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n ,
- **streng monoton wachsend**, falls $a_{n+1} > a_n$ für alle n ,
- **monoton fallend**, falls $a_{n+1} \leq a_n$ für alle n ,
- **streng monoton fallend**, falls $a_{n+1} < a_n$ für alle n .

Nachweis-Methoden:

1. Differenz: $a_{n+1} - a_n \geq 0$?
2. Quotient: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$? (falls $a_n > 0$)
3. Ableitung: $f'(n) \geq 0$? (falls $a_n = f(n)$)

Beschränktheit

Eine Folge (a_n) heißt

- **nach oben beschränkt**, falls $\exists M \in \mathbb{R}: a_n \leq M$ für alle n ,
- **nach unten beschränkt**, falls $\exists m \in \mathbb{R}: a_n \geq m$ für alle n ,
- **beschränkt**, falls nach oben *und* unten beschränkt.

Satz (Monotoniekriterium)

Jede **monotone und beschränkte** Folge ist konvergent.

Beispiel: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ ist streng monoton wachsend und durch 1 nach oben beschränkt \Rightarrow konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Das Monotoniekriterium garantiert Konvergenz, ohne den Grenzwert explizit zu kennen – ein mächtiges theoretisches Werkzeug.

Eulersche Zahl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828$$

Bedeutung: e ist die Basis des natuerlichen Logarithmus und zentral fuer stetige Verzinsung:

$$K(t) = K_0 \cdot e^{it}$$

n -te Wurzel von n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$$

Beweis-Idee: Setze $a_n = n^{1/n} - 1 \geq 0$. Dann $n = (1 + a_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$ (Bernoulli), also $a_n \leq \sqrt{2/(n-1)} \rightarrow 0$.

Die Eulersche Zahl e verbindet Folgen, Reihen und Finanzmathematik – sie taucht in dieser Vorlesung immer wieder auf.

Nullfolgen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \text{fuer } |q| < 1$$

Weitere wichtige Grenzwerte:

Folge	Grenzwert
$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$	e^x
$\frac{n!}{n^n}$	0
$\sqrt[n]{a} \quad (a > 0)$	1
$\frac{a^n}{n!} \quad (a \in \mathbb{R})$	0

Hierarchie: $n! \gg a^n \gg n^k \gg \ln n$ fuer $n \rightarrow \infty$.

Beweis: $(1 + 1/n)^n$ konvergiert

Satz

Die Folge $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ist streng monoton wachsend und nach oben beschränkt. Somit konvergiert sie.

1. Monotonie: Wir zeigen $a_{n+1} > a_n$.

Nach der Ungleichung von arithmetischem und geometrischem Mittel (AM-GM):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Man schreibt $(1 + \frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n$ und zeigt mit AM-GM, dass:

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

indem man $n+1$ Faktoren $\frac{n+2}{n+1}$ mit einem Faktor 1 geometrisch mittelt.

2. Beschränktheit: Wir zeigen $a_n < 3$.

Binomischer Lehrsatz:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &\leq 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

da $k! \geq 2^{k-1}$ fuer $k \geq 1$.

Fazit: (a_n) ist monoton wachsend und beschränkt \Rightarrow konvergent nach dem Monotoniekriterium.

Der Grenzwert heisst $e \approx 2,71828$.

Euler berechnete 1748 die ersten 23 Nachkommastellen von e – heute kennt man ueber 30 Billionen Stellen.

Aufgabe 1: Klassifikation

Bestimmen Sie, ob die folgenden Folgen arithmetisch, geometrisch oder keines von beiden sind:

- (a) 3, 7, 11, 15, 19, ...
- (b) 2, 6, 18, 54, 162, ...
- (c) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
- (d) 100, 95, 90, 85, ...

Aufgabe 2: Monotonie

Zeigen Sie, dass $a_n = \frac{n}{n+1}$ streng monoton wachsend ist, und bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Aufgabe 3: Grenzwert

Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3n + 1}{2n^2 + n - 4}$.

Üben Sie diese Aufgaben zuerst selbstständig, bevor Sie die Lösung lesen – aktives Lösen ist effektiver als passives Lesen.

Loesungen

1: (a) arithmetisch, $d = 4$; (b) geometrisch, $q = 3$; (c) Fibonacci (keines); (d) arithmetisch, $d = -5$.

$$2: a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \checkmark$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} = 1.$$

3: Durch n^2 teilen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}} = \frac{5}{2}$$

Konvergenz: Die ε -Definition

Definition (Grenzwert einer Folge)

Eine Folge (a_n) **konvergiert** gegen $a \in \mathbb{R}$, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

Man schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$ fuer $n \rightarrow \infty$.

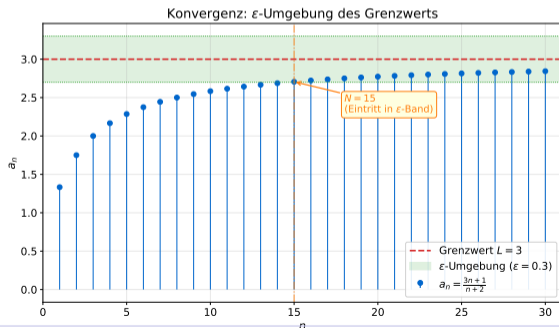
Anschaung:

- Wir geben eine beliebig kleine "Toleranz" $\varepsilon > 0$ vor.
- Ab einem Index N liegen *alle* Folgenglieder im ε -Schlauch $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
- Nur *endlich viele* Glieder duerfen ausserhalb liegen.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Fuer $\varepsilon = 0,01$ waehle $N = 101$:

$$n \geq 101 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{101} < 0,01 = \varepsilon \checkmark$$



Die ε -Definition praezisiert, was "beliebig nahe kommen" bedeutet – sie ist das Fundament der Analysis

Satz

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist **eindeutig**.

Beweis (Widerspruch):

Angenommen, $a_n \rightarrow a$ und $a_n \rightarrow b$ mit $a \neq b$.

Setze $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$.

Da $a_n \rightarrow a$: $\exists N_1$: $|a_n - a| < \varepsilon$ fuer $n \geq N_1$.

Da $a_n \rightarrow b$: $\exists N_2$: $|a_n - b| < \varepsilon$ fuer $n \geq N_2$.

Fuer $n \geq \max(N_1, N_2)$:

$$\begin{aligned} |a - b| &\leq |a - a_n| + |a_n - b| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b| \end{aligned}$$

Widerspruch! Also $a = b$. □

Konsequenzen:

- Wir duerfen von "dem" Grenzwert sprechen.
- Die Schreibweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ist wohldefiniert.

Satz: Konvergenz \Rightarrow Beschraenktheit

Jede konvergente Folge ist beschraenkt.

Beweis-Idee: Fuer $\varepsilon = 1$ gibt es N mit $|a_n - a| < 1$ fuer $n \geq N$. Also $|a_n| < |a| + 1$ fuer $n \geq N$, und $M = \max(|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1)$ ist obere Schranke fuer $|a_n|$.

Achtung: Die Umkehrung gilt *nicht!*

$a_n = (-1)^n$ ist beschraenkt, aber nicht konvergent.

Der Eindeutigkeitsbeweis nutzt die Dreiecksungleichung – eines der wichtigsten Werkzeuge der Analysis.

Rechenregeln fuer konvergente Folgen

Seien (a_n) und (b_n) konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gilt:

Summenregel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

Produktregel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Quotientenregel: (falls $b \neq 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Skalierung: Fuer $c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$$

Weitere Regeln:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ (falls $a_n \geq 0$)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = a^k$ fuer $k \in \mathbb{N}$

Beispiel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2}:$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \\ &= \frac{3+0}{1+0} = 3 \end{aligned}$$

Trick: Zaehler und Nenner durch die hoechste n -Potenz teilen

Satz

Falls $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$, dann $(a_n + b_n) \rightarrow a + b$.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Da $a_n \rightarrow a$: $\exists N_1$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ fuer $n \geq N_1$.

Da $b_n \rightarrow b$: $\exists N_2$ mit $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ fuer $n \geq N_2$.

Setze $N = \max(N_1, N_2)$. Fuer $n \geq N$:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also $(a_n + b_n) \rightarrow (a + b)$. □

Beweis-Strategie:

1. Gegebenes $\varepsilon > 0$ auf die Teilfolgen aufteilen:
 $\varepsilon/2 + \varepsilon/2$
2. Dreiecksungleichung anwenden
3. Die beiden N -Werte zum Maximum kombinieren

Warum $\varepsilon/2$?

Weil wir *zwei* Abschaetzungen addieren. Allgemein: Bei k Summanden nimmt man ε/k .

Methodische Bemerkung

Der " $\varepsilon/2$ -Trick" ist eine Standard-Technik in ε - N -Beweisen. Er taucht bei fast allen Grenzwertsatzen auf.

Die Beweisstruktur "wähle $N = \max(N_1, N_2)$ und nutze Dreiecksungleichung" ist das Muster fuer alle Grenzwertsatz-Beweise.

Satz (Einschnuerungssatz)

Seien (a_n) , (b_n) , (c_n) Folgen mit $b_n \leq a_n \leq c_n$ fuer alle $n \geq n_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$. Dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. Es existieren N_1, N_2 mit:

- $|b_n - L| < \varepsilon$ fuer $n \geq N_1$, d. h. $L - \varepsilon < b_n$
- $|c_n - L| < \varepsilon$ fuer $n \geq N_2$, d. h. $c_n < L + \varepsilon$

Fuer $n \geq N = \max(N_1, N_2, n_0)$:

$$L - \varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < L + \varepsilon$$

Also $|a_n - L| < \varepsilon$. □

Beispiel: $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \text{ und } \pm \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

Der Sandwich-Satz wird auch als "Quetschlemma" oder "Squeeze Theorem" bezeichnet – ein Standardwerkzeug der Analysis.

Beispiel: $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

- $\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \dots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}$
- $\frac{n!}{n^n} \geq 0$ und $\frac{1}{n} \rightarrow 0$
- $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Merke: Besonders nuetzlich, wenn der Grenzwert nicht direkt berechenbar ist – man braucht nur passende Schranken.

Typische Anwendung:

- Betrag abschuetzen: $|a_n| \leq c_n \rightarrow 0$
- Dann $a_n \rightarrow 0$ (da $-c_n \leq a_n \leq c_n$)

Beispiel 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2}$$

Durch n teilen: $= \frac{3+1/n}{1+2/n} = 3$.

Beispiel 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n^2-3}$$

Durch n^2 teilen: $= \frac{1+1/n^2}{2-3/n^2} = 1/2$.

Beispiel 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Konjugiert erweitern:

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$$

Übung: Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3/n)^n$. Antworten: 0 und e^3 .

Beispiel 4: Rekursive Folge

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6/a_n).$$

Falls L existiert: $L = \frac{1}{2}(L + 6/L) \Rightarrow L = \sqrt{6}$.
Monotonie + Beschränktheit per AM-GM.
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{6}$ (Heron-Verfahren).

Standard-Techniken:

1. Durch höchste n -Potenz teilen
2. Konjugiert erweitern (bei Wurzeln)
3. L'Hôpital (bei $\frac{\infty}{\infty}$)
4. Sandwich-Satz (bei Abschätzungen)
5. Rekursiv: Grenzwert-Gleichung + Monotonie

Aufgabe 4: ε -Beweis

Beweisen Sie mit der ε -Definition, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$.

Aufgabe 5: Sandwich

Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$.

Aufgabe 6: Grenzwert

Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$.

Aufgabe 7: Rekursiv

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Zeigen Sie Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert.

Der ε -Beweis in Aufgabe 4 ist ein "Pflichtbeispiel" – beherrschen Sie dieses Schema, koennen Sie jeden direkten Konvergenzbeweis fuehren.

Loesungen

4: $\left| \frac{2n+1}{n} - 2 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ fuer $n > N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$. ✓

5: $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Sandwich mit $0 \leq |a_n| \leq 1/n$.

6: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 5/n\right)^n = e^5 \approx 148,41$.

7: Falls L existiert: $L = \sqrt{2 + L}$, $L^2 - L - 2 = 0$, $(L - 2)(L + 1) = 0$, also $L = 2$ (da $L > 0$).

Monotonie:

$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + a_n - a_n^2 = (2 - a_n)(1 + a_n) > 0$ fuer $a_n < 2$.

Beschaerakt: $a_n < 2$ per Induktion. ✓

Definition

Sei $(a_k)_{k \geq 1}$ eine Folge. Die n -te **Partialsumme** ist $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Die **Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist der Grenzwert $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, falls dieser existiert.

Notwendiges Kriterium

Konvergiert $\sum a_k$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Achtung: Die Umkehrung gilt *nicht!*

$\sum \frac{1}{k}$ divergiert, obwohl $\frac{1}{k} \rightarrow 0$.

Teleskopsumme:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

Harmonische Reihe divergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Beweis (Oresme, ca. 1350):

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>1/2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{>1/2} + \dots$$

Jeder Block liefert $> 1/2$, also $S = \infty$.

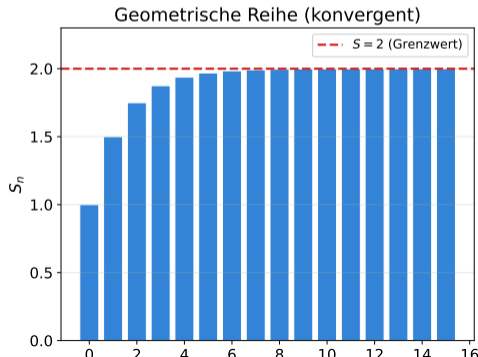
Wirtschaft: Reihen beschreiben kumulierte Zahlungsstroeme – z. B. den Gesamtwert aller kuenftigen Dividenden.

Die Partialsummenfolge (S_n) uebersetzt "Reihenkonvergenz" in "Folgenkonvergenz".

Arithmetische Reihe

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

Gauss: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
 $1 + 2 + \dots + 100 = 5050$.

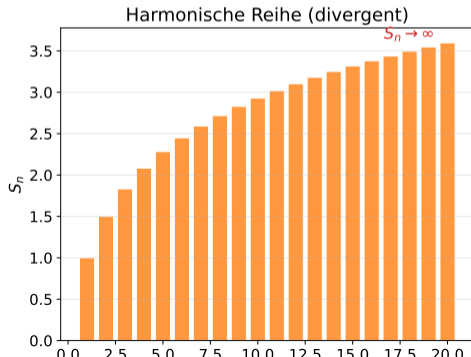


Geometrische Reihe

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad S = \frac{a_1}{1 - q} \quad (|q| < 1)$$

Beweis: $S_n - qS_n = a_1(1 - q^n)$.

Finanz: $BW = R/i$ (ewige Rente).



Konvergenztests fuer Reihen

Quotientenkriterium

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$$

- $L < 1$: konvergent
- $L > 1$: divergent
- $L = 1$: keine Aussage

Gut fuer: $n!$, a^n .

$$\sum \frac{2^n}{n!}: L = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 \checkmark$$

Wurzelkriterium

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

- $L < 1$: konvergent
- $L > 1$: divergent
- $L = 1$: keine Aussage

Gut fuer: $f(n)^n$.

$$\sum (n/(2n+1))^n: L = 1/2 \checkmark$$

Vergleichskriterium

$$0 \leq a_n \leq b_n:$$

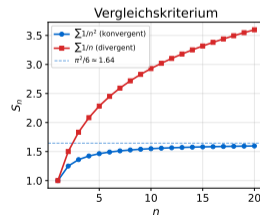
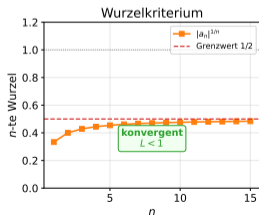
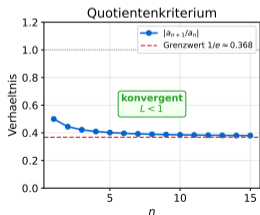
- $\sum b_n$ konv. $\Rightarrow \sum a_n$ konv.
- $\sum a_n$ div. $\Rightarrow \sum b_n$ div.

Vergleichsreihen:

$$\sum 1/n^p: \text{konv. fuer } p > 1.$$

$$\sum q^n: \text{konv. fuer } |q| < 1.$$

Konvergenztests im Vergleich



Faustregel: Erst Quotientenkriterium, dann Wurzelkriterium, zuletzt Vergleichskriterium.

Quotientenkriterium

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$ existiert. $L < 1 \Rightarrow$ abs. Konvergenz, $L > 1 \Rightarrow$ Divergenz.

Beweis ($L < 1$):

Wähle q mit $L < q < 1$. Es existiert N mit $|a_{n+1}/a_n| \leq q$ für $n \geq N$.

Iteration: $|a_{N+k}| \leq |a_N| \cdot q^k$.

Also:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{N+k}| \leq |a_N| \cdot \frac{1}{1-q} < \infty$$

Vergleich mit geometrischer Reihe. □

Beweis ($L > 1$):

Es existiert N mit $|a_{n+1}/a_n| > 1$ für $n \geq N$.

Also $|a_n|$ ist wachsend $\Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ Divergenz. □

Fall $L = 1$: Keine Aussage.

- $\sum 1/n$: $L = 1$, divergent
- $\sum 1/n^2$: $L = 1$, konvergent

Merke: Kern des Beweises ist der Vergleich mit einer geometrischen Reihe (Majorante).

Das Quotientenkriterium ist ein "vergrobertes" Vergleichskriterium mit der geometrischen Reihe als Majorante.

Satz (Leibniz)

Sei (b_n) eine monoton fallende Nullfolge ($b_n > 0$, $b_{n+1} \leq b_n$, $b_n \rightarrow 0$). Dann konvergiert die **alternierende Reihe**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

Beweis-Skizze:

- $S_{2m} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \dots \geq 0$ (monoton wachsend)
- $S_{2m} = b_1 - (b_2 - b_3) - \dots \leq b_1$ (nach oben beschraenkt)
- $S_{2m+1} = S_{2m} + b_{2m+1}$ ist monoton fallend
- $S_{2m+1} - S_{2m} = b_{2m+1} \rightarrow 0$

Beide Teilfolgen konvergieren gegen denselben Grenzwert.

□

Fehlerabschaetzung:

$$|S - S_n| \leq b_{n+1}$$

Der Fehler ist hoechstens so gross wie das erste

Beispiel 1: Alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$$

$b_n = 1/n$ ist monoton fallend und $\rightarrow 0$ ✓

Beispiel 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

Beachte: Die alternierende harmonische Reihe konvergiert, obwohl die nicht-alternierende harmonische

Satz (Integraltest)

Sei $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton fallend und stetig. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(x) \, dx \text{ konvergiert}$$

Beweis-Idee:

Da f fallend: fuer $k \leq x \leq k+1$:

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

Integration:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) \, dx \leq f(k)$$

Summation ueber k :

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

Beispiel 1: p -Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ konvergiert} \iff p > 1$$

$$\int_1^{\infty} x^{-p} \, dx = \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^{\infty} \text{ konvergiert fuer } p > 1.$$

Beispiel 2: $\sum \frac{1}{n \ln n}$ (fuer $n \geq 2$):

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) \Big|_2^{\infty} = \infty$$

\Rightarrow divergent!

Test	Anwendbar auf	Vorteil	Nachteil
Notwendig	alle Reihen	einfach	nur Divergenz
Quotientenk.	$n!$, a^n	leicht rechenbar	$L = 1$ keine Aussage
Wurzelk.	$f(n)^n$	staerker als Quotient	selten einfacher
Vergleichsk.	$a_n \geq 0$	flexibel	Vergleichsreihe noetig
Leibniz	alternierend	einfach	nur alternierend
Integraltest	f fallend, stetig	entscheidet p -Reihen	Integral berechnen

Entscheidungsbaum:

1. Ist $a_n \not\rightarrow 0$? \Rightarrow divergent
2. Alternierend? \Rightarrow Leibniz pruefen
3. Enthaelte $n!$ oder a^n ? \Rightarrow Quotientenk.
4. Form $f(n)^n$? \Rightarrow Wurzelk.
5. Vergleichbar mit $1/n^p$? \Rightarrow Vergleichsk.
6. Integral berechenbar? \Rightarrow Integraltest

Absolute vs. bedingte Konvergenz:

- **Absolut:** $\sum |a_n|$ konvergiert
 $\Rightarrow \sum a_n$ konvergiert (staerker!)
- **Bedingt:** $\sum a_n$ konvergiert, aber $\sum |a_n|$ divergiert

Beispiel:

$\sum (-1)^{n+1}/n$: bedingt konvergent
 $\sum 1/n$: divergent (absolut nicht konvergent)

Der Entscheidungsbaum hilft bei der Wahl des richtigen Konvergenztests – systematisch von oben nach unten durchgehen.

Aufgabe 8

Prüfen Sie auf Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Aufgabe 9

Prüfen Sie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Aufgabe 10

Berechnen Sie die Summe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{5^n}$

Aufgabe 11

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ konvergent?

Loesungen

8: Quotientenk.: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$.

\Rightarrow **konvergent** (es ist $e^3 - 1$).

9: Leibniz: $b_n = 1/\sqrt{n}$ ist monoton fallend, $b_n \rightarrow 0$.

\Rightarrow **bedingt konvergent**.

Aber $\sum 1/\sqrt{n}$ divergiert ($p = 1/2 < 1$), also nicht absolut konvergent.

10: Geometrische Reihe: $a = 2$, $q = 1/5$.

$S = \frac{2}{1-1/5} = \frac{2}{4/5} = 5/2$.

11: Integraltest: $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}$.

\Rightarrow **konvergent**.

Definition (Potenzreihe)

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ mit Konvergenzradius R .

Konvergenzradius

$R = 1 / \limsup \sqrt[k]{|c_k|}$ oder $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n / c_{n+1}|$.

- $|x - x_0| < R$: absolute Konvergenz
- $|x - x_0| > R$: Divergenz

Wichtige Taylor-Reihen ($x_0 = 0$):

$$e^x = \sum \frac{x^k}{k!} \quad R = \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^k \quad R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \quad R = 1$$

$$\sin(x) = \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad R = \infty$$

Taylor-Approximation von e^x



Einfacher Zins vs. Zinseszins

Einfacher Zins (linear)

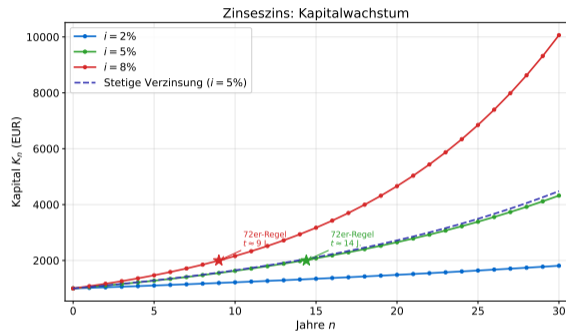
$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i) - \text{arithmetische Folge.}$$

Zinseszins (exponentiell)

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n - \text{geometrische Folge.}$$

Stetige Verzinsung: $K(t) = K_0 \cdot e^{it}$. Herleitung:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i/n)^n = e^i$.

Aequivalenz: $i_s = \ln(1 + i_d)$, $i_d = e^{i_s} - 1$.



$$K_0 = 1000 \text{ €}, i = 5\%$$

Jahr	Einfach	Zinseszins
10	1 500	1 629
20	2 000	2 653
30	2 500	4 322

Exakte Verdopplungszeit

$$t_2 = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)}. \text{ Stetig: } t_2 = \frac{\ln 2}{i} \approx \frac{0,6931}{i}.$$

72er-Regel

$$t_2 \approx 72/i(\%)$$

Herleitung: $\ln(1+i) \approx i - i^2/2$, also
 $t_2 \approx 0,6931/(i - i^2/2)$. Fuer $i \approx 8\%$ passt Faktor 72.

i (%)	Exakt	72er
2	35,0	36,0
4	17,7	18,0
6	11,9	12,0
8	9,0	9,0
10	7,3	7,2
12	6,1	6,0

Die 72er-Regel – im Kopf rechnen, ideal fuer Finanzgespraeche.

Aufzinsung: $K_n = K_0(1 + i)^n$

Abzinsung: $K_0 = K_n/(1 + i)^n$

NPV: $NPV = -I_0 + \sum_{t=1}^n CF_t/(1 + i)^t$

Beispiel

10 000 € in 5 Jahren, $i = 6\%$:

$K_0 = 10\,000/1,06^5 \approx 7\,473$ €.

NPV-Entscheidungsregel

- $NPV > 0$: Investition lohnt sich
- $NPV = 0$: Grenzfall
- $NPV < 0$: Investition lohnt sich nicht

Interner Zinsfuß (IRR):

Zinssatz i^* mit $NPV(i^*) = 0$.

Investition lohnt sich, falls $i^* >$ Marktzens.

Barwert und Endwert verbinden Gegenwart und Zukunft durch den Zinssatz.

Annuitätenformel – Herleitung aus geometrischer Reihe

Barwert aller Raten = Kredit:

$$K_0 = A \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Annuitätenformel

$$A = K_0 \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

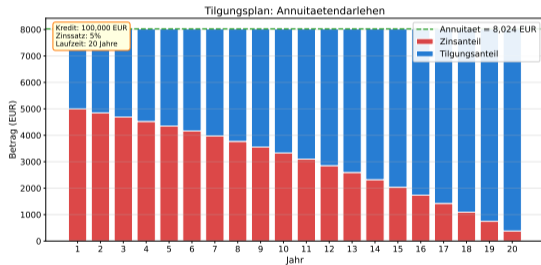
Detaillierte Herleitung: Mit $v = 1/(1+i)$:

$$\sum_{t=1}^n v^t = v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Die Annuitätenformel ist exakt die Umkehrung der geometrischen Reihenformel.

$$K_0 = 100\,000, i = 5\%, n = 10$$

$$A \approx 12\,950 \text{ €/Jahr.}$$



Nachschuessig

$$BW = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}, \quad EW = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Vorschuessig

$$BW_{\text{vor}} = BW_{\text{nach}} \cdot (1+i)$$
$$EW_{\text{vor}} = EW_{\text{nach}} \cdot (1+i)$$

Altersvorsorge

$R = 2\,400 \text{ €/Jahr}$, 30 Jahre, $i = 4\%$: $EW \approx 134\,622 \text{ €}$.
Eingezahlt: 72 000. Zinsertrag: $\approx 62\,622$.

Rentenbarwert: "Was ist ein Zahlungsstrom heute wert?" Rentenendwert: "Was hat sich angesammelt?"

$K_0 = 100\,000$, $i = 5\%$, $n = 5$, $A \approx 23\,097\text{ €}$.

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuitaet
1	100 000	5 000	18 097	23 097
2	81 903	4 095	19 002	23 097
3	62 901	3 145	19 952	23 097
4	42 949	2 147	20 950	23 097
5	21 999	1 100	21 997	23 097
Summe		15 487	100 000	115 487

Formeln: $Z_t = K_{t-1} \cdot i$, $T_t = A - Z_t$, $K_t = K_{t-1} - T_t$. Gesamtzinsen: 15 487 €.

Am Anfang viel Zinsen, am Ende viel Tilgung – typisch fuer Annuitaetendarlehen.

Aufgabe 12

$K_0 = 5\,000\text{ €}$, $i = 3\%$. Wie gross ist K_{20} ?

Aufgabe 13

Verdopplungszeit bei $i = 7\%$? (exakt und 72er-Regel)

Aufgabe 14

Sparplan: $200\text{ €}/\text{Monat}$, $i = 5\%$ p. a., 25 Jahre.
Rentenendwert?

Aufgabe 15

Kredit: $250\,000\text{ €}$, $i = 4\%$, $n = 25$ Jahre. Annuität und
Gesamtzinsen?

Loesungen

12: $K_{20} = 5000 \cdot 1,03^{20} = 5000 \cdot 1,8061 \approx \mathbf{9\,031\text{ €}}$.

13: Exakt: $t_2 = \ln 2 / \ln 1,07 = 0,6931 / 0,0677 \approx \mathbf{10,24}$
Jahre.

72er: $72/7 \approx 10,29$ Jahre. ✓

14: $R = 2\,400\text{ €}/\text{Jahr}$.

$EW = 2400 \cdot \frac{1,05^{25} - 1}{0,05} = 2400 \cdot 47,73 \approx \mathbf{114\,550\text{ €}}$.

Eingezahlt: $60\,000$. Zinsertrag: $\approx 54\,550$.

15: $A = 250000 \cdot \frac{0,04 \cdot 1,04^{25}}{1,04^{25} - 1} \approx \mathbf{16\,010\text{ €}/\text{Jahr}}$.

Gesamtzahlung: $25 \cdot 16010 = 400\,250$.

Gesamtzinsen: $400\,250 - 250\,000 = \mathbf{150\,250\text{ €}}$.

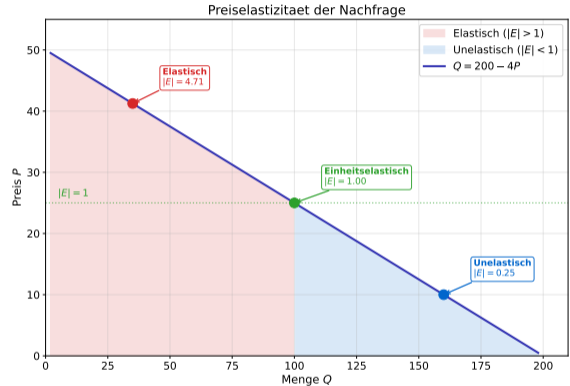
Beachten Sie: Bei Aufgabe 15 zahlt man ueber die Laufzeit mehr als die Haelfte des Kreditbetrags als Zinsen!

Definition

$$E = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

$ E > 1$	elastisch
$ E = 1$	einheitselastisch
$ E < 1$	unelastisch

Erlaos: $R = PQ$, $R'(P) = Q(1 + E) = 0 \Leftrightarrow E = -1$.



Beispiel: $Q = 200 - 4P$, $E = -4P/(200 - 4P)$.
 R_{\max} bei $P = 25$ ($|E| = 1$).

Preispolitik erfordert Kenntnis der Elastizitaet.

Kreuzpreiselastizitaet

$$E_{AB} = \frac{dQ_A}{dP_B} \cdot \frac{P_B}{Q_A}$$

- $E_{AB} > 0$: Substitute (Butter/Margarine)
- $E_{AB} < 0$: Komplemente (Drucker/Tinte)
- $E_{AB} = 0$: unabhangig

Einkommenselastizitaet

$$E_Y = \frac{dQ}{dY} \cdot \frac{Y}{Q}$$

$E_Y > 1$	Luxusgut	Schmuck
$0 < E_Y < 1$	Normalgut	Lebensmittel
$E_Y < 0$	Inferior	Billigmarken

Drei Einflussfaktoren auf die Nachfrage: eigener Preis, Preise anderer Gueter, Einkommen.

Aufgabe 16

Nachfragefunktion $Q(P) = 100 - 2P$.

- (a) Berechnen Sie E bei $P = 20$.
- (b) Ist die Nachfrage dort elastisch oder unelastisch?
- (c) Würde eine Preiserhöhung den Erlös steigern?

Aufgabe 17

Für welchen Preis ist der Erlös bei $Q = 500 - 10P$ maximal?

Loesungen

16:

(a) $Q(20) = 60$, $\frac{dQ}{dP} = -2$.

$E = -2 \cdot 20/60 = -2/3 \approx -0,67$.

(b) $|E| = 0,67 < 1$: **unelastisch**.

(c) Ja! Bei unelastischer Nachfrage steigt der Erlös bei Preiserhöhung.

17: $R(P) = 500P - 10P^2$.

$R'(P) = 500 - 20P = 0 \Rightarrow P^* = 25$.

Kontrolle: $E = -10 \cdot 25/(500 - 250) = -1 \checkmark$.

$R_{\max} = 500 \cdot 25 - 10 \cdot 625 = \mathbf{6\ 250}$.

Merke: Erlösmaximum genau dort, wo $|E| = 1$ – unabhängig von der konkreten Nachfragefunktion.

Exponentielles und logistisches Wachstum

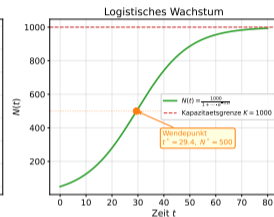
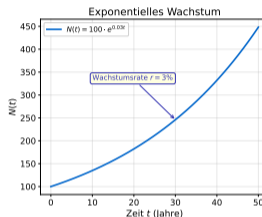
Exponentiell

$N(t) = N_0 e^{rt}$. Verdopplung: $t_2 = \ln 2 / r$.
Konstante relative Rate: $N' / N = r$.

Logistisch (Verhulst)

$$N(t) = \frac{K}{1 + (K/N_0 - 1)e^{-rt}}$$

DGL: $N' = rN(1 - N/K)$
Wendepunkt: $N = K/2$.



	Exp.	Log.
Langfristig	∞	K
Realismus	gering	hoch

Exponentiell fuer kurze Zeitraeume, logistisch fuer langfristige Prognosen.

Keynesianischer Multiplikator

Marginale Konsumquote c ($0 < c < 1$).
Autonome Ausgabenerhöhung ΔG .

Runde 1: Einkommen steigt um ΔG .

Runde 2: Davon wird $c \cdot \Delta G$ ausgegeben \Rightarrow neues Einkommen.

Runde 3: Davon $c^2 \cdot \Delta G$, usw.

Gesamteffekt:

$$\Delta Y = \Delta G + c \Delta G + c^2 \Delta G + \dots = \Delta G \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c^n$$

Multiplikator

$$\Delta Y = \frac{\Delta G}{1 - c} = m \cdot \Delta G$$

mit $m = \frac{1}{1 - c}$ (geometrische Reihe!).

Beispiel: $c = 0,8$, $\Delta G = 100$ Mio. €.

$$m = \frac{1}{1 - 0,8} = 5$$

$\Delta Y = 5 \cdot 100 = 500$ Mio. €.

Runden-Zerlegung:

Runde	Δ Einkommen	Kumuliert
1	100	100
2	80	180
3	64	244
5	41	336
10	13	446
∞	0	500

Fazit: Die geometrische Reihe erklärt, warum eine Staatsausgabe von 100 zu einem Einkommenszuwachs von 500 führt.

Code: Geometrische Folge & Reihe

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Geometrische Folge
n = np.arange(0, 20)
q = 0.8
a_n = q**n # a_n = q^n

# Partialsummen (geometrische Reihe)
S_n = np.cumsum(a_n)
S_inf = 1 / (1 - q) # = 5.0

print(f"S_20 = {S_n[-1]:.4f}")
print(f"S_inf = {S_inf:.4f}")

plt.stem(n, a_n, label='$a_n$')
plt.axhline(y=0, color='gray')
plt.title('Geometrische Folge')
plt.show()
```

Code: Sparplan-Simulation

```
# Zinseszins
K0 = 10_000 # Anfangskapital
i = 0.05 # Zinssatz 5%
n = 30 # Jahre

# Endwert
K_n = K0 * (1 + i)**n
print(f"Endwert: {K_n:,.2f} EUR")

# Sparplan (Annuitaet)
R = 200 * 12 # 200 EUR/Monat
EW = R * ((1+i)**n - 1) / i
print(f"Sparplan: {EW:,.2f} EUR")

# Verdopplungszeit
t2 = np.log(2) / np.log(1+i)
t2_72 = 72 / (i*100)
print(f"Exakt: {t2:.2f} Jahre")
print(f"72er: {t2_72:.2f} Jahre")
```

Python-Simulation: Folgen und Finanzmathematik



Code: Tilgungsplan

```
import pandas as pd
import numpy as np

def tilgungsplan(K0, i, n):
    """Annuitaeten-Tilgungsplan."""
    A = K0 * i*(1+i)**n / ((1+i)**n - 1)
    rows = []
    K = K0
    for t in range(1, n+1):
        Z = K * i          # Zinsen
        T = A - Z          # Tilgung
        rows.append({
            'Jahr': t,
            'Restschuld': K,
            'Zinsen': Z,
            'Tilgung': T,
            'Annuitaet': A
        })
        K = K - T
    return pd.DataFrame(rows), A

df, A = tilgungsplan(100_000, 0.05, 10)
print(f"Annuitaet: {A:,.2f} EUR")
print(df.to_string(index=False))
```

Mit Python wird der Tilgungsplan zur interaktiven Simulation.

Erweiterungen:

- Sondertilgungen
- Variable Zinsen
- Gestapeltes Balkendiagramm

Code: Visualisierung

```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,4))
ax.bar(df['Jahr'], df['Zinsen'],
       label='Zinsen', color='#FF7F0E')
ax.bar(df['Jahr'], df['Tilgung'],
       bottom=df['Zinsen'],
       label='Tilgung', color='#2CA02C')
ax.set_xlabel('Jahr')
ax.set_ylabel('Betrag (EUR)')
ax.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Code: ε -Schlauch

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = np.arange(1, 51)
a_n = 1 / n      # Folge 1/n
L = 0           # Grenzwert
eps = 0.1
N = int(np.ceil(1/eps)) # N = 10

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,4))
ax.stem(n, a_n, markerfmt='bo',
        linefmt='b-', basefmt='gray')
ax.axhline(y=L, color='red',
           linestyle='--', label='$a=0$')
ax.fill_between(n, L-eps, L+eps,
               alpha=0.15, color='red',
               label=f'$\varepsilon$-Schlauch')
ax.axvline(x=N, color='green',
           linestyle=':', label=f'$N={N}$')
ax.legend()
plt.show()
```

Was zeigt der Plot:

- Blaue Punkte: $a_n = 1/n$
- Rotes Band: ε -Schlauch
- Gruene Linie: Ab N alle im Schlauch

ε	N
0,5	3
0,1	11
0,01	101
0,001	1001

Zusammenhang: $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ – je kleiner ε , desto groesser N .

Die Visualisierung macht die ε - N -Definition greifbar – experimentieren Sie mit verschiedenen Folgen!

Code: Monte-Carlo

```
np.random.seed(42)
K0 = 100_000
n_years, n_sims = 20, 1000

# Zinssaetze: mu=5%, sigma=2%
rates = np.random.normal(
    0.05, 0.02, (n_sims, n_years))

K = np.zeros((n_sims, n_years + 1))
K[:, 0] = K0
for t in range(n_years):
    K[:, t+1] = K[:, t] * (1+rates[:, t])

p5 = np.percentile(K, 5, axis=0)
p50 = np.percentile(K, 50, axis=0)
p95 = np.percentile(K, 95, axis=0)

# Fan-Chart
years = np.arange(n_years + 1)
plt.fill_between(years, p5, p95,
    alpha=0.2, label='5-95 Perz.>')
plt.plot(years, p50, 'r-',
    label='Median')
plt.show()
```

Monte-Carlo quantifiziert die Unsicherheit – essentiell fuer realistische Finanzplanung.

Ergebnis (1000 Simulationen, 20 Jahre):

Kennzahl	Endwert
5. Perzentil	≈ 165 000 €
Median	≈ 260 000 €
95. Perzentil	≈ 415 000 €
Deterministisch	265 330 €

Interpretation:

- Median ≈ deterministisch
- Streuung ist **erheblich**
- Asymmetrie: Oberseite groesser (Exponentialeffekt)

Erweiterung: Verschiedene Verteilungen testen (t-Verteilung fuer Fat Tails), Sparplan-Beitraege simulieren.

Code: Multiplikator visualisieren

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

c = 0.8          # Konsumquote
dG = 100         # Mio EUR
n_rounds = 20

# Rundeneffekte
rounds = np.arange(n_rounds)
effect = dG * c**rounds
cumulative = np.cumsum(effect)

# Theoretischer Grenzwert
m = 1 / (1 - c)
total = dG * m # = 500

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2)
ax1.bar(rounds, effect)
ax1.set_title('Rundeneffekt')
ax2.plot(rounds, cumulative, 'o-')
ax2.axhline(y=total, color='r',
            linestyle='--')
ax2.set_title('Kumuliert')
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Die geometrische Reihe macht den Multiplikator mathematisch exakt – Python macht die Konvergenz sichtbar.

Ergebnis:

- Rundeneffekte fallen geometrisch: 100, 80, 64, ...
- Kumulierte Summe naehert sich 500
- Nach 10 Runden: $\approx 89\%$ des Gesamteffekts erreicht
- Geometrische Reihe: $\sum c^n = 1/(1 - c) = 5$

Sensitivitaetsanalyse:

c	Multiplikator m
0,5	2,0
0,7	3,3
0,8	5,0
0,9	10,0
0,95	20,0

m reagiert **sehr sensitiv** auf c – je hoeher c , desto staerker der Multiplikator.

Leonhard Euler (1707–1783)

- Zahl e und Notation
- $e^x = \sum x^k/k!$
- Basler Problem: $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$
- Systematische Reihentheorie

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

- $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$
- Hypergeometrische Reihen
- Methode der kleinsten Quadrate

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

- ε - N -Definition
- Cauchy-Kriterium
- Wurzelkriterium
- Begründer der modernen Analysis

Die Analysis entwickelte sich ueber Jahrhunderte von intuitiven Ideen zu rigorosen Beweisen.

Folgen:

- Arithmetisch: $a_n = a_1 + (n - 1)d$
- Geometrisch: $a_n = a_1 q^{n-1}$
- Euler: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$
- ε -Def.: $\forall \varepsilon > 0 \exists N : n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

Reihen:

- Arithmetische: $S_n = n(a_1 + a_n)/2$
- Geometrische: $S = a_1/(1 - q)$, $|q| < 1$
- Quotiententest: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$
- Leibniz: monotone Nullfolge \Rightarrow alternierend konv.
- Integraltest: $\sum f(n) \leftrightarrow \int f(x) dx$

Potenzreihen:

- $e^x = \sum x^k/k!$, $R = \infty$
- $R = 1/\limsup \sqrt[k]{|c_k|}$

Zinsrechnung:

- $K_n = K_0(1 + i)^n$, Stetig: $K_0 e^{it}$
- Barwert: $K_0 = K_n/(1 + i)^n$
- 72er-Regel: $t_2 \approx 72/i(\%)$

Annuitaeten:

- $A = K_0 \cdot i(1 + i)^n / ((1 + i)^n - 1)$
- $BW = R \cdot ((1 + i)^n - 1) / (i(1 + i)^n)$
- $EW = R \cdot ((1 + i)^n - 1) / i$

Elastizitaet & Wachstum:

- $E = \frac{dQ}{dP} \cdot P/Q$
- Kreuz: $E_{AB} = \frac{dQ_A}{dP_B} \cdot P_B/Q_A$
- Einkommen: $E_Y = \frac{dQ}{dY} \cdot Y/Q$
- Logistisch: $N = K / (1 + (K/N_0 - 1)e^{-rt})$
- Multiplikator: $m = 1/(1 - c)$

Diese Formelsammlung deckt alle Ergebnisse der Vorlesung ab – ideal zur Klausurvorbereitung.

Ausblick:

1. **Differentialrechnung:** Ableitungen als Grenzwerte
2. **Integralrechnung:** Riemannsche Summen als Reihen
3. **DGLs:** Exponentielles/logistisches Wachstum

Verbindungen:

- Folgen → Ableitungen
- Reihen → Integrale
- Potenzreihen → Taylor
- Zinsrechnung → stetige Modelle

Literatur:

1. **Sydsaeter, Hammond, Strom:** Mathematik fuer Wirtschaftswissenschaftler, Kap. 10–11.
2. **Tietze:** Angewandte Wirtschaftsmathematik, Kap. 5–7.
3. **Hass, Weir, Thomas:** University Calculus, Kap. 9.
4. **Forster:** Analysis 1, Kap. 2–4.

Online:

- Khan Academy: Sequences & Series
- MIT OCW: 18.01 Calculus
- Python: numpy, scipy, matplotlib

Folgen → Reihen → Grenzwerte → Differentialrechnung → Integralrechnung – die Analysis baut aufeinander auf.