

Folgen, Reihen und Finanzmathematik

Vertiefungsversion

BSc Analysis

- 1 Einführung
- 2 Folgen
- 3 Konvergenz und Grenzwerte
- 4 Reihen
- 5 Zinsrechnung
- 6 Annuitäten und Tilgung
- 7 Preiselastizität
- 8 Wachstumsmodelle
- 9 Python-Anwendungen
- 10 Historische Anmerkungen
- 11 Zusammenfassung

Am Ende dieser Lektion koennen Sie:

1. **Folgen** definieren, klassifizieren (arithmetisch, geometrisch) und auf Konvergenz untersuchen – die ε -Definition des Grenzwerts anwenden.
2. **Reihen** als Grenzwerte von Partialsummen verstehen und mit dem Quotienten-, Wurzel- und Vergleichskriterium auf Konvergenz pruefen.
3. **Zinseszins, Annuitaeten und Tilgungsplaene** berechnen und den Zusammenhang zwischen geometrischen Reihen und Finanzmathematik erklaren.
4. **Preiselastizitaet und Wachstumsmodelle** (exponentiell, logistisch) formulieren und oekonomisch interpretieren.
5. **Beweise** fuer zentrale Saeetze (Konvergenz von $(1 + 1/n)^n$, Summenformel der geometrischen Reihe, Quotientenkriterium) nachvollziehen.

Die Vertiefungsversion enthaelt zusaetzliche Beweise, Herleitungen und Beispiele ueber die Kernvorlesung hinaus.

Definition

Eine **Folge** reeller Zahlen ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Man schreibt $(a_n)_{n \geq 1}$ oder kurz (a_n) .

Explizite Darstellung:

Eine Formel gibt a_n direkt als Funktion von n an.

- $a_n = \frac{1}{n}$ (harmonische Folge)
- $a_n = (-1)^n$ (alternierend)
- $a_n = 2n - 1$ (ungerade Zahlen)

Rekursive Darstellung:

a_n wird durch vorherige Glieder definiert.

- $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$ (arithmetisch)
- $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2 a_n$ (geometrisch)
- Fibonacci: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Anschauung:

Eine Folge ist eine *geordnete Liste* von Zahlen:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

Wirtschaftliche Beispiele:

- Monatliche Umsatzzahlen eines Unternehmens
- Jaehrliche BIP-Werte eines Landes
- Tageskurse einer Aktie
- Quartalsweise Gewinnentwicklung

Notation:

$(a_n)_{n \geq 1}$ betont den Startindex.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist äquivalent.

Jede Folge ist eine Funktion auf \mathbb{N} – die Folgentheorie ist damit ein Spezialfall der Analysis.

Definition

Eine Folge heisst **arithmetisch**, wenn die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad d = a_{n+1} - a_n = \text{const.}$$

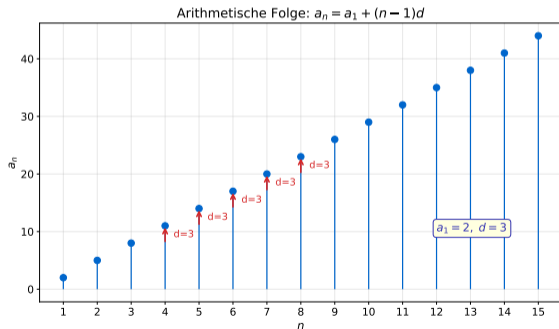
Beispiele:

- 2, 5, 8, 11, 14, ... ($d = 3$)
- 100, 95, 90, 85, ... ($d = -5$)
- $a_1 = 1000$, $d = 50$: Gehaltserhoehung um 50 €/Monat

Wirtschaftliche Anwendung:

Lineare Abschreibung eines Anlageguts:

- Anschaffungswert: $K_0 = 50\,000$ €
- Nutzungsdauer: $n = 10$ Jahre
- Jaehrliche Abschreibung: $d = -5\,000$ €
- Buchwert im Jahr k : $B_k = 50\,000 - 5\,000k$



Arithmetische Folgen modellieren gleichmaessiges (lineares) Wachstum – jeder Schritt addiert denselben Betrag.

Definition

Eine Folge heisst **geometrisch**, wenn der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist:

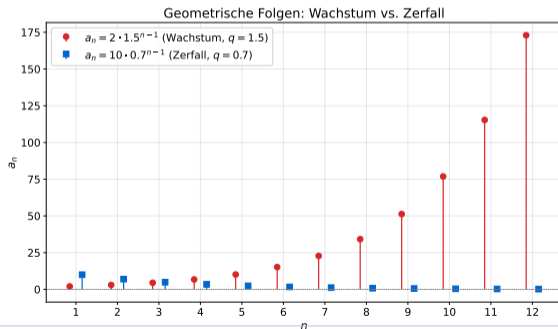
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{const.}$$

Fallunterscheidung:

- $|q| < 1$: Folge konvergiert gegen 0
- $q = 1$: konstante Folge ($a_n = a_1$)
- $|q| > 1$: Folge divergiert (wächst unbeschränkt)
- $q = -1$: alternierend ($a_1, -a_1, a_1, \dots$)

Wirtschaftliche Beispiele:

- Zinseszins: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$ mit $q = 1 + i$
- Inflation: Kaufkraft sinkt mit $q < 1$
- Bevölkerungswachstum: $N_{t+1} = r \cdot N_t$



Geometrische Folgen modellieren prozentuales (exponentielles) Wachstum – jeder Schritt multipliziert mit demselben Faktor.

Monotonie

Eine Folge (a_n) heißt

- **monoton wachsend**, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n ,
- **streng monoton wachsend**, falls $a_{n+1} > a_n$ für alle n ,
- **monoton fallend**, falls $a_{n+1} \leq a_n$ für alle n ,
- **streng monoton fallend**, falls $a_{n+1} < a_n$ für alle n .

Nachweis-Methoden:

1. Differenz: $a_{n+1} - a_n \geq 0$?
2. Quotient: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$? (falls $a_n > 0$)
3. Ableitung: $f'(n) \geq 0$? (falls $a_n = f(n)$)

Beschränktheit

Eine Folge (a_n) heißt

- **nach oben beschränkt**, falls $\exists M \in \mathbb{R}: a_n \leq M$ für alle n ,
- **nach unten beschränkt**, falls $\exists m \in \mathbb{R}: a_n \geq m$ für alle n ,
- **beschränkt**, falls nach oben *und* unten beschränkt.

Satz (Monotoniekriterium)

Jede **monotone und beschränkte** Folge ist konvergent.

Beispiel: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ ist streng monoton wachsend und durch 1 nach oben beschränkt \Rightarrow konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Das Monotoniekriterium garantiert Konvergenz, ohne den Grenzwert explizit zu kennen – ein mächtiges theoretisches Werkzeug.

Eulersche Zahl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828$$

Bedeutung: e ist die Basis des natuerlichen Logarithmus und zentral fuer stetige Verzinsung:

$$K(t) = K_0 \cdot e^{it}$$

n -te Wurzel von n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$$

Beweis-Idee: Setze $a_n = n^{1/n} - 1 \geq 0$. Dann $n = (1 + a_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$ (Bernoulli), also $a_n \leq \sqrt{2/(n-1)} \rightarrow 0$.

Die Eulersche Zahl e verbindet Folgen, Reihen und Finanzmathematik – sie taucht in dieser Vorlesung immer wieder auf.

Nullfolgen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \text{fuer } |q| < 1$$

Weitere wichtige Grenzwerte:

Folge	Grenzwert
$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$	e^x
$\frac{n!}{n^n}$	0
$\sqrt[n]{a} \quad (a > 0)$	1
$\frac{a^n}{n!} \quad (a \in \mathbb{R})$	0

Hierarchie: $n! \gg a^n \gg n^k \gg \ln n$ fuer $n \rightarrow \infty$.

Beweis: $(1 + 1/n)^n$ konvergiert

Satz

Die Folge $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ist streng monoton wachsend und nach oben beschränkt. Somit konvergiert sie.

1. Monotonie: Wir zeigen $a_{n+1} > a_n$.

Nach der Ungleichung von arithmetischem und geometrischem Mittel (AM-GM):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Man schreibt $(1 + \frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n$ und zeigt mit AM-GM, dass:

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

indem man $n+1$ Faktoren $\frac{n+2}{n+1}$ mit einem Faktor 1 geometrisch mittelt.

2. Beschränktheit: Wir zeigen $a_n < 3$.

Binomischer Lehrsatz:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &\leq 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

da $k! \geq 2^{k-1}$ fuer $k \geq 1$.

Fazit: (a_n) ist monoton wachsend und beschränkt \Rightarrow konvergent nach dem Monotoniekriterium.

Der Grenzwert heisst $e \approx 2,71828$.

Euler berechnete 1748 die ersten 23 Nachkommastellen von e – heute kennt man ueber 30 Billionen Stellen.

Konvergenz: Die ε -Definition

Definition (Grenzwert einer Folge)

Eine Folge (a_n) **konvergiert** gegen $a \in \mathbb{R}$, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

Man schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$ fuer $n \rightarrow \infty$.

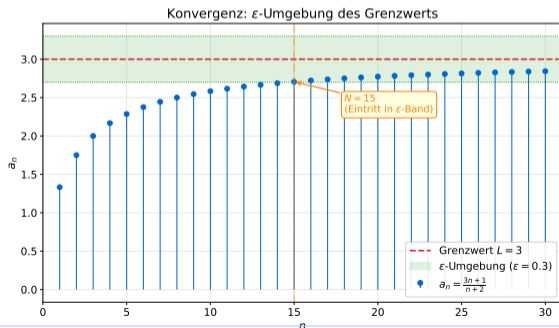
Anschaung:

- Wir geben eine beliebig kleine "Toleranz" $\varepsilon > 0$ vor.
- Ab einem Index N liegen *alle* Folgenglieder im ε -Schlauch $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
- Nur *endlich viele* Glieder duerfen ausserhalb liegen.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Fuer $\varepsilon = 0,01$ waehle $N = 101$:

$$n \geq 101 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{101} < 0,01 = \varepsilon \checkmark$$



Die ε -Definition praezisiert, was "beliebig nahe kommen" bedeutet – sie ist das Fundament der Analysis

Satz

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist **eindeutig**.

Beweis (Widerspruch):

Angenommen, $a_n \rightarrow a$ und $a_n \rightarrow b$ mit $a \neq b$.

Setze $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$.

Da $a_n \rightarrow a$: $\exists N_1$: $|a_n - a| < \varepsilon$ fuer $n \geq N_1$.

Da $a_n \rightarrow b$: $\exists N_2$: $|a_n - b| < \varepsilon$ fuer $n \geq N_2$.

Fuer $n \geq \max(N_1, N_2)$:

$$\begin{aligned} |a - b| &\leq |a - a_n| + |a_n - b| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b| \end{aligned}$$

Widerspruch! Also $a = b$. □

Konsequenzen:

- Wir duerfen von "dem" Grenzwert sprechen.
- Die Schreibweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ist wohldefiniert.

Satz: Konvergenz \Rightarrow Beschraenktheit

Jede konvergente Folge ist beschraenkt.

Beweis-Idee: Fuer $\varepsilon = 1$ gibt es N mit $|a_n - a| < 1$ fuer $n \geq N$. Also $|a_n| < |a| + 1$ fuer $n \geq N$, und $M = \max(|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1)$ ist obere Schranke fuer $|a_n|$.

Achtung: Die Umkehrung gilt *nicht*!

$a_n = (-1)^n$ ist beschraenkt, aber nicht konvergent.

Der Eindeutigkeitsbeweis nutzt die Dreiecksungleichung – eines der wichtigsten Werkzeuge der Analysis.

Rechenregeln fuer konvergente Folgen

Seien (a_n) und (b_n) konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gilt:

Summenregel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

Produktregel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Quotientenregel: (falls $b \neq 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Skalierung: Fuer $c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$$

Weitere Regeln:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ (falls $a_n \geq 0$)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = a^k$ fuer $k \in \mathbb{N}$

Beispiel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2}:$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \\ &= \frac{3+0}{1+0} = 3 \end{aligned}$$

Trick: Zaehler und Nenner durch die hoechste n -Potenz teilen

Satz (Einschnuerungssatz)

Seien (a_n) , (b_n) , (c_n) Folgen mit

$$b_n \leq a_n \leq c_n \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$. Dann konvergiert auch (a_n) und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Anschauung:

- Die Folge (a_n) wird von oben und unten "eingeschnuert".
- Da beide Schranken gegen L konvergieren, bleibt (a_n) keine Wahl.

Beispiel 1: $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

- Es gilt: $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$
- $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

Beispiel 2: $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

- $\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \dots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}$
- Da $\frac{n!}{n^n} \geq 0$ und $\frac{1}{n} \rightarrow 0$:
- $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Typische Anwendung:

- Betrag abschätzen: $|a_n| \leq c_n \rightarrow 0$
- Dann $a_n \rightarrow 0$ (da $-c_n \leq a_n \leq c_n$)

Merke: Der Einschnuerungssatz ist besonders nützlich, wenn der Grenzwert nicht direkt berechenbar ist.

Der Sandwich-Satz wird auch als "Quetschlemma" oder "Squeeze Theorem" bezeichnet – ein Standardwerkzeug der Analysis.

Beispiel 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2}$$

Durch n teilen:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{3+0}{1+0} = \mathbf{3}$$

Beispiel 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n^2-3}$$

Durch n^2 teilen:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n^2}} = \frac{1+0}{2-0} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Übung: Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$. Antworten: 0 und e^3 .

Beispiel 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Konjugierte Erweiterung:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow \mathbf{0} \end{aligned}$$

Merke: Standard-Techniken:

1. Durch höchste n -Potenz teilen
2. Konjugiert erweitern (bei Wurzeln)
3. L'Hôpital (bei $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$)
4. Sandwich-Satz (bei Abschätzungen)

Beispiel 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - n + 5}{4n^3 + 3n^2}$$

Durch n^3 teilen:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{4 + \frac{3}{n}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Beispiel 5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$$

Substitution $m = n/3$:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n/3}\right)^{n/3} \right]^3 = e^3 \approx 20,09$$

Bei rekursiven Folgen: (1) Grenzwert-Kandidat berechnen, (2) Konvergenz ueber Monotonie + Beschaenktheit beweisen.

Beispiel 6: Rekursive Folge

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{6}{a_n} \right).$$

Schritt 1: Falls der Grenzwert L existiert:

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{6}{L} \right) \Rightarrow L^2 = 6 \Rightarrow L = \sqrt{6}$$

Schritt 2: Monotonie und Beschaenktheit zeigen (mit AM-GM: $a_{n+1} \geq \sqrt{6}$ und $a_{n+1} \leq a_n$ fuer $a_n > \sqrt{6}$).

Fazit: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{6} \approx 2,449$.

Bemerkung: Dies ist das **Heron-Verfahren** (Babylonisches Wurzelziehen) zur Berechnung von \sqrt{c} .

Definition

Sei $(a_k)_{k \geq 1}$ eine Folge. Die n -te **Partialsumme** ist

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Die **Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist der Grenzwert $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, falls dieser existiert.

Konvergenz:

- Die Reihe **konvergiert**, falls (S_n) konvergiert.
- Die Reihe **divergiert**, falls (S_n) divergiert.

Notwendiges Kriterium

Konvergiert $\sum a_k$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Achtung: Die Umkehrung gilt *nicht*!

Gegenbeispiel: $\sum \frac{1}{k}$ divergiert (harmonische Reihe),
obwohl $\frac{1}{k} \rightarrow 0$.

Beispiel: Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$$

Die Partialsummen wachsen unbeschränkt!

Beispiel: Teleskopsumme

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Arithmetische Reihe

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

Gauss-Formel: Fuer $a_k = k$:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beispiel: $1 + 2 + \dots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.

Merkregel: Summe = Anzahl \times Durchschnitt von erstem und letztem Glied.

Geometrische Reihe

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_1 q^k = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Unendliche geometrische Reihe

Fuer $|q| < 1$:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_1 q^k = \frac{a_1}{1 - q}$$

Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Finanz: Barwert einer ewigen Rente: $BW = \frac{R}{i}$
(geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{1+i}$).



Satz

Fuer $q \neq 1$ gilt: $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}$. Fuer $|q| < 1$ folgt: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$.

Beweis (endliche Summe):

Setze $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$.

Multipliziere mit q :

$$q \cdot S_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$$

Subtraktion:

$$S_n - q \cdot S_n = 1 - q^n$$

$$S_n \cdot (1 - q) = 1 - q^n$$

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{fuer } q \neq 1$$

Grenzübergang ($|q| < 1$):

Fuer $|q| < 1$ gilt $q^n \rightarrow 0$, also:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

Warum divergiert die Reihe fuer $|q| \geq 1$?

- $q = 1$: $S_n = n \rightarrow \infty$
- $q > 1$: $q^n \rightarrow \infty$, also $S_n \rightarrow \infty$
- $q = -1$: S_n alterniert $(1, 0, 1, 0, \dots)$
- $q < -1$: $|q^n| \rightarrow \infty$, S_n oszilliert unbeschaenkt



Merke: Die Bedingung $|q| < 1$ ist *notwendig und*

hinreichend fuer die Konvergenz der geometrischen Reihe.

Konvergenztests fuer Reihen

Quotientenkriterium

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

- $L < 1$: konvergent
- $L > 1$: divergent
- $L = 1$: keine Aussage

Gut fuer: Reihen mit $n!$ oder a^n .

Beispiel: $\sum \frac{2^n}{n!}$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \checkmark$$

Wurzelkriterium

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

- $L < 1$: konvergent
- $L > 1$: divergent
- $L = 1$: keine Aussage

Gut fuer: Reihen mit $a_n = f(n)^n$.

Beispiel: $\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \checkmark$$

Vergleichskriterium

Falls $0 \leq a_n \leq b_n$:

- $\sum b_n$ konv. $\Rightarrow \sum a_n$ konv.
- $\sum a_n$ div. $\Rightarrow \sum b_n$ div.

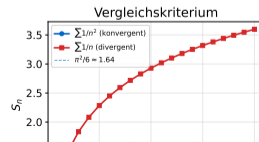
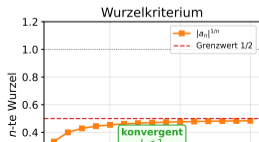
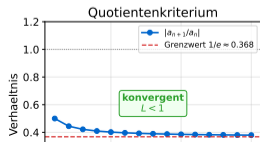
Vergleichsreihen:

- $\sum \frac{1}{n^p}$: konv. fuer $p > 1$
- $\sum q^n$: konv. fuer $|q| < 1$

Beispiel: $\sum \frac{1}{n^2+n}$

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2} \text{ und } \sum \frac{1}{n^2} \text{ konv. } \checkmark$$

Konvergenztests im Vergleich



Quotientenkriterium

Sei $\sum a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ fuer alle n . Falls $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existiert, dann:
 $L < 1 \Rightarrow$ absolute Konvergenz, $L > 1 \Rightarrow$ Divergenz.

Beweis ($L < 1$):

Waehle q mit $L < q < 1$.

Da $|a_{n+1}/a_n| \rightarrow L < q$, existiert N mit

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \quad \text{fuer alle } n \geq N.$$

Iteration:

$$|a_{N+k}| \leq |a_N| \cdot q^k \quad \text{fuer } k \geq 0.$$

Also:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{N+k}| \leq |a_N| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{|a_N|}{1-q} < \infty$$

Die Reihe konvergiert absolut (Vergleich mit

Beweis ($L > 1$):

Waehle q mit $1 < q < L$.

Es existiert N mit $|a_{n+1}/a_n| \geq q > 1$ fuer $n \geq N$.

Iteration:

$$|a_{N+k}| \geq |a_N| \cdot q^k \rightarrow \infty$$

Also $a_n \not\rightarrow 0$, und die Reihe divergiert nach dem notwendigen Kriterium. □

Fall $L = 1$: Keine Aussage moeglich.

- $\sum \frac{1}{n}$: $L = 1$, divergent
- $\sum \frac{1}{n^2}$: $L = 1$, konvergent

Merke: Der Beweis nutzt im Kern den Vergleich mit der geometrischen Reihe – ein typisches “Majoranten” Argument.

Definition (Potenzreihe)

Eine **Potenzreihe** um den Entwicklungspunkt x_0 ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \quad \text{oder} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

- $|x - x_0| < R$: absolute Konvergenz
- $|x - x_0| > R$: Divergenz
- $|x - x_0| = R$: Einzelfallprüfung

Wichtige Taylor-Reihen ($x_0 = 0$):

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad R = \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \quad R = 1$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad R = \infty$$

Einfacher Zins vs. Zinseszins

Einfacher Zins (linear)

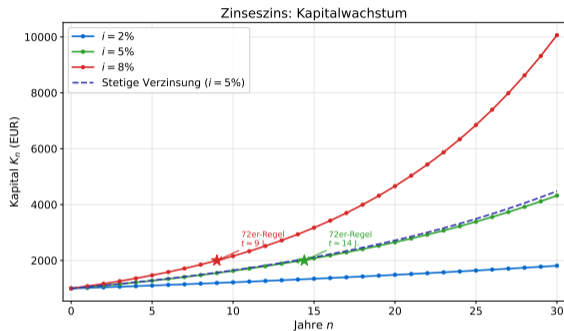
$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

- Zinsen nur auf das *Anfangskapital* K_0
- Lineares Wachstum (arithmetische Folge)
- Jährliche Zinsen: $Z = K_0 \cdot i$

Zinseszins (exponentiell)

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

- Zinsen auf Kapital *inklusive aufgelaufener Zinsen*
- Exponentielles Wachstum (geometrische Folge)
- Aufzinsungsfaktor: $q = 1 + i$



Zahlenbeispiel ($K_0 = 1000 \text{ €}$, $i = 5\%$)

Jahr	Einfach	Zinseszins
0	1 000	1 000
10	1 500	1 629
20	2 000	2 653

Von diskreter zu stetiger Verzinsung

Bei m -maliger Verzinsung pro Jahr:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Fuer $m \rightarrow \infty$ (stetige Verzinsung):

$$K(t) = K_0 \cdot e^{i \cdot t}$$

Herleitung:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m \right]^n = (e^i)^n = e^{in}$$

Hier nutzen wir $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Aequivalenter Jahreszins:

Stetiger Zinssatz $i_s \leftrightarrow$ diskreter Zinssatz i_d :

$$e^{i_s} = 1 + i_d$$

$$i_s = \ln(1 + i_d)$$

$$i_d = e^{i_s} - 1$$

Vergleich der Verzinsungshaeufigkeiten:

($K_0 = 1000$ €, $i = 10\%$, $n = 1$ Jahr)

Haeufigkeit	Endwert
Jaehrlich ($m = 1$)	1 100,00
Halbjaehrlich ($m = 2$)	1 102,50
Quartalsweise ($m = 4$)	1 103,81
Monatlich ($m = 12$)	1 104,71
Taeglich ($m = 365$)	1 105,16
Stetig ($m \rightarrow \infty$)	1 105,17

Beobachtung: Der Unterschied zwischen taeglich und stetig ist minimal.

Exakte Verdopplungszeit

Gesucht: t_2 mit $K_0 \cdot (1 + i)^{t_2} = 2 K_0$.

$$(1 + i)^{t_2} = 2 \iff t_2 = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i)}$$

Bei stetiger Verzinsung:

$$t_2 = \frac{\ln 2}{i} \approx \frac{0,6931}{i}$$

72er-Regel (Faustregel)

$$t_2 \approx \frac{72}{i(\%)}$$

Merke: Die 72er-Regel ist eine schnelle Abschaetzung, die fuer Zinssaetze zwischen 2% und 15% sehr genau ist.

Die 72er-Regel ist ein beliebtes Werkzeug in der Finanzberatung – sie laesst sich im Kopf rechnen.

Vergleich: exakt vs. 72er-Regel

i (%)	Exakt (Jahre)	72er-Regel
2	35,00	36,00
4	17,67	18,00
6	11,90	12,00
8	9,01	9,00
10	7,27	7,20
12	6,12	6,00
15	4,96	4,80

Warum 72?

Taylor-Entwicklung: $\ln(1 + i) \approx i - \frac{i^2}{2}$, also $t_2 \approx \frac{0,6931}{i - i^2/2}$.

Fuer $i \approx 8\%$ passt der Faktor 72 optimal.

Grundprinzip der Finanzmathematik

Ein Euro heute ist mehr wert als ein Euro morgen – weil er in der Zwischenzeit Zinsen erwirtschaften kann.

Aufzinsung (Endwert):

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

“Was ist ein heutiger Betrag K_0 in n Jahren wert?”

Abzinsung (Barwert):

$$K_0 = K_n \cdot (1 + i)^{-n} = \frac{K_n}{(1 + i)^n}$$

“Was ist ein kuenftiger Betrag K_n heute wert?”

Abzinsungsfaktor:

$$v = (1 + i)^{-1} = \frac{1}{1 + i}$$

$$K_0 = K_n \cdot v^n$$

Beispiel: Investitionsentscheidung

Sie erhalten in 5 Jahren 10 000 €. Der Marktzins betraegt $i = 6\%$.

Barwert:

$$K_0 = \frac{10\,000}{(1,06)^5} = \frac{10\,000}{1,3382} \approx 7\,473 \text{ €}$$

Interpretation: Die zukuenftige Zahlung ist *heute* nur 7 473 € wert.

Kapitalwert einer Investition (NPV):

$$\text{NPV} = -I_0 + \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1 + i)^t}$$

Problem

Ein Kredit über K_0 wird mit jährlichen, gleich hohen Raten A (**Annuitäten**) in n Jahren getilgt. Zinssatz: i .
Gesucht: Wie hoch ist die jährliche Rate A ?

Herleitung ueber geometrische Reihe:

Barwert aller Annuitäten = Kreditbetrag:

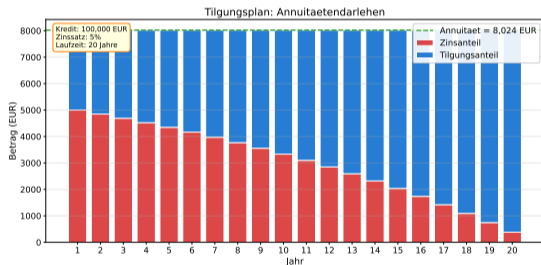
$$K_0 = \sum_{t=1}^n \frac{A}{(1+i)^t} = A \cdot \underbrace{\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}}_{\text{Rentenbarwertfaktor}}$$

Auflösen nach A :

Annuitätenformel

$$A = K_0 \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Der Bruch heisst **Annuitätenfaktor** oder **Kapitalwiedergewinnungsfaktor**.



Beispiel

$K_0 = 100\,000\text{ €}$, $i = 5\%$, $n = 10$ Jahre.

$$0.05 \cdot 1.05^{10}$$

Herleitung der Annuitätenformel im Detail

Ausgangspunkt:

Der Barwert aller n Zahlungen A muss gleich dem Kreditbetrag K_0 sein:

$$K_0 = \frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + \dots + \frac{A}{(1+i)^n}$$

Ausklammern von A :

$$K_0 = A \cdot \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} = A \cdot \sum_{t=1}^n v^t$$

mit Abzinsungsfaktor $v = \frac{1}{1+i}$.

Geometrische Reihe mit $q = v$:

$$\sum_{t=1}^n v^t = v \cdot \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-\frac{1}{1+i}}$$

Vereinfachung:

$$1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i}$$

Also:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n v^t &= \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i/(1+i)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} \end{aligned}$$

Dies ist der **Rentenbarwertfaktor**.

Auflösung nach A :

$$A = \frac{K_0}{\sum_{t=1}^n v^t} = K_0 \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Merke

Die Annuitätenformel ist *exakt* die Umkehrung des

Rentenbarwert (vorschuessig/nachschuessig)

Jaehrliche Zahlung R ueber n Jahre bei Zinssatz i :

Nachschuessig (Zahlung am Periodenende):

$$BW_{\text{nach}} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$$

Vorschuessig (Zahlung am Periodenstart):

$$BW_{\text{vor}} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^{n-1}}$$

Zusammenhang:

$$BW_{\text{vor}} = BW_{\text{nach}} \cdot (1+i)$$

Rentenendwert

Nachschuessig:

$$EW_{\text{nach}} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Vorschuessig:

$$EW_{\text{vor}} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

Beispiel: Altersvorsorge

Sie sparen $R = 200 \text{ €}/\text{Monat} = 2400 \text{ €}/\text{Jahr}$ ueber 30 Jahre bei $i = 4\%$:

$$EW = 2400 \cdot \frac{1,04^{30} - 1}{0,04} \approx \mathbf{134\ 622 \text{ €}}$$

Eingezahlt: 72 000 €. Zinsertrag: $\approx 62\ 622 \text{ €}$.

Der Rentenbarwert beantwortet: "Was ist ein Zahlungsstrom heute wert?" Der Rentenendwert: "Was hat sich am Ende angesammelt?"

Annuitätendarlehen: $K_0 = 100\,000\text{ €}$, Zinssatz $i = 5\%$, Laufzeit $n = 5$ Jahre.

Annuität: $A = 100\,000 \cdot \frac{0,05 \cdot 1,05^5}{1,05^5 - 1} = 100\,000 \cdot 0,23097 \approx 23\,097\text{ €/Jahr}$.

Jahr	Restschuld (Anfang)	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	100 000	5 000	18 097	23 097
2	81 903	4 095	19 002	23 097
3	62 901	3 145	19 952	23 097
4	42 949	2 147	20 950	23 097
5	21 999	1 100	21 997	23 097
Summe		15 487	100 000	115 487

Beobachtungen:

- Die **Annuität bleibt konstant** (23 097 €)
- Der **Zinsanteil sinkt** (weniger Restschuld)
- Der **Tilgungsanteil steigt** (Differenz zur Annuität)

Formeln fuer Zeile t :

- Zinsen: $Z_t = K_{t-1} \cdot i$
- Tilgung: $T_t = A - Z_t$
- Restschuld: $K_t = K_{t-1} - T_t$

Gesamtkosten: $n \cdot A - K_0 = 15\,487\text{ € Zinsen}$.

Der Tilgungsplan zeigt die "Anatomie" eines Kredits: Am Anfang zahlt man viel Zinsen, am Ende viel Tilgung.

Szenario 1: Sondertilgung

Kredit: $K_0 = 200\,000\text{ €}$, $i = 4\%$, $n = 20$ Jahre.
Nach 5 Jahren Sondertilgung von $20\,000\text{ €}$.

Annuitaet:

$$A = 200\,000 \cdot \frac{0,04 \cdot 1,04^{20}}{1,04^{20} - 1} \approx 14\,716\text{ €/Jahr}$$

Nach Sondertilgung:

Restschuld sinkt sprunghaft, zwei Optionen:

1. Laufzeit verkuerzen (Rate bleibt)
2. Rate senken (Laufzeit bleibt)

Zinersparnis: Die Sondertilgung spart ueber die restlichen 15 Jahre ca. $12\,000\text{ €}$ Zinsen – je frueher, desto besser!

Reale Kreditvertraege sind komplexer als das Grundmodell – Sondertilgungen und variable Zinsen aendern die Kalkulation erheblich.

Szenario 2: Variabler Zinssatz

Anfaenglich $i_1 = 3\%$ fuer 5 Jahre,
danach $i_2 = 5\%$ fuer 15 Jahre.

Zweistufige Berechnung:

1. Phase 1: A_1 mit i_1 und $n = 20$ berechnen
2. Restschuld nach 5 Jahren bestimmen: K_5
3. Phase 2: Neue Annuitaet A_2 mit i_2 und Restlaufzeit 15 auf Basis K_5 berechnen

Zinsaenderungsrisiko

Die monatliche Belastung kann bei Zinsanstieg **erheblich steigen**. Beispiel: $A_1 \approx 11\,000\text{ €} \rightarrow A_2 \approx 14\,500\text{ €}$ (Anstieg um 32%).

Definition

Die **Preiselastizitaet der Nachfrage** misst die prozentuale Aenderung der nachgefragten Menge Q bei einer prozentualen Aenderung des Preises P :

$$E = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}$$

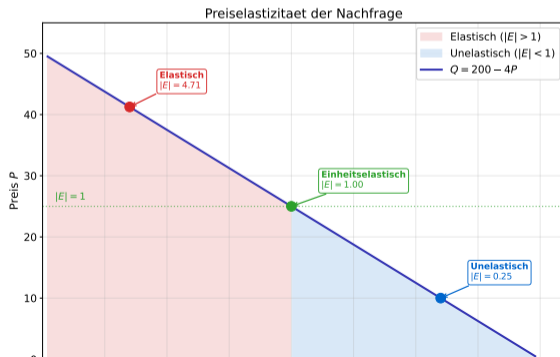
Punktlastizitaet (bei differenzierbarer Nachfragefunktion $Q(P)$):

$$E = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

Bogenlastizitaet (zwischen zwei Punkten):

$$E_{\text{Bogen}} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} \cdot \frac{\frac{P_1 + P_2}{2}}{\frac{Q_1 + Q_2}{2}}$$

Vorzeichen: Normalerweise ist $E < 0$ (Gesetz der Nachfrage). Oft wird $|E|$ angegeben.



Klassifikation

$ E > 1$	elastisch
$ E = 1$	einheitselastisch
$ E < 1$	inelastisch
$ E = 0$	vollkommen unelastisch
$ E = \infty$	vollkommen elastisch

Auswirkung auf den Erlös $R = P \cdot Q$:

- $|E| > 1$: Preiserhöhung \Rightarrow Erlös **sinkt**
- $|E| = 1$: Preiserhöhung \Rightarrow Erlös **bleibt gleich**
- $|E| < 1$: Preiserhöhung \Rightarrow Erlös **steigt**

Wirtschaftliche Intuition:

- **Elastisch:** Luxusgüter, Güter mit Substituten
 \rightarrow Konsumenten reagieren stark auf Preis
- **Unelastisch:** Grundnahrungsmittel, Medikamente, Benzin
 \rightarrow Konsumenten kaufen trotz Preiserhöhung

Erlös-Maximierung:

Der Erlös $R(P) = P \cdot Q(P)$ ist maximal, wenn $|E| = 1$ gilt.

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dP} &= Q + P \cdot \frac{dQ}{dP} \\ &= Q \left(1 + \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} \right) = Q(1 + E) \\ &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad E = -1\end{aligned}$$

Preispolitik erfordert Kenntnis der Elastizität: Bei elastischer Nachfrage senkt man den Preis, bei unelastischer erhöht man ihn.

Beispiel: Elastizitaet berechnen und interpretieren

Nachfragefunktion: $Q(P) = 200 - 4P$, Definitionsbereich: $P \in [0, 50]$.

Elastizitaet:

$$\frac{dQ}{dP} = -4, \quad E = -4 \cdot \frac{P}{200 - 4P} = \frac{-4P}{200 - 4P}$$

Auswertung an verschiedenen Preispunkten:

P	Q	E	Typ
10	160	-0,25	unelastisch
20	120	-0,67	unelastisch
25	100	-1,00	einheitselastisch
30	80	-1,50	elastisch
40	40	-4,00	elastisch

Erloes:

$$\begin{aligned} R(P) &= P \cdot Q(P) = 200P - 4P^2 \\ R'(P) &= 200 - 8P = 0 \quad \Rightarrow \quad P^* = 25 \\ R_{\max} &= R(25) = 200 \cdot 25 - 4 \cdot 625 = \mathbf{2\,500} \end{aligned}$$

Interpretation:

- Bei $P = 25$ ist $|E| = 1$ – maximaler Erloes!
- Fuer $P < 25$: unelastisch \Rightarrow Preiserhoehung lohnt sich
- Fuer $P > 25$: elastisch \Rightarrow Preissenkung lohnt sich

Gewinnmaximierung: Benoetigt zusaetzlich die Kostenfunktion $C(Q)$ – anderes Optimum als Erloesmaximierung!

Die Elastizitaet variiert entlang der linearen Nachfragekurve – sie ist nicht konstant, obwohl die Steigung konstant ist.

Kreuzpreiselastizitaet

Wie reagiert die Nachfrage nach Gut A auf den Preis von Gut B?

$$E_{AB} = \frac{dQ_A}{dP_B} \cdot \frac{P_B}{Q_A}$$

Interpretation:

- $E_{AB} > 0$: **Substitute** (Butter ↔ Margarine)
Preis von B steigt ⇒ Nachfrage nach A steigt
- $E_{AB} < 0$: **Komplemente** (Drucker ↔ Tinte)
Preis von B steigt ⇒ Nachfrage nach A sinkt
- $E_{AB} = 0$: **Unabhaengige** Gueter

Einkommenselastizitaet

Wie reagiert die Nachfrage auf Einkommensaenderungen?

$$E_Y = \frac{dQ}{dY} \cdot \frac{Y}{Q}$$

Klassifikation:

Wert	Typ	Beispiel
$E_Y > 1$	Luxusgut	Schmuck
$0 < E_Y < 1$	Normalgut	Lebensmittel
$E_Y < 0$	Inferiores Gut	Billigmarken

Engel-Kurve: Grafische Darstellung der Nachfrage als Funktion des Einkommens – steigende Kurve fuer normale Gueter, fallend fuer inferiore.

Die verschiedenen Elastizitaeten quantifizieren die drei zentralen Einflussfaktoren auf die Nachfrage: eigener Preis, Preise anderer Gueter, Einkommen.

Modell

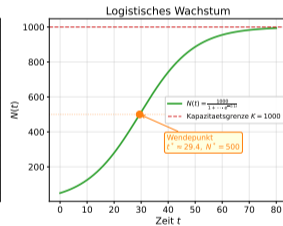
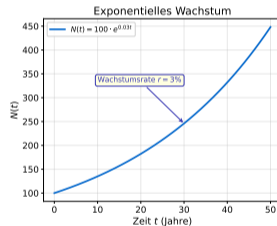
Stetig: $N(t) = N_0 \cdot e^{rt}$, **Diskret:** $N_t = N_0 \cdot (1 + g)^t$

Eigenschaften:

- Konstante **relative** Wachstumsrate: $\frac{N'(t)}{N(t)} = r$
- Äquivalenz: $g = e^r - 1$ bzw. $r = \ln(1 + g)$
- Geometrische Folge in diskreter Zeit
- Verdopplungszeit: $t_2 = \frac{\ln 2}{r}$

Beispiele:

- Bevölkerungswachstum (kurzfristig)
- BIP-Wachstum: $Y_t = Y_0 \cdot (1 + g)^t$
- Radioaktiver Zerfall: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$
- Bakterienwachstum (unbegrenzte Ressourcen)



Exponentielles Wachstum ist auf Dauer unrealistisch – in der Praxis setzen Ressourcenbeschränkungen Grenzen (logistisches Modell).

Modell (Verhulst-Gleichung)

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) \cdot e^{-rt}}$$

mit **Kapazitaetsgrenze** (Saettigungsgrenze) K , Anfangswert N_0 und Wachstumsrate r .

Differentialgleichung:

$$N'(t) = r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

- Fuer $N \ll K$: \approx exponentielles Wachstum
- Fuer $N \approx K$: Wachstum verlangsamt sich
- $\lim_{n \rightarrow \infty} N(t) = K$ (Saettigung)

Wendepunkt:

$$t_W = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{K}{N_0} - 1\right), \quad N(t_W) = \frac{K}{2}$$

Am Wendepunkt ist das **absolute Wachstum maximal**.

S-Kurve – drei Phasen:

1. **Anlaufphase:** langsames Wachstum ($N \ll K$)
2. **Wachstumsphase:** schnelles, fast exponentielles Wachstum
3. **Saettigungsphase:** Verlangsamung, Annaeherung an K

Wirtschaftliche Beispiele:

- Marktdurchdringung neuer Technologien
- Produktlebenszyklus (Absatzentwicklung)
- Nutzerwachstum von Plattformen
- Ausbreitung von Innovationen (Diffusion)

Vergleich:

BIP-Wachstum:

- Jaehrliche Wachstumsrate g :

$$Y_t = Y_0 \cdot (1 + g)^t$$

- Deutschland (real): $g \approx 1,5\%$
- Verdopplungszeit: $t_2 \approx \frac{72}{1,5} = 48$ Jahre
- "Regel of 70": $t_2 \approx 70/g(\%)$

Marktdurchdringung (Bass-Modell):

- Innovatoren: kaufen unabhaengig (p)
- Imitatoren: kaufen durch Mundpropaganda (q)

$$\frac{dF}{dt} = (p + qF(t))(1 - F(t))$$

- S-foermige Adoptionskurve

Vergleich der Modelle:

	Exponentiell	Logistisch
Langfristig	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow K$
Kurzfristig	sehr gut	gut
Ressourcen	ignoriert	beruecksichtigt
Form	konvex	S-Kurve
Realismus	gering	hoch

Beispiel: Smartphone-Markt

- 2007–2012: exponentielles Wachstum
- 2012–2018: Wachstumsphase (S-Kurve)
- Ab 2018: Saettigung ($K \approx 85\%$ der Bevoelkerung)

Fazit: Exponentielles Modell fuer kurze Zeitraeume, logistisches fuer langfristige Prognosen.

Die Wahl des Wachstumsmodells beeinflusst Prognosen massgeblich – exponentiell ueberschaetzt, logistisch ist realistischer.

Folgen und Reihen mit NumPy:

Code: Geometrische Folge & Reihe

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Geometrische Folge
n = np.arange(0, 20)
q = 0.8
a_n = q**n # a_n = q^n

# Partialsummen (geometrische Reihe)
S_n = np.cumsum(a_n)
S_inf = 1 / (1 - q) # = 5.0

print(f"S_20 = {S_n[-1]:.4f}")
print(f"S_inf = {S_inf:.4f}")

plt.stem(n, a_n, label='$a_n$')
plt.axhline(y=0, color='gray')
plt.title('Geometrische Folge')
plt.show()
```

Zinseszinsrechnung:

Code: Sparplan-Simulation

```
# Zinseszins
K0 = 10_000 # Anfangskapital
i = 0.05 # Zinssatz 5%
n = 30 # Jahre

# Endwert
K_n = K0 * (1 + i)**n
print(f"Endwert: {K_n:,.2f} EUR")

# Sparplan (Annuitaet)
R = 200 * 12 # 200 EUR/Monat
EW = R * ((1+i)**n - 1) / i
print(f"Sparplan: {EW:,.2f} EUR")

# Verdopplungszeit
t2 = np.log(2) / np.log(1+i)
t2_72 = 72 / (i*100)
print(f"Exakt: {t2:.2f} Jahre")
print(f"72er: {t2_72:.2f} Jahre")
```

Python-Simulation: Folgen und Finanzmathematik



Code: Tilgungsplan berechnen

```
import pandas as pd
import numpy as np

def tilgungsplan(K0, i, n):
    """Annuitaeten-Tilgungsplan."""
    A = K0 * i*(1+i)**n / ((1+i)**n - 1)
    rows = []
    K = K0
    for t in range(1, n+1):
        Z = K * i          # Zinsen
        T = A - Z         # Tilgung
        rows.append({
            'Jahr': t,
            'Restschuld': K,
            'Zinsen': Z,
            'Tilgung': T,
            'Annuitaet': A
        })
        K = K - T
    df = pd.DataFrame(rows)
    return df, A

df, A = tilgungsplan(100_000, 0.05, 10)
print(f"Annuitaet: {A:,.2f} EUR")
print(df.to_string(index=False))
```

Erweiterungen:

- **Sondertilgungen:** Parameter `sonder={5: 20000}` fuer Sonderzahlung in Jahr 5
- **Variable Zinsen:** Liste `rates=[0.03]*5 + [0.05]*15`
- **Visualisierung:** Gestapeltes Balkendiagramm (Zins vs. Tilgung)

Code: Visualisierung

```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,4))
ax.bar(df['Jahr'], df['Zinsen'],
       label='Zinsen', color='#FF7F0E')
ax.bar(df['Jahr'], df['Tilgung'],
       bottom=df['Zinsen'],
       label='Tilgung', color='#2CA02C')
ax.set_xlabel('Jahr')
ax.set_ylabel('Betrag (EUR)')
ax.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Mit Python wird der Tilgungsplan zur interaktiven Simulation – Parameter aendern und sofort die Auswirkung sehen.

Code: ε -Schlauch visualisieren

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = np.arange(1, 51)
a_n = 1 / n      # Folge 1/n
L = 0           # Grenzwert

eps = 0.1
N = int(np.ceil(1/eps)) # N = 10

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,4))
ax.stem(n, a_n, markerfmt='bo',
        linefmt='b-', basefmt='gray')
ax.axhline(y=L, color='red',
           linestyle='--', label='$a=0$')
ax.fill_between(n, L-eps, L+eps,
               alpha=0.15, color='red',
               label=f'$\varepsilon$-Schlauch')
ax.axvline(x=N, color='green',
           linestyle=':', label=f'$N={N}$')
ax.set_xlabel('$n$')
ax.set_ylabel('$a_n$')
ax.legend()
plt.show()
```

Die Visualisierung macht die abstrakte ε - N -Definition greifbar – experimentieren Sie mit verschiedenen Folgen!

Was zeigt der Plot:

- Blaue Punkte: Folgenglieder $a_n = 1/n$
- Rote gestrichelte Linie: Grenzwert $a = 0$
- Roter Bereich: ε -Schlauch $(-\varepsilon, \varepsilon)$
- Gruene Linie: Ab Index N alle im Schlauch

Interaktiv: ε veraendern und beobachten, wie N waechst.

ε	N
0,5	3
0,1	11
0,01	101
0,001	1001

Zusammenhang: $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ – je kleiner ε , desto groesser N .

Stochastische Zinssaetze:

Code: Zinsszenarien

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

np.random.seed(42)
KO = 100_000
n_years = 20
n_sims = 1000

# Zinssaetze: Mittelwert 5%, Std 2%
rates = np.random.normal(
    0.05, 0.02, (n_sims, n_years))

# Kapitalentwicklung simulieren
K = np.zeros((n_sims, n_years + 1))
K[:, 0] = KO
for t in range(n_years):
    K[:, t+1] = K[:, t] * (1+rates[:, t])

# Perzentile
p5 = np.percentile(K, 5, axis=0)
p50 = np.percentile(K, 50, axis=0)
p95 = np.percentile(K, 95, axis=0)
```

Monte-Carlo-Simulationen quantifizieren die Unsicherheit – essentiell fuer realistische Finanzplanung.

Parametersensitivitaet:

- **Zinssatz** $\pm 1\%$: starker Effekt ueber lange Laufzeiten
- **Volatilitaet**: groessere Streuung \Rightarrow hoehere Unsicherheit
- **Laufzeit**: laengere Laufzeit verstaerkt Zinseszins-Effekt *und* Unsicherheit

Ergebnis ($n = 1000$ Simulationen, 20 Jahre):

Kennzahl	Endwert
5. Perzentil	$\approx 165\,000\text{ €}$
Median	$\approx 260\,000\text{ €}$
95. Perzentil	$\approx 415\,000\text{ €}$
Deterministisch ($i = 5\%$)	265 330 €

Fazit: Der deterministische Endwert liegt nahe am Median, aber die **Streuung** ist erheblich!

Leonhard Euler (1707–1783)

- Einfuehrung der Zahl e und ihrer Notation
- Exponentialreihe $e^x = \sum x^k/k!$
- Berechnete $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ (Basler Problem)
- Beginn die systematische Reihentheorie

Beitrag: Euler verwandelte Reihen von Kuriositaeten in ein zentrales Werkzeug der Mathematik.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

- Gauss-Summe:
 $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$ (als Kind!)
- Hypergeometrische Reihen
- Beitrage zur Zahlentheorie ueber Reihen

Anekdote: Der Lehrer wollte die Klasse beschaeftigen mit der Summe $1 + 2 + \dots + 100$. Der junge Gauss antwortete in Sekunden: 5050.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

- Strenge ε - N -Definition der Konvergenz
- Cauchy-Kriterium fuer Folgen und Reihen
- Wurzelkriterium (Cauchy-Hadamard)
- Begruender der modernen Analysis

Beitrag: Cauchy ersetzte intuitive "Grenzwert"-Begriffe durch exakte Definitionen – das Fundament, auf dem wir aufbauen.

Die Analysis entwickelte sich ueber Jahrhunderte von intuitiven Ideen (Newton, Leibniz) zu rigorosen Beweisen (Cauchy, Weierstrass).

Folgen:

- Arithmetisch: $a_n = a_1 + (n-1)d$
- Geometrisch: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- Euler: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$
- ε -Def.: $\forall \varepsilon > 0 \exists N : n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

Reihen:

- Arithmetische: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
- Geometrische: $S = \frac{a_1}{1-q} \quad (|q| < 1)$
- Gauss: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- Quotiententest: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

Potenzreihen:

- $e^x = \sum \frac{x^k}{k!}, \quad R = \infty$
- Konvergenzradius: $R = 1 / \limsup \sqrt[k]{|c_k|}$

Zinsrechnung:

- Zinseszins: $K_n = K_0(1+i)^n$
- Stetig: $K(t) = K_0 e^{it}$
- Barwert: $K_0 = K_n \cdot (1+i)^{-n}$
- 72er-Regel: $t_2 \approx 72/i(\%)$

Annuitäten:

- $A = K_0 \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$
- Rentenbarwert: $BW = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$
- Rentenendwert: $EW = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Elastizität & Wachstum:

- $E = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$
- Kreuzpreis: $E_{AB} = \frac{dQ_A}{dP_B} \cdot \frac{P_B}{Q_A}$
- Logistisch: $N(t) = \frac{K}{1+(K/N_0-1)e^{-rt}}$

Diese Formelsammlung deckt die zentralen Ergebnisse der Vorlesung ab – ideal zur Klausurvorbereitung.

Ausblick – naechste Themen:

1. **Differentialrechnung:** Ableitungen als Grenzwerte von Differenzenquotienten – direkter Bezug zu Folgen und Grenzwerten.
2. **Integralrechnung:** Riemannsche Summen als Reihen – die Verbindung von Reihen und Flaechenberechnung.
3. **Differentialgleichungen:** Exponentielles und logistisches Wachstum als Loesungen von DGLs.

Verbindungen:

- Folgen → Ableitungen (Grenzprozess)
- Reihen → Integrale (Summen → Flaechen)
- Potenzreihen → Taylor-Entwicklung
- Zinsrechnung → stetige Modelle

Empfohlene Literatur:

1. **Sydsaeter, Hammond, Strom:** *Mathematik fuer Wirtschaftswissenschaftler*, Pearson. Kap. 10–11 (Folgen, Reihen, Finanzmathematik).
2. **Tietze:** *Einfuehrung in die angewandte Wirtschaftsmathematik*, Springer. Kap. 5–7.
3. **Hass, Weir, Thomas:** *University Calculus*, Pearson. Kap. 9 (Sequences and Series).
4. **Forster:** *Analysis 1*, Springer. Kap. 2–4 (Folgen, Reihen, Konvergenz).

Online-Ressourcen:

- Khan Academy: Sequences & Series
- MIT OpenCourseWare: 18.01 Single Variable Calculus
- Python: `numpy`, `scipy.optimize`, `matplotlib`

Die Analysis baut aufeinander auf: Folgen → Reihen → Grenzwerte → Differentialrechnung → Integralrechnung.