Folgen, Reihen und Finanzmathematik

Kernvorlesung

BSc Analysis

Inhaltsverzeichnis

Lernziele

Am Ende dieser Lektion koennen Sie:

1. **Folgen** definieren, klassifizieren (arithmetisch, geometrisch) und auf Konvergenz untersuchen – die ε-Definition des Grenzwerts anwenden.
2. **Reihen** als Grenzwerte von Partialsummen verstehen und mit dem Quotienten-, Wurzel- und Vergleichskriterium auf Konvergenz pruefen.
3. **Zinseszins, Annuitaeten und Tilgungsplaene** berechnen und den Zusammenhang zwischen geometrischen Reihen und Finanzmathematik erklaeren.
4. **Preiselastizitaet und Wachstumsmodelle** (exponentiell, logistisch) formulieren und oekonomisch interpretieren.

Folgen und Reihen bilden das Fundament fuer Differential- und Integralrechnung – und zugleich die Basis der Finanzmathematik.

Was ist eine Folge?

Definition

Eine **Folge** reeller Zahlen ist eine Abbildung $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Man schreibt $(a_n)_{n\geq 1}$ oder kurz (a_n).

Explizite Darstellung:
Eine Formel gibt a_n direkt als Funktion von n an.

- $a_n = \frac{1}{n}$ (harmonische Folge)
- $a_n = (-1)^n$ (alternierend)
- $a_n = 2n - 1$ (ungerade Zahlen)

Rekursive Darstellung:
a_n wird durch vorherige Glieder definiert.

- $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2$ (arithmetisch)
- $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2\,a_n$ (geometrisch)
- Fibonacci: $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Anschauung:

Eine Folge ist eine *geordnete Liste* von Zahlen:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots$$

Wirtschaftliche Beispiele:

- Monatliche Umsatzzahlen eines Unternehmens
- Jaehrliche BIP-Werte eines Landes
- Tageskurse einer Aktie
- Quartalsweise Gewinnentwicklung

Notation:
$(a_n)_{n\geq 1}$ betont den Startindex.
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist aequivalent.

Jede Folge ist eine Funktion auf $\mathbb{N}$ – die Folgentheorie ist damit ein Spezialfall der Analysis.

Definition

Eine Folge heisst **arithmetisch**, wenn die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist:

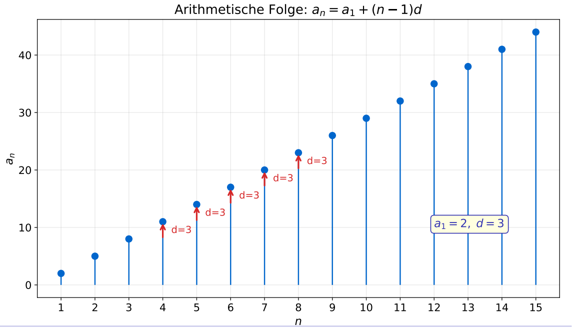
$$a_n = a_1 + (n-1)\,d, \qquad d = a_{n+1} - a_n = \text{const.}$$

Beispiele:

- $2, 5, 8, 11, 14, \ldots \quad (d = 3)$
- $100, 95, 90, 85, \ldots \quad (d = -5)$
- $a_1 = 1000,\ d = 50$: Gehaltserhoehung um 50 €/Monat

Wirtschaftliche Anwendung:
Lineare Abschreibung eines Anlageguts:

- Anschaffungswert: $K_0 = 50\,000$ €
- Nutzungsdauer: $n = 10$ Jahre
- Jaehrliche Abschreibung: $d = -5\,000$ €
- Buchwert im Jahr k: $B_k = 50\,000 - 5\,000\,k$



Arithmetische Folgen modellieren gleichmaessiges (lineares) Wachstum – jeder Schritt addiert denselben Betrag.

Geometrische Folgen

Definition

Eine Folge heisst **geometrisch**, wenn der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist:

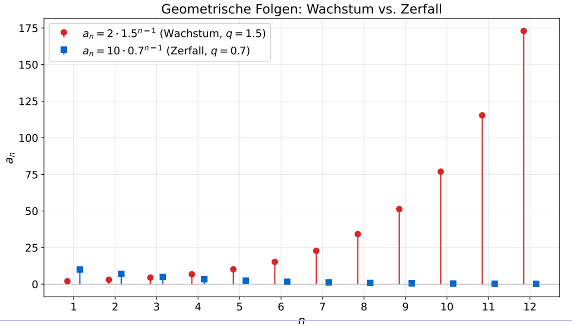
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \qquad q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{const.}$$

Fallunterscheidung:

- $|q| < 1$: Folge konvergiert gegen 0
- $q = 1$: konstante Folge ($a_n = a_1$)
- $|q| > 1$: Folge divergiert (waechst unbeschraenkt)
- $q = -1$: alternierend ($a_1, -a_1, a_1, \ldots$)

Wirtschaftliche Beispiele:

- Zinseszins: $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ mit $q = 1+i$
- Inflation: Kaufkraft sinkt mit $q < 1$
- Bevölkerungswachstum: $N_{t+1} = r \cdot N_t$



Geometrische Folgen modellieren prozentuales (exponentielles) Wachstum – jeder Schritt multipliziert mit demselben Faktor.

Monotonie und Beschraenktheit

Monotonie

Eine Folge (a_n) heisst

- **monoton wachsend**, falls $a_{n+1} \geq a_n$ fuer alle n,
- **streng monoton wachsend**, falls $a_{n+1} > a_n$ fuer alle n,
- **monoton fallend**, falls $a_{n+1} \leq a_n$ fuer alle n,
- **streng monoton fallend**, falls $a_{n+1} < a_n$ fuer alle n.

Beschraenktheit

Eine Folge (a_n) heisst

- **nach oben beschraenkt**, falls $\exists\, M \in \mathbb{R}$: $a_n \leq M$ fuer alle n,
- **nach unten beschraenkt**, falls $\exists\, m \in \mathbb{R}$: $a_n \geq m$ fuer alle n,
- **beschraenkt**, falls nach oben *und* unten beschraenkt.

Nachweis-Methoden:

1. Differenz: $a_{n+1} - a_n \geq 0$?
2. Quotient: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$? (falls $a_n > 0$)
3. Ableitung: $f'(n) \geq 0$? (falls $a_n = f(n)$)

Satz (Monotoniekriterium)

Jede **monotone und beschraenkte** Folge ist konvergent.

Beispiel: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ ist streng monoton wachsend und durch 1 nach oben beschraenkt $\Rightarrow$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Das Monotoniekriterium garantiert Konvergenz, ohne den Grenzwert explizit zu kennen – ein maaechtiges theoretisches Werkzeug.

Wichtige Folgen und ihre Grenzwerte

Eulersche Zahl

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \approx 2{,}71828$$

Bedeutung: e ist die Basis des natuerlichen Logarithmus und zentral fuer stetige Verzinsung:

$$K(t) = K_0 \cdot \mathrm{e}^{it}$$

n-te Wurzel von n

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$$

Beweis-Idee: Setze $a_n = n^{1/n} - 1 \geq 0$. Dann $n = (1+a_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\, a_n^2$ (Bernoulli), also $a_n \leq \sqrt{2/(n-1)} \to 0$.

Nullfolgen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \text{fuer } |q| < 1$$

Weitere wichtige Grenzwerte:

Folge	Grenzwert
$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$	e^x
$\frac{n!}{n^n}$	0
$\sqrt[n]{a} \quad (a>0)$	1
$\frac{a^n}{n!} \quad (a \in \mathbb{R})$	0

Hierarchie: $n! \gg a^n \gg n^k \gg \ln n$ fuer $n \to \infty$.

Die Eulersche Zahl e verbindet Folgen, Reihen und Finanzmathematik – sie taucht in dieser Vorlesung immer wieder auf.

Konvergenz: Die ε-Definition

Definition (Grenzwert einer Folge)

Eine Folge (a_n) **konvergiert** gegen $a \in \mathbb{R}$, falls:

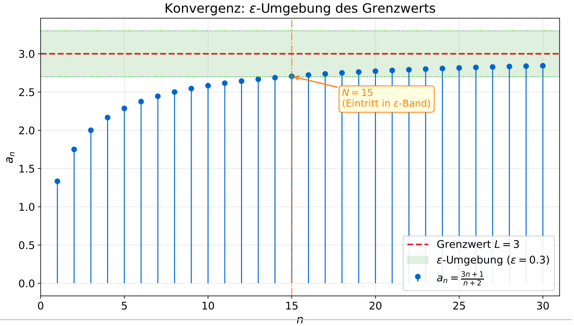
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Man schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ fuer $n \to \infty$.

Anschauung:

- Wir geben eine beliebig kleine "Toleranz" $\varepsilon > 0$ vor.
- Ab einem Index N liegen *alle* Folgenglieder im ε-Schlauch $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$.
- Nur *endlich viele* Glieder duerfen ausserhalb liegen.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$.
Fuer $\varepsilon = 0{,}01$ waehle $N = 101$:
$n \geq 101 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{101} < 0{,}01 = \varepsilon$ ✓



Die ε-Definition praezisiert, was "beliebig nahe kommen" bedeutet – sie ist das Fundament der Analysis.

Rechenregeln fuer konvergente Folgen

Seien (a_n) und (b_n) konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

Summenregel:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$$

Produktregel:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Quotientenregel: (falls $b \neq 0$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Skalierung: Fuer $c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a$$

Weitere Regeln:

- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ (falls $a_n \geq 0$)
- $\lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k$ fuer $k \in \mathbb{N}$

Beispiel

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$$

$$= \frac{3+0}{1+0} = 3$$

Trick: Zaehler und Nenner durch die hoechste n-Potenz teilen

Einschnuerungssatz (Sandwich-Theorem)

Satz (Einschnuerungssatz)

Seien (a_n), (b_n), (c_n) Folgen mit

$$b_n \leq a_n \leq c_n \quad \text{fuer alle } n \geq n_0$$

und $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$. Dann konvergiert auch (a_n) und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Anschauung:

- Die Folge (a_n) wird von oben und unten "eingeschnuert".
- Da beide Schranken gegen L konvergieren, bleibt (a_n) keine Wahl.

Beispiel 1: $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

- Es gilt: $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$
- $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$
- $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

Beispiel 2: $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

- $\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}$
- Da $\frac{n!}{n^n} \geq 0$ und $\frac{1}{n} \to 0$:
- $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Typische Anwendung:

- Betrag abschaetzen: $|a_n| \leq c_n \to 0$
- Dann $a_n \to 0$ (da $-c_n \leq a_n \leq c_n$)

Merke: Der Einschnuerungssatz ist besonders nuetzlich, wenn der Grenzwert nicht direkt berechenbar ist.

Der Sandwich-Satz wird auch als "Quetschlemma" oder "Squeeze Theorem" bezeichnet – ein Standardwerkzeug der Analysis.

Beispiele: Grenzwertberechnung

Beispiel 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+2}$$

Durch n teilen:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{3+0}{1+0} = \mathbf{3}$$

Beispiel 2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2-3}$$

Durch n^2 teilen:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{3}{n^2}} = \frac{1+0}{2-0} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Beispiel 3

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

Konjugierte Erweiterung:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to \mathbf{0}$$

Merke: Standard-Techniken:

1. Durch hoechste n-Potenz teilen
2. Konjugiert erweitern (bei Wurzeln)
3. L'Hôpital (bei $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$)
4. Sandwich-Satz (bei Abschaetzungen)

Uebung: Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$ **und** $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$**. Antworten:** 0 **und** e^3**.**

Reihen: Definition und Partialsummen

Definition

Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge. Die n**-te Partialsumme** ist

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Die **Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist der Grenzwert $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, falls dieser existiert.

Konvergenz:

- Die Reihe **konvergiert**, falls (S_n) konvergiert.
- Die Reihe **divergiert**, falls (S_n) divergiert.

Notwendiges Kriterium

Konvergiert $\sum a_k$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Achtung: Die Umkehrung gilt *nicht*!
Gegenbeispiel: $\sum \frac{1}{k}$ divergiert (harmonische Reihe), obwohl $\frac{1}{k} \to 0$.

Beispiel: Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

Die Partialsummen wachsen unbeschraenkt!

Beispiel: Teleskopsumme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Arithmetische und geometrische Reihe

Arithmetische Reihe

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\,(2a_1 + (n-1)d)$$

Gauss-Formel: Fuer $a_k = k$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beispiel: $1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{100\cdot 101}{2} = 5050.$

Merkregel: Summe $=$ Anzahl $\times$ Durchschnitt von erstem und letztem Glied.

Geometrische Reihe

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_1\, q^k = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

Unendliche geometrische Reihe

Fuer $|q| < 1$:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_1\, q^k = \frac{a_1}{1-q}$$

Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

Finanz: Barwert einer ewigen Rente: $BW = \frac{R}{i}$ (geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{1+i}$).

Konvergenztests fuer Reihen

Quotientenkriterium

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

- $L < 1$: konvergent
- $L > 1$: divergent
- $L = 1$: keine Aussage

Gut fuer: Reihen mit $n!$ oder a^n.

Beispiel: $\sum \frac{2^n}{n!}$

$L = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$ ✓

Wurzelkriterium

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

- $L < 1$: konvergent
- $L > 1$: divergent
- $L = 1$: keine Aussage

Gut fuer: Reihen mit $a_n = f(n)^n$.

Beispiel: $\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$ ✓

Vergleichskriterium

Falls $0 \le a_n \le b_n$:

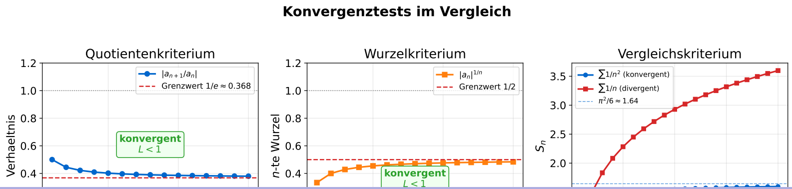
- $\sum b_n$ konv. $\Rightarrow \sum a_n$ konv.
- $\sum a_n$ div. $\Rightarrow \sum b_n$ div.

Vergleichsreihen:

- $\sum \frac{1}{n^p}$: konv. fuer $p > 1$
- $\sum q^n$: konv. fuer $|q| < 1$

Beispiel: $\sum \frac{1}{n^2+n}$

$\frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2}$ und $\sum \frac{1}{n^2}$ konv. ✓



Definition (Potenzreihe)

Eine **Potenzreihe** um den Entwicklungspunkt x_0 ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-x_0)^k = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \quad \text{oder} \quad R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

- $|x-x_0| < R$: absolute Konvergenz
- $|x-x_0| > R$: Divergenz
- $|x-x_0| = R$: Einzelfallpruefung

Wichtige Taylor-Reihen ($x_0 = 0$):

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad R = \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,x^k \qquad R = 1$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} \qquad R = \infty$$

Einfacher Zins vs. Zinseszins

Einfacher Zins (linear)

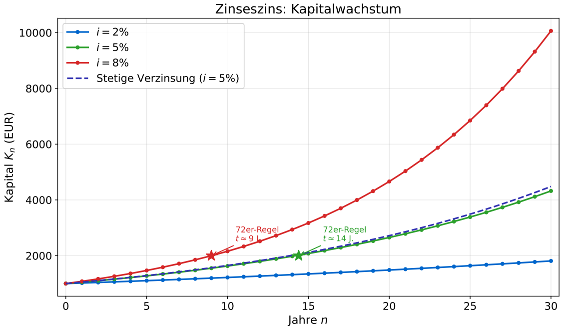
$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

- Zinsen nur auf das *Anfangskapital* K_0
- Lineares Wachstum (arithmetische Folge)
- Jaehrliche Zinsen: $Z = K_0 \cdot i$

Zinseszins (exponentiell)

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

- Zinsen auf Kapital *inklusive aufgelaufener Zinsen*
- Exponentielles Wachstum (geometrische Folge)
- Aufzinsungsfaktor: $q = 1 + i$



Zahlenbeispiel ($K_0 = 1000$ €, $i = 5\%$)

Jahr	Einfach	Zinseszins
0	1 000	1 000
10	1 500	1 629
20	2 000	2 653

Stetige Verzinsung

Von diskreter zu stetiger Verzinsung

Bei m-maliger Verzinsung pro Jahr:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Fuer $m \to \infty$ (stetige Verzinsung):

$$K(t) = K_0 \cdot \mathrm{e}^{i \cdot t}$$

Herleitung:

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = \left[\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n} = \left(\mathrm{e}^{i}\right)^{n} = \mathrm{e}^{in}$$

Hier nutzen wir $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

Aequivalenter Jahreszins:
Stetiger Zinssatz $i_s \leftrightarrow$ diskreter Zinssatz i_d:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i_s} &= 1 + i_d \\ i_s &= \ln(1 + i_d) \\ i_d &= \mathrm{e}^{i_s} - 1 \end{aligned}$$

Vergleich der Verzinsungshaeufigkeiten:
($K_0 = 1000$ €, $i = 10\%$, $n = 1$ Jahr)

Haeufigkeit	**Endwert**
Jaehrlich ($m = 1$)	1 100,00
Halbjaehrlich ($m = 2$)	1 102,50
Quartalsweise ($m = 4$)	1 103,81
Monatlich ($m = 12$)	1 104,71
Taeglich ($m = 365$)	1 105,16
Stetig ($m \to \infty$)	**1 105,17**

Beobachtung: Der Unterschied zwischen taeglich und stetig ist minimal.

Stetige Verzinsung vereinfacht die Mathematik erheblich – statt Potenzen rechnet man mit der Exponentialfunktion

Verdopplungszeit und die 72er-Regel

Exakte Verdopplungszeit

Gesucht: t_2 mit $K_0 \cdot (1+i)^{t_2} = 2\,K_0$.

$$(1+i)^{t_2} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad t_2 = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)}$$

Bei stetiger Verzinsung:

$$t_2 = \frac{\ln 2}{i} \approx \frac{0{,}6931}{i}$$

72er-Regel (Faustregel)

$$t_2 \approx \frac{72}{i\,(\%)}$$

Merke: Die 72er-Regel ist eine schnelle Abschaetzung, die fuer Zinssaetze zwischen 2% und 15% sehr genau ist.

Vergleich: exakt vs. 72er-Regel

i (%)	**Exakt** (Jahre)	**72er-Regel**
2	35,00	36,00
4	17,67	18,00
6	11,90	12,00
8	9,01	9,00
10	7,27	7,20
12	6,12	6,00
15	4,96	4,80

Warum 72?
Taylor-Entwicklung: $\ln(1+i) \approx i - \frac{i^2}{2}$, also $t_2 \approx \frac{0{,}6931}{i - i^2/2}$.
Fuer $i \approx 8\%$ passt der Faktor 72 optimal.

Die 72er-Regel ist ein beliebtes Werkzeug in der Finanzberatung – sie laesst sich im Kopf rechnen.

Barwert und Endwert

Grundprinzip der Finanzmathematik

Ein Euro heute ist mehr wert als ein Euro morgen – weil er in der Zwischenzeit Zinsen erwirtschaften kann.

Aufzinsung (Endwert):

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

"Was ist ein heutiger Betrag K_0 in n Jahren wert?"

Abzinsung (Barwert):

$$K_0 = K_n \cdot (1+i)^{-n} = \frac{K_n}{(1+i)^n}$$

"Was ist ein kuenftiger Betrag K_n heute wert?"

Abzinsungsfaktor:

$$v = (1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i}$$

$K_0 = K_n \cdot v^n$

Beispiel: Investitionsentscheidung

Sie erhalten in 5 Jahren 10 000 €. Der Marktzins betraegt $i = 6\%$.

Barwert:

$$K_0 = \frac{10\,000}{(1{,}06)^5} = \frac{10\,000}{1{,}3382} \approx 7\,473 \text{ €}$$

Interpretation: Die zukuenftige Zahlung ist *heute* nur 7 473 € wert.

Kapitalwert einer Investition (NPV):

$$\text{NPV} = -I_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+i)^t}$$

Annuitaetenformel

Problem

Ein Kredit ueber K_0 wird mit jaehrlichen, gleich hohen Raten A (**Annuitaeten**) in n Jahren getilgt. Zinssatz: i.
Gesucht: Wie hoch ist die jaehrliche Rate A?

Herleitung ueber geometrische Reihe:

Barwert aller Annuitaeten = Kreditbetrag:

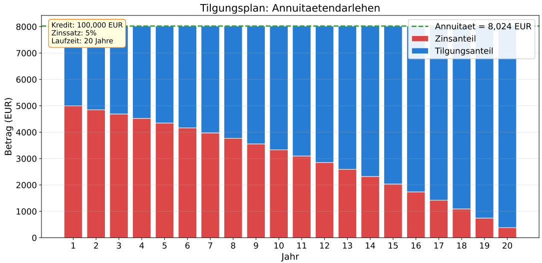
$$K_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{A}{(1+i)^t} = A \cdot \underbrace{\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n}}_{\text{Rentenbarwertfaktor}}$$

Aufloesen nach A:

Annuitaetenformel

$$A = K_0 \cdot \frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Der Bruch heisst **Annuitaetenfaktor** oder **Kapitalwiedergewinnungsfaktor**.



Beispiel

$K_0 = 100\,000$ €, $i = 5\%$, $n = 10$ Jahre.

$$0{,}05 \cdot 1{,}05^{10}$$

Rentenbarwert und Rentenendwert

Rentenbarwert (vorschuessig/nachschuessig)

Jaehrliche Zahlung R ueber n Jahre bei Zinssatz i:

Nachschuessig (Zahlung am Periodenende):

$$BW_{\text{nach}} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$$

Vorschuessig (Zahlung am Periodenstart):

$$BW_{\text{vor}} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^{n-1}}$$

Zusammenhang:

$$BW_{\text{vor}} = BW_{\text{nach}} \cdot (1+i)$$

Rentenendwert

Nachschuessig:

$$EW_{\text{nach}} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Vorschuessig:

$$EW_{\text{vor}} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

Beispiel: Altersvorsorge

Sie sparen $R = 200$ €/Monat $= 2\,400$ €/Jahr ueber 30 Jahre bei $i = 4\%$:

$$EW = 2\,400 \cdot \frac{1{,}04^{30} - 1}{0{,}04} \approx \mathbf{134\,622} \text{ €}$$

Eingezahlt: $72\,000$ €. Zinsertrag: $\approx 62\,622$ €.

Der Rentenbarwert beantwortet: "Was ist ein Zahlungsstrom heute wert?" Der Rentenendwert: "Was hat sich am Ende angesammelt?"

Tilgungsplan-Beispiel

Annuitaetendarlehen: $K_0 = 100\,000$ €, Zinssatz $i = 5\%$, Laufzeit $n = 5$ Jahre.

Annuitaet: $A = 100\,000 \cdot \frac{0{,}05 \cdot 1{,}05^5}{1{,}05^5 - 1} = 100\,000 \cdot 0{,}23097 \approx 23\,097$ €/Jahr.

Jahr	Restschuld (Anfang)	Zinsen	Tilgung	Annuitaet
1	100 000	5 000	18 097	23 097
2	81 903	4 095	19 002	23 097
3	62 901	3 145	19 952	23 097
4	42 949	2 147	20 950	23 097
5	21 999	1 100	21 997	23 097
Summe		**15 487**	**100 000**	**115 487**

Beobachtungen:

- Die **Annuitaet bleibt konstant** (23 097 €)
- Der **Zinsanteil sinkt** (weniger Restschuld)
- Der **Tilgungsanteil steigt** (Differenz zur Annuitaet)

Formeln fuer Zeile t:

- Zinsen: $Z_t = K_{t-1} \cdot i$
- Tilgung: $T_t = A - Z_t$
- Restschuld: $K_t = K_{t-1} - T_t$

Gesamtkosten: $n \cdot A - K_0 = 15\,487$ € Zinsen.

Der Tilgungsplan zeigt die "Anatomie" eines Kredits: Am Anfang zahlt man viel Zinsen, am Ende viel Tilgung.

Preiselastizitaet der Nachfrage

Definition

Die **Preiselastizitaet der Nachfrage** misst die prozentuale Aenderung der nachgefragten Menge Q bei einer prozentualen Aenderung des Preises P:

$$E = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}$$

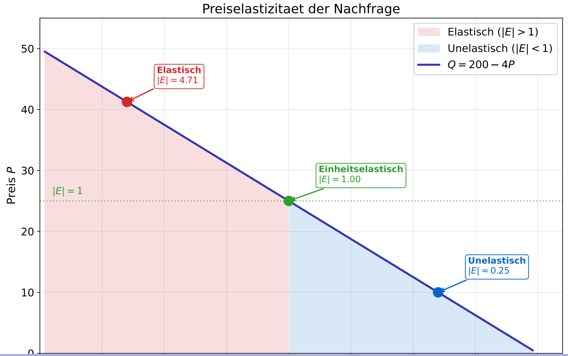
Punktelastizitaet (bei differenzierbarer Nachfragefunktion $Q(P)$):

$$E = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \cdot \frac{P}{Q}$$

Bogenelastizitaet (zwischen zwei Punkten):

$$E_{\text{Bogen}} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} \cdot \frac{\frac{P_1+P_2}{2}}{\frac{Q_1+Q_2}{2}}$$

Vorzeichen: Normalerweise ist $E < 0$ (Gesetz der Nachfrage). Oft wird $|E|$ angegeben.



Elastische vs. unelastische Nachfrage

Klassifikation

$\lvert E \rvert > 1$	**elastisch**
$\lvert E \rvert = 1$	**einheitselastisch**
$\lvert E \rvert < 1$	**unelastisch**
$\lvert E \rvert = 0$	**vollkommen unelastisch**
$\lvert E \rvert = \infty$	**vollkommen elastisch**

Auswirkung auf den Erloes $R = P \cdot Q$:

- $|E| > 1$: Preiserhoehung $\Rightarrow$ Erloes **sinkt**
- $|E| = 1$: Preiserhoehung $\Rightarrow$ Erloes **bleibt gleich**
- $|E| < 1$: Preiserhoehung $\Rightarrow$ Erloes **steigt**

Wirtschaftliche Intuition:

- **Elastisch:** Luxusgueter, Gueter mit Substituten
  $\rightarrow$ Konsumenten reagieren stark auf Preis
- **Unelastisch:** Grundnahrungsmittel, Medikamente, Benzin
  $\rightarrow$ Konsumenten kaufen trotz Preiserhoehung

Erloes-Maximierung:
Der Erloes $R(P) = P \cdot Q(P)$ ist maximal, wenn $|E| = 1$ gilt.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} &= Q + P \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \\
&= Q\left(1 + \frac{P}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right) = Q(1+E) \\
&= 0 \quad \Leftrightarrow \quad E = -1
\end{aligned}$$

Preispolitik erfordert Kenntnis der Elastizitaet: Bei elastischer Nachfrage senkt man den Preis, bei unelastischer erhoeht man ihn.

Beispiel: Elastizitaet berechnen und interpretieren

Nachfragefunktion: $Q(P) = 200 - 4P$, Definitionsbereich: $P \in [0, 50]$.

Elastizitaet:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = -4, \qquad E = -4 \cdot \frac{P}{200 - 4P} = \frac{-4P}{200 - 4P}$$

Auswertung an verschiedenen Preispunkten:

P	Q	E	**Typ**
10	160	$-0{,}25$	unelastisch
20	120	$-0{,}67$	unelastisch
25	100	$-1{,}00$	einheitselastisch
30	80	$-1{,}50$	elastisch
40	40	$-4{,}00$	elastisch

Erloes:

$$R(P) = P \cdot Q(P) = 200P - 4P^2$$

$$R'(P) = 200 - 8P = 0 \quad \Rightarrow \quad P^* = 25$$

$$R_{\max} = R(25) = 200 \cdot 25 - 4 \cdot 625 = \mathbf{2\,500}$$

Interpretation:

- Bei $P = 25$ ist $|E| = 1$ – maximaler Erloes!
- Fuer $P < 25$: unelastisch $\Rightarrow$ Preiserhoehung lohnt sich
- Fuer $P > 25$: elastisch $\Rightarrow$ Preissenkung lohnt sich

Gewinnmaximierung: Benoetigt zusaetzlich die Kostenfunktion $C(Q)$ – anderes Optimum als Erloesmaximierung!

Die Elastizitaet variiert entlang der linearen Nachfragekurve – sie ist nicht konstant, obwohl die Steigung konstant ist.

Exponentielles Wachstum

Modell

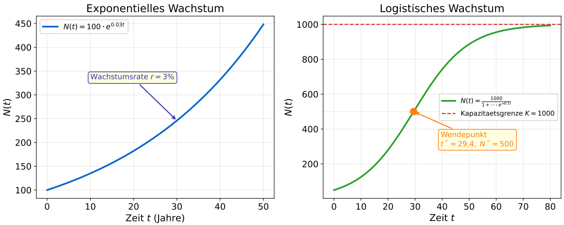
Stetig: $N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{r\,t}$, **Diskret:** $N_t = N_0 \cdot (1+g)^t$

Eigenschaften:

- Konstante **relative** Wachstumsrate: $\frac{N'(t)}{N(t)} = r$
- Aequivalenz: $g = \mathrm{e}^r - 1$ bzw. $r = \ln(1+g)$
- Geometrische Folge in diskreter Zeit
- Verdopplungszeit: $t_2 = \frac{\ln 2}{r}$

Beispiele:

- Bevoelkerungswachstum (kurzfristig)
- BIP-Wachstum: $Y_t = Y_0 \cdot (1+g)^t$
- Radioaktiver Zerfall: $N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}$
- Bakterienwachstum (unbegrenzte Ressourcen)



Exponentielles Wachstum ist auf Dauer unrealistisch – in der Praxis setzen Ressourcenbeschraenkungen Grenzen (logistisches Modell).

Logistisches Wachstum

Modell (Verhulst-Gleichung)

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) \cdot \mathrm{e}^{-r\,t}}$$

mit **Kapazitaetsgrenze** (Saettigungsgrenze) K, Anfangswert N_0 und Wachstumsrate r.

Differentialgleichung:

$$N'(t) = r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

- Fuer $N \ll K$: $\approx$ exponentielles Wachstum
- Fuer $N \approx K$: Wachstum verlangsamt sich
- $\lim_{n\to\infty} N(t) = K$ (Saettigung)

Wendepunkt:

$$t_W = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{K}{N_0} - 1\right), \quad N(t_W) = \frac{K}{2}$$

Am Wendepunkt ist das **absolute Wachstum maximal**.

S-Kurve – drei Phasen:

1. **Anlaufphase:** langsames Wachstum ($N \ll K$)
2. **Wachstumsphase:** schnelles, fast exponentielles Wachstum
3. **Saettigungsphase:** Verlangsamerung, Annaeherung an K

Wirtschaftliche Beispiele:

- Marktdurchdringung neuer Technologien
- Produktlebenszyklus (Absatzentwicklung)
- Nutzerwachstum von Plattformen
- Ausbreitung von Innovationen (Diffusion)

Vergleich:

Wirtschaftliche Anwendung: Wachstumsmodelle

BIP-Wachstum:

- Jaehrliche Wachstumsrate g:

$$Y_t = Y_0 \cdot (1+g)^t$$

- Deutschland (real): $g \approx 1{,}5\%$
- Verdopplungszeit: $t_2 \approx \frac{72}{1{,}5} = 48$ Jahre
- "Regel of 70": $t_2 \approx 70/g(\%)$

Marktdurchdringung (Bass-Modell):

- Innovatoren: kaufen unabhaengig (p)
- Imitatoren: kaufen durch Mundpropaganda (q)

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = (p + q\,F(t))(1 - F(t))$$

- S-foermige Adoptionskurve

Vergleich der Modelle:

	Exponentiell	**Logistisch**
Langfristig	$\to \infty$	$\to K$
Kurzfristig	sehr gut	gut
Ressourcen	ignoriert	beruecksichtigt
Form	konvex	S-Kurve
Realismus	gering	hoch

Beispiel: Smartphone-Markt

- 2007–2012: exponentielles Wachstum
- 2012–2018: Wachstumsphase (S-Kurve)
- Ab 2018: Saettigung ($K \approx 85\%$ der Bevoelkerung)

Fazit: Exponentielles Modell fuer kurze Zeitraeume, logistisches fuer langfristige Prognosen.

Die Wahl des Wachstumsmodells beeinflusst Prognosen massgeblich – exponentiell ueberschaetzt, logistisch ist realistischer.

Python: Folgen, Reihen und Zinsrechnung

Folgen und Reihen mit NumPy:

Code: Geometrische Folge & Reihe

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Geometrische Folge
n = np.arange(0, 20)
q = 0.8
a_n = q**n  # a_n = q^n

# Partialsummen (geometrische Reihe)
S_n = np.cumsum(a_n)
S_inf = 1 / (1 - q)  # = 5.0

print(f"S_20 = {S_n[-1]:.4f}")
print(f"S_inf = {S_inf:.4f}")

plt.stem(n, a_n, label='$a_n$')
plt.axhline(y=0, color='gray')
plt.title('Geometrische Folge')
plt.show()
```

Zinseszinsrechnung:

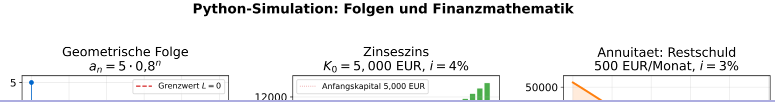
Code: Sparplan-Simulation

```python
# Zinseszins
K0 = 10_000  # Anfangskapital
i = 0.05     # Zinssatz 5%
n = 30       # Jahre

# Endwert
K_n = K0 * (1 + i)**n
print(f"Endwert: {K_n:,.2f} EUR")

# Sparplan (Annuitaet)
R = 200 * 12  # 200 EUR/Monat
EW = R * ((1+i)**n - 1) / i
print(f"Sparplan: {EW:,.2f} EUR")

# Verdopplungszeit
t2 = np.log(2) / np.log(1+i)
t2_72 = 72 / (i*100)
print(f"Exakt: {t2:.2f} Jahre")
print(f"72er:  {t2_72:.2f} Jahre")
```



Simulation: Monte-Carlo-Zinsszenarien

Stochastische Zinssaetze:

Code: Zinsszenarien

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

np.random.seed(42)
K0 = 100_000
n_years = 20
n_sims = 1000

# Zinssaetze: Mittelwert 5%, Std 2%
rates = np.random.normal(
    0.05, 0.02, (n_sims, n_years))

# Kapitalentwicklung simulieren
K = np.zeros((n_sims, n_years + 1))
K[:, 0] = K0
for t in range(n_years):
    K[:, t+1] = K[:, t] * (1+rates[:, t])

# Perzentile
p5  = np.percentile(K, 5, axis=0)
p50 = np.percentile(K, 50, axis=0)
p95 = np.percentile(K, 95, axis=0)
```

Parametersensitivitaet:

- **Zinssatz $\pm 1\%$:** starker Effekt ueber lange Laufzeiten
- **Volatilitaet:** groessere Streuung $\Rightarrow$ hoehere Unsicherheit
- **Laufzeit:** laengere Laufzeit verstaerkt Zinseszins-Effekt *und* Unsicherheit

Ergebnis ($n = 1000$ Simulationen, 20 Jahre):

Kennzahl	Endwert
5. Perzentil	$\approx$ 165 000 €
Median	$\approx$ 260 000 €
95. Perzentil	$\approx$ 415 000 €
Deterministisch ($i = 5\%$)	265 330 €

Fazit: Der deterministische Endwert liegt nahe am Median, aber die **Streuung** ist erheblich!

Monte-Carlo-Simulationen quantifizieren die Unsicherheit – essentiell fuer realistische Finanzplanung.

Formelsammlung: Die wichtigsten Formeln

Folgen:

- Arithmetisch: $a_n = a_1 + (n-1)d$
- Geometrisch: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- Euler: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e}$
- ε-Def.: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

Reihen:

- Arithmetische: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
- Geometrische: $S = \frac{a_1}{1-q} \quad (|q| < 1)$
- Gauss: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- Quotiententest: $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Potenzreihen:

- $\mathrm{e}^x = \sum \frac{x^k}{k!}, \quad R = \infty$
- Konvergenzradius: $R = 1/\limsup \sqrt[k]{|c_k|}$

Zinsrechnung:

- Zinseszins: $K_n = K_0(1+i)^n$
- Stetig: $K(t) = K_0\,\mathrm{e}^{it}$
- Barwert: $K_0 = K_n \cdot (1+i)^{-n}$
- 72er-Regel: $t_2 \approx 72/i(\%)$

Annuitaeten:

- $A = K_0 \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$
- Rentenbarwert: $BW = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$
- Rentenendwert: $EW = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Elastizitaet & Wachstum:

- $E = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \cdot \frac{P}{Q}$
- Logistisch: $N(t) = \frac{K}{1+(K/N_0 - 1)\mathrm{e}^{-rt}}$

Diese Formelsammlung deckt die zentralen Ergebnisse der Vorlesung ab – ideal zur Klausurvorbereitung.

Ausblick und Literatur

Ausblick – naechste Themen:

1. **Differentialrechnung:** Ableitungen als Grenzwerte von Differenzenquotienten – direkter Bezug zu Folgen und Grenzwerten.
2. **Integralrechnung:** Riemannsche Summen als Reihen – die Verbindung von Reihen und Flaechenberechnung.
3. **Differentialgleichungen:** Exponentielles und logistisches Wachstum als Loesungen von DGLs.

Verbindungen:

- Folgen $\rightarrow$ Ableitungen (Grenzprozess)
- Reihen $\rightarrow$ Integrale (Summen $\rightarrow$ Flaechen)
- Potenzreihen $\rightarrow$ Taylor-Entwicklung
- Zinsrechnung $\rightarrow$ stetige Modelle

Empfohlene Literatur:

1. **Sydsaeter, Hammond, Strom:** *Mathematik fuer Wirtschaftswissenschaftler*, Pearson. Kap. 10–11 (Folgen, Reihen, Finanzmathematik).
2. **Tietze:** *Einfuehrung in die angewandte Wirtschaftsmathematik*, Springer. Kap. 5–7.
3. **Hass, Weir, Thomas:** *University Calculus*, Pearson. Kap. 9 (Sequences and Series).
4. **Forster:** *Analysis 1*, Springer. Kap. 2–4 (Folgen, Reihen, Konvergenz).

Online-Ressourcen:

- Khan Academy: Sequences & Series
- MIT OpenCourseWare: 18.01 Single Variable Calculus
- Python: `numpy`, `scipy.optimize`, `matplotlib`

Die Analysis baut aufeinander auf: Folgen $\rightarrow$ Reihen $\rightarrow$ Grenzwerte $\rightarrow$ Differentialrechnung $\rightarrow$ Integralrechnung.