

# Lineare Optimierung

Ueerblick in 5 Minuten

BSc Analysis

2025

**Stellen Sie sich vor: Sie haben begrenzte Ressourcen  
und wollen das Beste daraus machen.**

## Baekerei

- Begrenzt: Mehl, Zeit, Ofen
- Entscheidung: Wie viele Brote und Kuchen backen?
- Ziel: Moeglichst viel Gewinn

## Logistik

- Begrenzt: Lkw-Kapazitaet, Fahrzeit
- Entscheidung: Welche Routen waehlen?
- Ziel: Moeglichst wenig Kosten

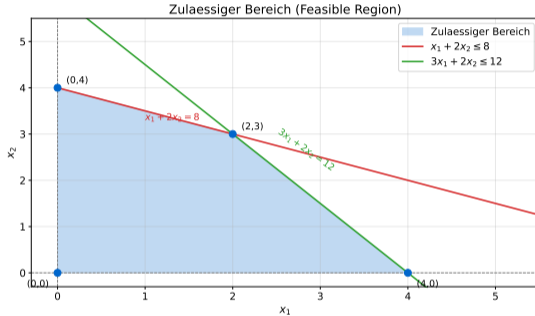
## Budget

- Begrenzt: Geld, Risikobereitschaft
- Entscheidung: Wo investieren?
- Ziel: Moeglichst hohe Rendite

---

LP = Lineare Programmierung – kein Computerprogramm, sondern ein Planungsverfahren

# Zulaessiger Bereich – Wo darf ich mich bewegen?



## Was bedeutet dieser Bereich?

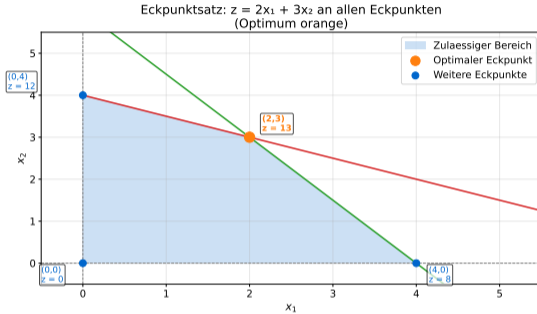
- Jeder **Punkt** im schattierten Bereich ist eine **erlaubte Loesung**
- Die **Grenzen** sind Ihre Einschränkungen (z. B. Materialmenge, Arbeitszeit, Geld)
- Ausserhalb des Bereichs: **nicht erlaubt**

## Alltags-Analogie

Stellen Sie sich eine Landkarte vor – der schattierte Bereich ist das Gebiet, in dem Sie sich bewegen dürfen. Ihr Ziel liegt irgendwo in diesem Gebiet.

Jede Einschränkung schneidet das erlaubte Gebiet ein stueck kleiner

# Wo liegt das Optimum?



**Das Optimum liegt IMMER an einer Ecke!**

Dies ist die wichtigste Erkenntnis der linearen Optimierung.

**Warum an einer Ecke?**

- Die Zielfunktion (z. B. Gewinn) ist ueberall gleichmaessig geneigt
- Man kann immer noch besser werden, indem man entlang einer Grenze wandert
- Erst an einer **Ecke** ist man wirklich "festgeklemmt"

**Konsequenz:** Statt unendlich vieler Punkte muss man nur die **wenigen Ecken** pruefen!

Eine typische Aufgabe hat Dutzende Ecken – immer noch viel besser als Millionen Punkte

# Beispiel: Die Bäckerei

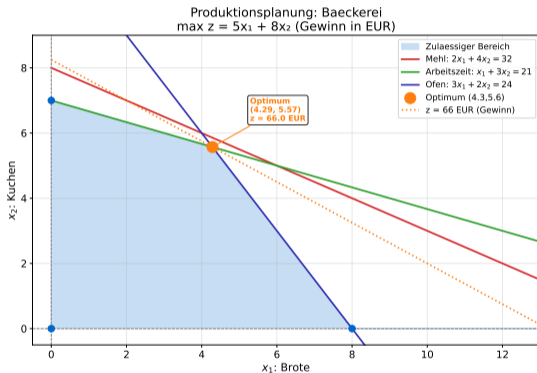
## Die Situation

- Eine Bäckerei stellt **Brote** und **Kuchen** her
- **Brot:** braucht 2 kg Mehl, 1 Stunde Backzeit
- **Kuchen:** braucht 1 kg Mehl, 2 Stunden Backzeit
- Verfügbar: 8 kg Mehl, 8 Stunden Backzeit

## Das Ziel

- Brot bringt 3 EUR Gewinn, Kuchen 5 EUR
- **Frage:** Wie viele Brote und Kuchen backen fuer maximalen Gewinn?

Loesung: 2 Brote und 3 Kuchen – Gewinn 21 EUR (probieren Sie andere Kombinationen!)



# Warum ist das wichtig?

## Logistik und Transport

- Amazon, DHL, FedEx optimieren taeglich Millionen von Lieferwegen
- Einsparung: Stunden, Treibstoff, Kosten

## Finanzplanung und Portfolios

- Banken und Hedgefonds maximieren Rendite bei begrenztem Risiko
- Billionen Euro werden so verwaltet

## Produktionsoptimierung

- Fabriken planen Maschinen, Material und Personal
- Fluggesellschaften koordinieren Routen und Crews

## Die Grossen Zahlen

- **Milliarden-Euro-Entscheidungen** werden taeglich mit LP getroffen!
- Lineare Optimierung ist eines der **meistgenutzten** mathematischen Werkzeuge weltweit

---

George Dantzig erfand das Simplex-Verfahren 1947 – es revolutionierte Wirtschaft und Wissenschaft

## Das Wichtigste in Kuerze

1. **LP = Beste Loesung bei begrenzten Ressourcen**  
Ziel und Einschraenkungen sind linear (gerade Linien)
2. **Zulaessiger Bereich = erlaubte Kombinationen**  
Ein Polygon, das durch die Einschraenkungen geformt wird
3. **Optimum liegt immer an einer Ecke**  
Man muss nur die Ecken des Polygons pruefen
4. **Viele reale Anwendungen**  
Logistik, Finanzen, Produktion, Energie, ...

## Merksatz

**LP optimiert das Beste  
aus begrenzten Mitteln.**

**Das Optimum?**

Immer an einer Ecke.

**Der Trick?**

Systematisch von  
Ecke zu Ecke gehen.

---

Nachster Schritt: Das Simplex-Verfahren – der Algorithmus, der Ecken systematisch durchsucht