

Lineare Optimierung
Kompaktvorlesung (10 Min)

BSc Analysis

2025

Was ist ein LP?

Definition in Worten

Ein **Lineares Programm (LP)** sucht die beste Lösung fuer ein Optimierungsproblem, bei dem

- das **Ziel** (Gewinn, Kosten, ...) linear ist und
- alle **Einschraenkungen** (Ressourcen, Grenzen) ebenfalls linear sind.

Unter Nebenbedingungen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Jede Ungleichung steht fuer eine Einschraenkung (Mehl, Zeit, Budget, ...).

Erste Formel: Maximierung

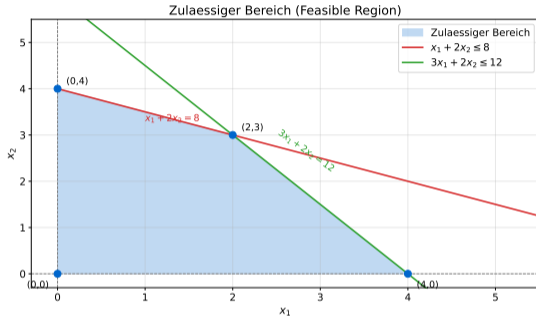
$$\text{maximize } z = c_1x_1 + c_2x_2$$

- x_1, x_2 : Entscheidungsvariablen (z. B. Menge Brot, Menge Kuchen)
- c_1, c_2 : Gewinne pro Einheit
- z : Gesamtgewinn – das wollen wir maximieren

Drei Anwendungsgebiete

- Baeckerei: Produkt-Mix
- Logistik: Transportkosten
- Finanzen: Portfolio

LP-Probleme koennen Tausende von Variablen haben – die Grundidee bleibt dieselbe



Was ist der zulaessige Bereich?

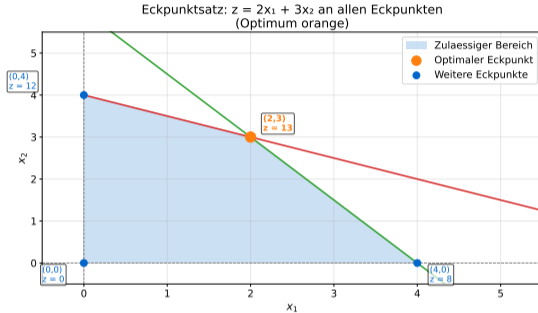
- Jede Nebenbedingung $a_i^T \mathbf{x} \leq b_i$ definiert eine Halbebene
- Der **zulaessige Bereich** ist der Schnitt aller Halbebenen
- Er bildet ein **konvexes Polygon** (oder Polytop in hoeheren Dimensionen)

Aufbau

- **Kanten:** aktive Nebenbedingungen (Grenzen)
- **Ecken:** Schnittpunkte zweier oder mehr Grenzen
- **Inneres:** alle Punkte, die alle Bedingungen erfullen

Schlüssel: Das Optimum liegt an einer **Ecke** dieses Polygons.

Nicht-Negativitaet $x_1, x_2 \geq 0$ begrenzt das Polygon auf den ersten Quadranten



Eckpunktsatz (Fundamental Theorem of LP)

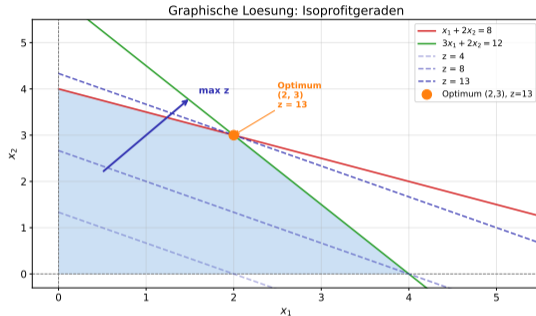
Falls ein lineares Programm ein endliches Optimum hat, dann wird es **immer an (mindestens) einer Ecke** des zulaessigen Bereichs angenommen.

Intuition

- Die Zielfunktion $z = c_1x_1 + c_2x_2$ ist eine **gerade Linie** im Raum
- Diese Linie ist ueberall gleichmaessig geneigt
- Man kann immer noch besser werden, solange man sich entlang einer Kante bewegen kann
- Nur an einer **Ecke** ist man wirklich "blockiert"

Konsequenz: Statt aller Punkte genuegt es, nur die **endlich vielen Ecken** zu pruefen.

Bei n Variablen und m Nebenbedingungen gibt es hoechstens $\binom{m}{n}$ Ecken



Vorgehen in drei Schritten

- 1. Zulaessigen Bereich einzeichnen**
Alle Nebenbedingungen als Geraden, Schnittmenge schattieren
- 2. Isoprofit-Gerade starten**
Zeichne eine Linie $z = c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const.}$
- 3. Gerade parallel verschieben**
Verschiebe die Zielfunktionsgerade in Richtung steigendem z , bis sie gerade noch den zulaessigen Bereich beruehrt

Letzte Beruehrung = Optimum

Der letzte Punkt, an dem die verschobene Gerade den zulaessigen Bereich noch beruehrt, ist die **optimale Ecke**.

Graphische Methode funktioniert nur fuer 2 Variablen – fuer mehr braucht man Simplex

Beispiel: Baeckerei Produktmix

Das LP-Problem

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 8 \quad (\text{Mehl}) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (\text{Zeit}) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

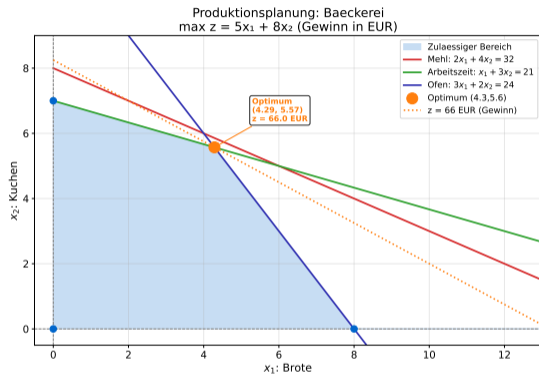
x_1 = Anzahl Brote, x_2 = Anzahl Kuchen

Gewinn: 3 EUR/Brot, 5 EUR/Kuchen

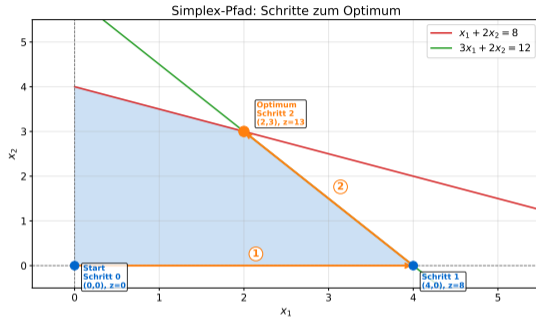
Ecken pruefen

Ecke (x_1, x_2)	$z = 3x_1 + 5x_2$
(0, 0)	0
(4, 0)	12
(2,67, 2,67)	21,35 Max!
(0, 4)	20

Optimale Loesung: ca. 2,67 Brote und 2,67 Kuchen, Gewinn 21,35 EUR



Idee des Simplex-Verfahrens



Geometrische Idee

1. **Starte** an einer beliebigen Ecke des zulaessigen Bereichs (z. B. Ursprung)
2. **Suche** eine benachbarte Ecke mit besserem Zielfunktionswert
3. **Gehe** zur besseren Ecke
4. **Wiederhole**, bis keine Verbesserung mehr moeglich

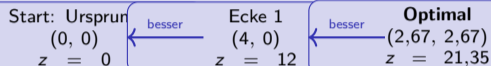
Kernprinzip

“Gehe von Ecke zu Ecke – immer bergauf!”

Effizienz in der Praxis

Obwohl im schlimmsten Fall exponentiell viele Ecken existieren, benoetigt Simplex in der Praxis typischerweise nur wenige Schritte.

Ablauf am Beispiel



Was macht Simplex intern?

- Berechnet an jeder Ecke: "Welche Nachbarecke ist besser?"
- Waehlt die Richtung mit dem **steilsten Anstieg**
- Wechselt genau eine Nebenbedingung von inaktiv zu aktiv

Abbruchkriterium

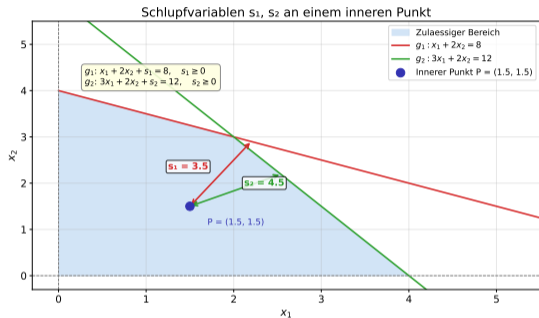
- Kein Nachbar hat einen hoeheren z -Wert
- Alle Richtungen fuehren bergab oder bleiben gleich
- Die aktuelle Ecke ist **optimal**

Typischer Aufwand

Bei m Nebenbedingungen und n Variablen: meist nur $2m$ bis $3m$ Schritte – sehr schnell!

In realen LP-Problemen hat Simplex oft Millionen Variablen und laeuft trotzdem in Sekunden

Schlupfvariablen – Wie viel Luft ist noch?



Intuition: Abstand zur Grenze

Jede Nebenbedingung $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ hat eine gewisse "Reserve" bis zur Grenze. Diese Reserve nennt man **Schlupf**.

Beispiel Mehl: $2x_1 + x_2 \leq 8$

- Verbrauch: $2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6$ kg
- Schlupf: $8 - 6 = 2$ kg Mehl uebrig

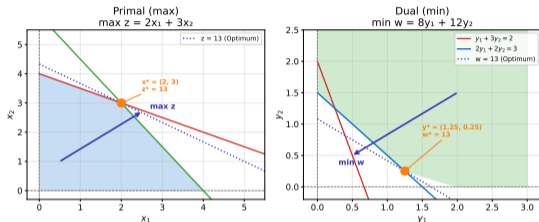
Bedeutung

- **Schlupf = 0:** Ressource vollstaendig ausgeschoept (aktive Grenze)
- **Schlupf > 0:** Ressource nicht vollstaendig genutzt
- An der optimalen Ecke: mehrere Grenzen aktiv (Schlupf = 0)

Schlupfvariablen verwandeln Ungleichungen in Gleichungen: $2x_1 + x_2 + s_1 = 8, s_1 \geq 0$

Was ist Dualitaet?

Dualitaet: $z^* = w^* = 13$ (Starker Dualitaetssatz)



Zwei Seiten derselben Medaille

Jedes LP-Maximierungsproblem (Primal) hat einen **Dual-Partner**: ein Minimierungsproblem.

Primal: maximize $c^T x$ s.t. $Ax \leq b$

Dual: minimize $b^T y$ s.t. $A^T y \geq c$

Intuition: Schattenpreise

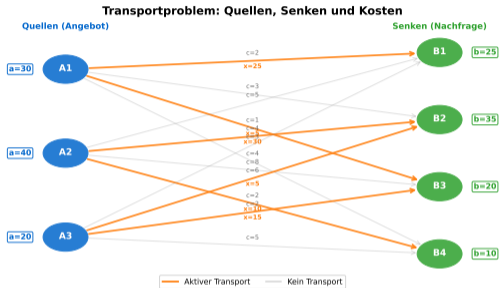
- Die Dual-Variablen y_i sind **Schattenpreise**
- "Wie viel mehr Gewinn erzielen wir, wenn wir eine Einheit mehr Ressource i haetten?"
- Sie bewertet, **wie wertvoll** jede Einschraenkung ist

Starker Dualitaetssatz

Primal- und Dual-Optimum sind **gleich**: $c^T x^* = b^T y^*$

Dualitaet hilft beim Loesen: manchmal ist das Dual-Problem einfacher als das Primal-Problem

Anwendung: Transportproblem



Die Aufgabe

- Mehrere **Lager** (Lieferanten) mit bekannten Vorräteen
- Mehrere **Kunden** mit bekanntem Bedarf
- Unterschiedliche **Transportkosten** zwischen Lagern und Kunden
- **Frage:** Welcher Lieferweg ist am günstigsten?

Als LP formuliert

x_{ij} = Menge von Lager i zu Kunde j

$$\text{minimize } \sum_{i,j} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

- s.t. Liefermenge \leq Vorrat je Lager
- s.t. Liefermenge \geq Bedarf je Kunde

Das Transportproblem ist eine spezielle LP-Struktur – es gibt noch schnellere Algorithmen dafür

Die Aufgabe

- Investor hat **begrenzt**es Budget B
- n Aktien mit erwarteten Renditen r_1, \dots, r_n
- Entscheidung: Wie viel Kapital x_i in Aktie i anlegen?

Erweiterte Constraints

- Maximaler Anteil je Aktie: $x_i \leq p_i \cdot B$
- Mindestanlage in bestimmten Sektoren
- Risikolimits (für quadratische Probleme: QP)

Als LP (vereinfacht)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i=1}^n r_i x_i \\ & \text{s.t.} && \sum_{i=1}^n x_i \leq B \\ & && x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Praxis

- Indexfonds und ETFs nutzen LP zur Replikation
- Banken optimieren tägliche Liquiditätsposition
- Hedgefonds: tausende Variablen, Sekunden Laufzeit

Bei Risiko-Rendite-Abwägung wird aus LP ein quadratisches Programm (QP) – Markowitz-Modell

Das LP-Standardproblem

$$\underset{x}{\text{maximize}} \quad c^T x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b, x \geq 0$$

Fuenf Kernaussagen

1. **LP optimiert lineare Ziele bei linearen Einschränkungen**
Ressourcen, Budgets, Kapazitäten als Ungleichungen
2. **Das Optimum liegt immer an einer Ecke**
(Eckpunktsatz: Fundamental Theorem of LP)
3. **Simplex = systematisch von Ecke zu Ecke**
Immer bergauf, bis kein Nachbar besser ist
4. **Schlupfvariablen zeigen ungenutzte Kapazität**
Aktive Grenzen haben Schlupf = 0
5. **Dualität liefert Schattenpreise**
Wie viel ist jede Ressource wert?

Merksatz Simplex

**Simplex = systematisch
von Ecke zu Ecke**

Anwendungen

- Logistik und Routenplanung
- Portfolio und Finanzen
- Produktions- und Ressourcenplanung
- Energienetze und Supply Chains
- Maschinelles Lernen (LP-Relaxierungen)

Nächste Schritte

- Simplex-Tableau (algebraische Details)
- Dualität und Sensitivitätsanalyse