

Lineare Optimierung

Kernvorlesung

BSc Analysis

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen
- 3 Graphische Loesung
- 4 Simplex-Verfahren
- 5 Dualitaet
- 6 Anwendungen
- 7 Zusammenfassung

Am Ende dieser Lektion koennen Sie:

1. Ein **lineares Programm** in Standardform formulieren und die Bestandteile (Zielfunktion, Nebenbedingungen, Entscheidungsvariablen) benennen.
2. Den **zulaessigen Bereich** geometrisch interpretieren und den **Eckpunktsatz** erklaren.
3. Ein 2D-LP **graphisch loesen** und das Optimum an Eckpunkten bestimmen.
4. Das **Simplex-Verfahren** tabellarisch durchfuehren und die Optimalloesung ablesen.
5. Den **dualen LP** aufstellen und **Schattenpreise** oekonomisch interpretieren.

Lineare Optimierung ist eines der am haeufigsten eingesetzten Verfahren in Wirtschaft, Logistik und Ingenieurwesen.

Definition

Ein **lineares Programm (LP)** besteht aus:

- einer **linearen Zielfunktion**, die maximiert oder minimiert wird,
- **linearen Nebenbedingungen** (Gleichungen oder Ungleichungen),
- **Nichtnegativtaetsbedingungen** fuer die Entscheidungsvariablen.

Allgemeine Form:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{maximize}} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dabei:

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: Entscheidungsvariablen
- $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$: Zielfunktionskoeffizienten
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: Koeffizientenmatrix
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$: rechte Seite

Linearitaet: Zielfunktion und Nebenbedingungen sind linear in den Entscheidungsvariablen – keine Produkte $x_1 x_2$ oder Potenzen x_1^2 .

Beispiel (Baeckerei):

Eine Baeckerei stellt Brot (x_1) und Kuchen (x_2) her.

- Gewinn: $3x_1 + 5x_2$ Euro
- Mehl: $x_1 + 2x_2 \leq 8$ kg
- Arbeitszeit: $3x_1 + 2x_2 \leq 12$ Std.
- $x_1, x_2 \geq 0$

⇒ **Wie viel von jedem Produkt maximiert den Gewinn?**

Standardform (Maximierung)

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{maximize}} \quad z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Unser Baeckerei-Beispiel:

$$\begin{aligned} \underset{x_1, x_2}{\text{maximize}} \quad & z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

In Matrixform:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Umwandlungsregeln:

- Minimierung \rightarrow Maximierung:
minimize $f(\mathbf{x}) = \text{maximize } (-f(\mathbf{x}))$
- \geq -Nebenbedingung: mit (-1) multiplizieren
- Gleichung $= \rightarrow$ zwei Ungleichungen (\leq und \geq)
- Variable ohne Vorzeichen-Beschränkung:
 $x_j = x_j^+ - x_j^-$ mit $x_j^+, x_j^- \geq 0$

Merke: Jedes LP lässt sich in Standardform bringen.

Die Standardform ist Voraussetzung fuer das Simplex-Verfahren – alle Algorithmen erwarten dieses Format.

Definition

Der **zulaessige Bereich** (engl. *feasible region*) ist die Menge aller Punkte x , die *alle* Nebenbedingungen erfullen:

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

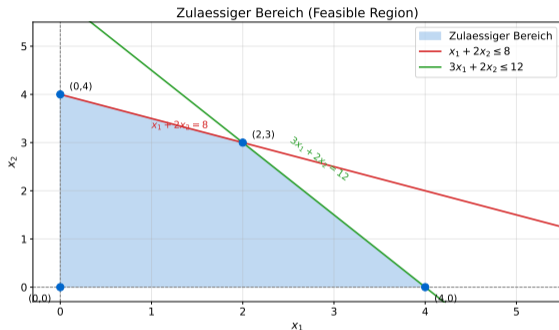
Eigenschaften:

- \mathcal{F} ist ein **konvexes Polyeder**
- Schnittmenge endlich vieler Halbraeume
- Jede Nebenbedingung definiert einen Halbraum
- Die Nichtnegativtaet beschraenkt auf den 1. Quadranten

Unser Beispiel:

- Halbraum 1: $x_1 + 2x_2 \leq 8$
- Halbraum 2: $3x_1 + 2x_2 \leq 12$
- Quadrant: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Konvexitaet ist entscheidend: Jede Verbindungslinie zwischen zwei zulaessigen Punkten liegt komplett im zulaessigen Bereich.



Satz (Eckpunktsatz)

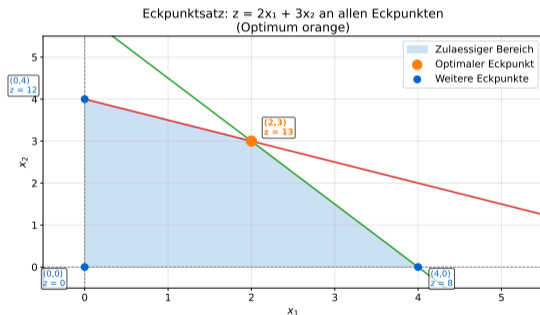
Besitzt ein lineares Programm eine optimale Lösung, so gibt es eine **optimale Lösung an einem Eckpunkt** (Vertex) des zulaessigen Bereichs.

Beweisskizze:

1. Sei \mathbf{x}^* optimal und *kein* Eckpunkt.
2. Dann ist $\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}$ fuer zwei zulaessige Punkte \mathbf{u}, \mathbf{v} und $0 < \lambda < 1$.
3. Da z linear: $z(\mathbf{x}^*) = \lambda z(\mathbf{u}) + (1 - \lambda)z(\mathbf{v})$.
4. Mindestens einer von $z(\mathbf{u}), z(\mathbf{v})$ ist $\geq z(\mathbf{x}^*)$.
5. Durch Wiederholung gelangt man zu einem Eckpunkt.

Konsequenz:

Es genuegt, **endlich viele Eckpunkte** zu pruefen!



Eckpunkte unseres Beispiels:

- $(0, 0)$ – Ursprung

Beispiel: Eckpunkte auswerten

Baeckerei-LP: maximize $z = 3x_1 + 5x_2$ unter den bekannten Nebenbedingungen.

Eckpunkt	x_1	x_2	$z = 3x_1 + 5x_2$
A	0	0	0
B	4	0	12
C	2	3	21
D	0	4	20

Berechnung von $C = (2, 3)$:

$$x_1 + 2x_2 = 8$$

$$3x_1 + 2x_2 = 12$$

Subtraktion: $2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$.

Ergebnis

Optimalloesung: $x_1^* = 2, x_2^* = 3$

Optimaler Gewinn: $z^* = 21$ Euro

\Rightarrow 2 Einheiten Brot, 3 Einheiten Kuchen.

Bei kleinen LPs mit 2 Variablen genuegt es, alle Eckpunkte zu berechnen und die Zielfunktion auszuwerten.

Idee

Eine **Isoprofit-Linie** (Niveaulinie) verbindet alle Punkte mit gleichem Zielfunktionswert:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = k \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1 + 5x_2 = k$$

Vorgehen:

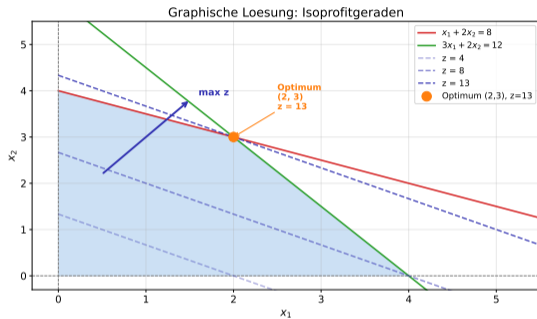
1. Zeichne den zulaessigen Bereich.
2. Zeichne eine Isoprofit-Linie fuer beliebiges k .
3. Verschiebe parallel in Richtung steigender z -Werte.
4. Der **letzte Beruehrpunkt** mit \mathcal{F} ist das Optimum.

Richtung des Gradienten:

$$\nabla z = \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

zeigt in Richtung wachsender z -Werte.

Die graphische Methode funktioniert nur fuer 2 (maximal 3) Variablen – fuer hoehere Dimensionen brauchen wir den Simplex.



Schritt 1: Nebenbedingungen als Geraden zeichnen.

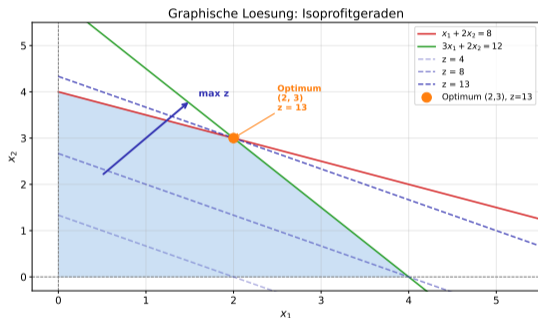
- $x_1 + 2x_2 = 8$: Achsenabschnitte (8, 0) und (0, 4)
- $3x_1 + 2x_2 = 12$: Achsenabschnitte (4, 0) und (0, 6)
- Zulaessig: unterhalb beider Geraden, im 1. Quadranten

Schritt 2: Isoprofit-Linien zeichnen.

- $z = 5$: $3x_1 + 5x_2 = 5$ (nah am Ursprung)
- $z = 15$: $3x_1 + 5x_2 = 15$ (mittendrin)
- $z = 21$: $3x_1 + 5x_2 = 21$ (letzter Kontakt!)

Schritt 3: Optimum ablesen.

- Letzte Isoprofit-Linie beruehrt \mathcal{F} im Punkt (2, 3).
- $z^* = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 21$.



Die parallele Verschiebung der Isoprofit-Linie sichert, dass das globale Optimum gefunden wird – Konvexität garantiert dies.

Verifikation der Loesung $(x_1^*, x_2^*) = (2, 3)$:

1. **Zulaessigkeit pruefen:**

- $x_1 + 2x_2 = 2 + 6 = 8 \leq 8$ ✓
- $3x_1 + 2x_2 = 6 + 6 = 12 \leq 12$ ✓
- $x_1 = 2 \geq 0, x_2 = 3 \geq 0$ ✓

2. **Optimalitaet:** Beide Nebenbedingungen sind **aktiv** (Gleichheit) \Rightarrow Schnittpunkt zweier Begrenzungsgeraden.

3. **Zielfunktionswert:** $z^* = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 21$.

Beobachtung

Am Optimum sind beide Ressourcen **vollstaendig ausgeschoept**: Mehl und Arbeitszeit sind knapp (binding constraints).

Oekonomische Deutung:

- 2 Einheiten Brot
- 3 Einheiten Kuchen
- Gesamtgewinn: 21 Euro
- Kein Mehl uebrig (Schlupf = 0)
- Keine Arbeitszeit uebrig (Schlupf = 0)

Frage: Was passiert, wenn wir 1 kg mehr Mehl haetten? \rightarrow Schattenpreis (Dualitaet)

Aktive Nebenbedingungen (binding constraints) zeigen, welche Ressourcen den Gewinn limitieren – das fuehrt zur Dualitaet.

Unbeschraenktes LP

Der Zielfunktionswert kann beliebig gross werden.
⇒ Es gibt **keine** endliche Optimalloesung.

Beispiel: maximize x_1 mit $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.
Kein oberer Halbraum begrenzt $x_1 - z \rightarrow \infty$.

Unzulaessiges LP

Die Nebenbedingungen widersprechen sich.
⇒ $\mathcal{F} = \emptyset$, keine Loesung existiert.

Beispiel: $x_1 \leq 2$ und $x_1 \geq 5$ gleichzeitig.

Mehrdeutige Loesung

Unendlich viele Optima entlang einer Kante.
⇒ Die Isoprofit-Linie ist **parallel** zu einer aktiven Nebenbedingung.

Beispiel: maximize $x_1 + 2x_2$ mit NB $x_1 + 2x_2 \leq 8$.
Jeder Punkt auf der Kante ist optimal mit $z = 8$.

Degeneriertes LP

Ein Eckpunkt liegt im Schnitt von **mehr als n** aktiven Nebenbedingungen.
⇒ Kann zu Zyklen im Simplex fuehren (selten in der Praxis).

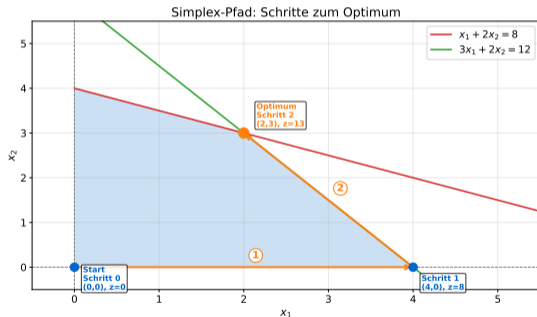
In der Praxis sind unbeschraenkte und unzulaessige LPs meist Zeichen eines Modellierungsfehlers – die Nebenbedingungen pruefen!

Idee

Der Simplex-Algorithmus startet an einem Eckpunkt und wandert entlang der Kanten des Polyeders zu benachbarten Eckpunkten mit **hoeheren** Zielfunktionswerten, bis das Optimum erreicht ist.

Algorithmus (Ueberblick):

1. Waehle einen zulaessigen Eckpunkt (Startloesung).
2. Teste: Ist der aktuelle Eckpunkt optimal?
3. Falls nein: Waehle eine **verbessernde Richtung** (Pivotspalte).
4. Bestimme, wie weit man gehen kann (Pivotzeile).
5. Fuehre den Basiswechsel durch (Pivotschritt).
6. Wiederhole ab Schritt 2.



Warum funktioniert es?

- Endlich viele Eckpunkte \Rightarrow Terminierung

Umwandlung: Ungleichung \rightarrow Gleichung

Fuer jede Nebenbedingung \leq fuehren wir eine **Schlupfvariable** $s_i \geq 0$ ein:

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \implies \mathbf{Ax} + \mathbf{s} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$$

Unser Beispiel:

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 8$$

$$3x_1 + 2x_2 + s_2 = 12$$

($s_1 \geq 0$: ueberschuessiges Mehl)

($s_2 \geq 0$: ueberschuessige Arbeitszeit)

Startloesung (Basis = Schlupfvariablen):

- Setze $x_1 = 0, x_2 = 0$ (Nichtbasisvariablen)
- Dann: $s_1 = 8, s_2 = 12$ (Basisvariablen)
- Zielfunktion: $z = 0$
- Das ist der Ursprung $(0, 0)$.

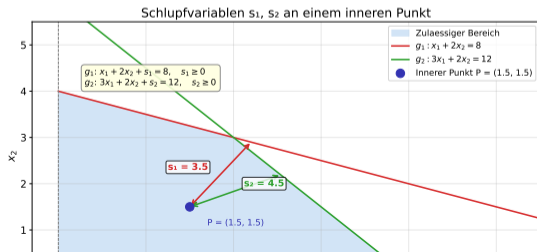


Tableau-Form

Das Simplex-Tableau organisiert die Koeffizienten des Gleichungssystems:

Ausgangstableau unseres Beispiels:

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
s_1	1	2	1	0	8
s_2	3	2	0	1	12
z	-3	-5	0	0	0

Leseweise:

- Zeilen: Nebenbedingungen (Gleichungen)
- Letzte Zeile: Zielfunktion (z-Zeile)
- RHS: rechte Seite
- Basis: aktuell in der Basisloesung

Aktuelle Basisloesung:

- $s_1 = 8$, $s_2 = 12$ (Basisvariablen)
- $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ (Nichtbasis)
- $z = 0$

Die z-Zeile enthaelt die negativen Zielfunktionskoeffizienten: $z - 3x_1 - 5x_2 = 0$.

Schritt 1: Pivotspalte (eintretende Variable)

- Waehle die Spalte mit dem **negativsten** Eintrag in der z-Zeile.
- Hier: x_2 hat -5 (negativster Wert).
- Interpretation: x_2 verbessert z am staerksten pro Einheit.

Schritt 2: Pivotzeile (austretende Variable)

- Berechne die **Quotienten** $\frac{\text{RHS}}{\text{Pivotspalte}}$ fuer positive Eintraege:
 - Zeile s_1 : $\frac{8}{2} = 4$
 - Zeile s_2 : $\frac{12}{2} = 6$
- Waehle die Zeile mit dem **kleinsten positiven** Quotienten: s_1 ($= 4$).
- s_1 verlaesst die Basis, x_2 tritt ein.

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	Quotient
s_1	1	2	1	0	8	$8/2 = 4$
s_2	3	2	0	1	12	$12/2 = 6$
z	-3	-5	0	0	0	

Pivotelement

Schnittpunkt von Pivotspalte und Pivotzeile: 2 (orange markiert).

Die Quotientenregel (Minimum-Ratio-Test) stellt sicher, dass die neue Basisloesung zulaessig bleibt ($\text{RHS} \geq 0$).

Pivotschritt durchfuehren

Ziel: Pivotelement auf 1 bringen, Rest der Pivotspalte auf 0 (Gauss-Elimination).

Rechenregeln:

1. **Pivotzeile** durch Pivotelement dividieren: $\text{Zeile}'_1 = \frac{1}{2} \text{Zeile}_1$.
2. Alle **anderen Zeilen**: Vielfaches der neuen Pivotzeile subtrahieren.

Berechnung:

- Neue Zeile 1: $\frac{1}{2}(1, 2, 1, 0 \mid 8)$
 $= (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0 \mid 4)$
- Neue Zeile 2: $\text{Zeile}_2 - 2 \cdot \text{Zeile}'_1$
 $= (3, 2, 0, 1 \mid 12) - 2 \cdot (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0 \mid 4)$
 $= (2, 0, -1, 1 \mid 4)$
- Neue z-Zeile: $\text{Zeile}_z + 5 \cdot \text{Zeile}'_1$
 $= (-3, -5, 0, 0 \mid 0) + 5 \cdot (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0 \mid 4)$
 $= (-\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0 \mid 20)$

Neues Tableau nach Pivot:

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	4
s_2	2	0	-1	1	4
z	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	20

Neue Basisloesung:

$$x_2 = 4, \quad s_2 = 4, \quad x_1 = 0, \quad s_1 = 0$$
$$z = 20$$

Der Pivotschritt ist nichts anderes als ein Schritt der Gauss-Elimination – die Variable x_2 ersetzt s_1 in der Basis.

Ist die aktuelle Loesung optimal?

- In der z-Zeile steht noch $-\frac{1}{2}$ bei $x_1 \Rightarrow$ **nicht optimal** (negative Eintraege vorhanden).
- x_1 tritt in die Basis ein (einziger negativer Eintrag).

Quotientenregel:

- Zeile x_2 : $\frac{4}{1/2} = 8$
- Zeile s_2 : $\frac{4}{2} = 2 \leftarrow$ **Minimum**

\Rightarrow Pivotzeile: s_2 , Pivotelement: 2.

Pivotschritt:

- Neue Zeile 2: $\frac{1}{2}(2, 0, -1, 1 \mid 4) = (1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid 2)$
- Neue Zeile 1: $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0 \mid 4) - \frac{1}{2} \cdot (1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid 2)$
 $= (0, 1, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4} \mid 3)$
- Neue z-Zeile: $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0 \mid 20) + \frac{1}{2} \cdot (1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid 2)$
 $= (0, 0, \frac{9}{4}, \frac{1}{4} \mid 21)$

Endergebnis-Tableau:

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_2	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	3
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
z	0	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$	21

Basisloesung:

$$x_1^* = 2, x_2^* = 3$$
$$z^* = \mathbf{21}$$

Optimalitaetstest: Alle Eintraege in der z-Zeile ≥ 0 ✓
 \Rightarrow **Optimum erreicht!**

Zwei Pivotschritte genuegen: $(0, 0) \rightarrow (0, 4) \rightarrow (2, 3)$ – der Simplex hat zwei Ecken besucht, bevor das Optimum gefunden wurde.

Kriterium

Die aktuelle Basisloesung ist **optimal**, wenn alle Eintraege in der z-Zeile (ausser RHS) ≥ 0 sind:

$$\bar{c}_j \geq 0 \quad \text{fuer alle } j$$

Dabei sind \bar{c}_j die **reduzierten Kosten** der Nichtbasisvariablen.

Interpretation der reduzierten Kosten:

- $\bar{c}_j < 0$: Erhoehung von x_j **verbessert** z.
⇒ Noch nicht optimal.
- $\bar{c}_j > 0$: Erhoehung von x_j **verschlechtert** z.
⇒ Variable bleibt bei 0.
- $\bar{c}_j = 0$: Erhoehung von x_j aendert z **nicht**.
⇒ Alternative Optimalloesung moeglich.

Unser Endtableau:

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_2	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	3
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
z	0	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$	21

Alle $\bar{c}_j \geq 0$ ✓ ⇒ **optimal!**

Die reduzierten Kosten der Schlupfvariablen im Optimaltableau sind die Schattenpreise – dazu mehr bei der Dualitaet.

Vollstaendiges Beispiel: Ausgangstableau

Neues Beispiel: maximize $z = 4x_1 + 3x_2$ unter:

$$2x_1 + x_2 \leq 10, \quad x_1 + x_2 \leq 8, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Mit Schlupfvariablen:

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 10$$

$$x_1 + x_2 + s_2 = 8$$

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	Quotient
s_1	2	1	1	0	10	$10/2 = 5 \leftarrow$
s_2	1	1	0	1	8	$8/1 = 8$
z	-4	-3	0	0	0	

Pivotspalte: x_1 (negativster Eintrag: -4). **Pivotzeile:** s_1 (Quotient $5 < 8$).

Startwerte: $s_1 = 10, s_2 = 8, x_1 = x_2 = 0, z = 0$ – wir starten am Ursprung.

Vollstaendiges Beispiel: Nach erstem Pivot

Pivotschritt: Pivotelement = 2.

- Neue Zeile 1: $\frac{1}{2}(2, 1, 1, 0 \mid 10) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \mid 5)$
- Neue Zeile 2: $(1, 1, 0, 1 \mid 8) - 1 \cdot (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \mid 5) = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \mid 3)$
- Neue z-Zeile: $(-4, -3, 0, 0 \mid 0) + 4 \cdot (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \mid 5) = (0, -1, 2, 0 \mid 20)$

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	Quotient
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	5	$5/(1/2) = 10$
s_2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3	$3/(1/2) = 6 \leftarrow$
z	0	-1	2	0	20	

Basisloesung: $x_1 = 5, s_2 = 3, x_2 = 0, s_1 = 0, z = 20$. Noch -1 in z-Zeile \Rightarrow nicht optimal.

Naechster Pivot: x_2 tritt ein (Spalte mit -1), s_2 tritt aus (Quotient $6 < 10$).

Jeder Pivotschritt bewegt die Loesung zu einem benachbarten Eckpunkt: $(0, 0) \rightarrow (5, 0)$.

Zweiter Pivotschritt: Pivotelement = $\frac{1}{2}$.

- Neue Zeile 2: $2 \cdot (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \mid 3) = (0, 1, -1, 2 \mid 6)$
- Neue Zeile 1: $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \mid 5) - \frac{1}{2} \cdot (0, 1, -1, 2 \mid 6) = (1, 0, 1, -1 \mid 2)$
- Neue z-Zeile: $(0, -1, 2, 0 \mid 20) + 1 \cdot (0, 1, -1, 2 \mid 6) = (0, 0, 1, 2 \mid 26)$

Basis	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_1	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	-1	2	6
z	0	0	1	2	26

Optimalloesung

$x_1^* = 2$, $x_2^* = 6$, $z^* = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 26$.

Alle $\bar{c}_j \geq 0$ ✓ \Rightarrow Optimum erreicht!

Pfad des Simplex: $(0, 0) \xrightarrow{z=0} (5, 0) \xrightarrow{z=20} (2, 6) \xrightarrow{z=26}$ optimal.

Verifikation: $2 \cdot 2 + 6 = 10 \leq 10$ ✓ und $2 + 6 = 8 \leq 8$ ✓ – beide Nebenbedingungen aktiv.

Konstruktionsregeln

Zu jedem **primalem LP** (Maximierung) gehoert ein **duales LP** (Minimierung):

Primales LP:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{maximize}} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{s.t.} && \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

n Variablen, m Nebenbedingungen

Duales LP:

$$\begin{aligned} & \underset{y}{\text{minimize}} && \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ & \text{s.t.} && \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ & && \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

m Variablen, n Nebenbedingungen

Merkregel:

- Primale NB-Koeffizienten \mathbf{A} \rightarrow duale NB-Koeffizienten \mathbf{A}^T
- Primale Zielfunktion \mathbf{c} \rightarrow duale rechte Seite \mathbf{c}
- Primale rechte Seite \mathbf{b} \rightarrow duale Zielfunktion \mathbf{b}
- maximize \leftrightarrow minimize, $\leq \leftrightarrow \geq$

Das Dual des Duals ist wieder das Primal – die Beziehung ist symmetrisch.

Satz (Schwache Dualitaet)

Sei x zulaessig fuer das primale LP und y zulaessig fuer das duale LP. Dann gilt:

$$c^T x \leq b^T y$$

Der primale Zielfunktionswert ist stets \leq dem dualen Zielfunktionswert.

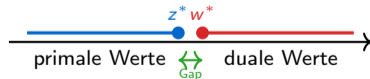
Beweisskizze:

$$c^T x \leq (A^T y)^T x = y^T A x \leq y^T b = b^T y$$

1. Erste \leq : duale NB $A^T y \geq c$, $x \geq 0$
2. Zweite \leq : primale NB $Ax \leq b$, $y \geq 0$

Konsequenzen:

- Jede duale zulaessige Loesung liefert eine **obere Schranke** fuer das primale Optimum.
- Jede primale zulaessige Loesung liefert eine **untere Schranke** fuer das duale Optimum.
- Falls $c^T x^* = b^T y^*$, dann sind **beide** optimal.



Der starke Dualitaetssatz zeigt: Im Optimum ist der Gap = 0, d. h. $z^* = w^*$ (bei Zulaessigkeit beider Probleme).

Definition

Der **Schattenpreis** (engl. *shadow price*) der i -ten Nebenbedingung ist die optimale duale Variable y_i^* . Er gibt an, um wie viel sich z^* aendert, wenn die rechte Seite b_i um eine Einheit erhoehrt wird.

Baekerei-Beispiel:

Optimaltableau liefert z -Zeile:

$$(0, 0, \frac{9}{4}, \frac{1}{4} \mid 21)$$

- $y_1^* = \frac{9}{4}$ (Schattenpreis Mehl):
1 kg mehr Mehl \Rightarrow Gewinn steigt um 2.25 Euro.
- $y_2^* = \frac{1}{4}$ (Schattenpreis Arbeitszeit):
1 Std. mehr \Rightarrow Gewinn steigt um 0.25 Euro.

Folgerung:

Mehl ist die **wertvollere** Ressource! Investitionen in mehr Mehl lohnen sich mehr als in mehr Arbeitszeit.

Allgemein:

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = y_i^*$$

(gilt in einer Umgebung des aktuellen \mathbf{b})

Ablesen aus dem Optimaltableau

Die Schattenpreise stehen in der z -Zeile unter den **Schlupfvariablen**:

$$\bar{c}_{s_i} = y_i^*$$

Nichtaktive NB:

Schlupf $s_i > 0 \Rightarrow y_i^* = 0$.

Mehr Ressource bringt nichts, da sie ohnehin nicht knapp

Schattenpreise sind nur in einem gewissen Bereich gueltig (RHS-Ranging) – groessere Aenderungen erfordern eine Neuberechnung.

Primales LP (Baeckerei):

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Optimalloesung:

$$x_1^* = 2, x_2^* = 3, z^* = 21.$$

Duales LP:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & w = 8y_1 + 12y_2 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ & 2y_1 + 2y_2 \geq 5 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Optimalloesung:

$$y_1^* = \frac{9}{4}, y_2^* = \frac{1}{4}, w^* = 21.$$

Verifikation: Starke Dualitaet

$$z^* = 21 = w^* \quad \checkmark \quad \text{Die Optimalwerte stimmen ueberein!}$$

Duale Deutung: y_1, y_2 sind die Preise fuer Mehl bzw. Arbeitszeit. Das duale LP fragt: Was ist der **minimale Gesamtwert** der Ressourcen, sodass kein Produkt profitabler waere als sein Ressourcenverbrauch?

Primal = Produzent (maximiert Gewinn). Dual = Ressourcenbewerter (minimiert Ressourcenkosten bei fairem Preis).

Szenario

Eine Fabrik produziert zwei Produkte P_1 und P_2 mit drei Maschinen.

	Maschine A (Std/Stueck)	Maschine B (Std/Stueck)	Maschine C (Std/Stueck)
Produkt P_1	1	3	1
Produkt P_2	2	2	0
Kapazitaet	8 Std	18 Std	5 Std
Gewinn/Stueck	P_1 : 4 Euro, P_2 : 5 Euro		

LP-Formulierung:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & z = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Erweiterungspotenzial:

- Mehr Produkte: $n > 2$ Variablen
- Nachfragegrenzen: $x_j \leq d_j$
- Mindestmengen: $x_j \geq l_j$
- Mehrere Perioden (dynamisch)

Produktionsplanung ist die klassischste LP-Anwendung – das gleiche Grundmodell skaliert auf Hunderte von Produkten und Maschinen.

Problem

m Lagerhaeuser mit Angebot a_i beliefern n Kunden mit Nachfrage d_j . Transportkosten: c_{ij} pro Einheit. Minimiere die Gesamtkosten.

LP-Formulierung:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad \forall i \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j \quad \forall j \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \end{aligned}$$

x_{ij} : transportierte Menge von Lager i zu Kunde j .

Das Transportproblem ist ein Spezialfall des LP – die Netzwerkstruktur erlaubt besonders effiziente Loesungsverfahren.

Beispiel (2 Lager, 3 Kunden):

	K_1	K_2	K_3	Angebot
L_1	2	3	1	20
L_2	5	4	8	30
Nachfr.	10	15	15	

Besonderheiten:

- Spezialstruktur: Loesbar mit Transportalgorithmus (effizienter als Standard-Simplex)
- Ganzzahlige Loesung automatisch, wenn $a_i, d_j \in \mathbb{Z}$

Vereinfachtes Modell

Ein Investor verteilt Kapital auf n Anlagen. Ziel: Maximiere die erwartete Rendite unter Risikobeschränkungen.

LP-Formulierung:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \sum_{j=1}^n r_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_j = 1 \quad (\text{Budgetrest.}) \\ & x_j \leq u_j \quad \forall j \quad (\text{Diversifikation}) \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \end{aligned}$$

- x_j : Anteil im Asset j
- r_j : erwartete Rendite
- u_j : maximaler Anteil (z. B. 30%)

Beispiel:

Asset	r_j	u_j
Aktien	8%	0.40
Anleihen	3%	0.50
Immobilien	5%	0.30

Hinweis: Das klassische Markowitz-Modell verwendet eine **quadratische** Zielfunktion (Varianzminimierung) – das ist dann ein *QP*, kein LP. Hier betrachten wir die lineare Vereinfachung.

LP-Portfoliomodelle eignen sich fuer Szenarien mit linearen Risikomassen (z. B. CVaR, MAD) statt Varianz.

Baekerei-Beispiel in Python:

Code

```
from scipy.optimize import linprog

# Zielfunktion (linprog minimiert!)
c = [-3, -5] # negativ fuer max

# Nebenbedingungen: A_ub @ x <= b_ub
A_ub = [[1, 2],
        [3, 2]]
b_ub = [8, 12]

# Variablen Grenzen
x1_bounds = (0, None)
x2_bounds = (0, None)

res = linprog(c, A_ub=A_ub, b_ub=b_ub,
             bounds=[x1_bounds, x2_bounds],
             method='highs')

print(f"x* = {res.x}")
```

Ausgabe

```
x* = [2. 3.]
z* = 21.0
```

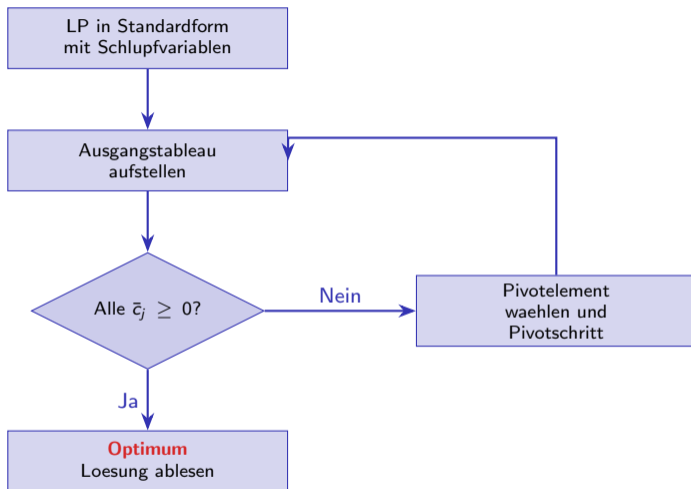
Wichtige Punkte:

- linprog **minimiert** \Rightarrow fuer Maximierung **c** negieren.
- method='highs': moderner Solver (Simplex + Interior Point).
- res.fun: Optimalwert (negiert).
- res.x: Optimalvektor.
- res.slack: Schlupfwerte.

Fuer grosse LPs:

PuLP, Gurobi, CPLEX bieten mehr Kontrolle und Performance.

Simplex-Algorithmus: Flussdiagramm



Komplexitaet: Im Worst Case exponentiell (Klee-Minty), in der Praxis typisch $O(m)$ bis $O(m^2)$ Pivotschritte bei m Nebenbedingungen.

Fuer polynomiale Worst-Case-Garantie: Innere-Punkte-Methoden (Karmarkar, 1984) – in der Praxis oft aehnlich schnell wie Simplex.

Standardform:

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{s.t. } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Schlupfvariablen:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{s} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$$

Pivotspalte: Spalte j mit kleinstem $\bar{c}_j < 0$.

Pivotzeile: Zeile i mit kleinstem Quotienten

$$\frac{b_i}{a_{ij}} \quad (a_{ij} > 0)$$

Optimalitaet: $\bar{c}_j \geq 0$ fuer alle j .

Dualitaet:

$$\text{Primal: maximize } \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\text{Dual: minimize } \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

Schwache Dualitaet:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

Starke Dualitaet:

$$z^* = w^* \quad (\text{bei Zulaessigkeit})$$

Schattenpreis:

$$y_i^* = \frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \bar{c}_{s_i}$$

Diese Formeln bilden das Grundgeruest der linearen Optimierung – beherrschen Sie sie fuer Klausur und Praxis.

Weiterfuehrende Themen:

- **Sensitivitaetsanalyse:** Wie aendert sich die Loesung bei Parameteraenderungen?
- **Big-M-Methode / Zweiphasen-Methode:** Was wenn der Ursprung nicht zulaessig ist?
- **Ganzzahlige Optimierung:** Variablen muessen ganzzahlig sein (Branch-and-Bound).
- **Innere-Punkte-Methoden:** Alternative zum Simplex mit polynomialer Laufzeit.
- **Nichtlineare Optimierung:** Quadratische Programme, konvexe Optimierung.

Literatur:

- **Bertsimas & Tsitsiklis:** *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, 1997.
- **Chvatal:** *Linear Programming*, W. H. Freeman, 1983.
- **Dantzig & Thapa:** *Linear Programming*, Springer, 1997/2003.
- **Vanderbei:** *Linear Programming – Foundations and Extensions*, 5th ed., Springer, 2020.

Software:

- Python: `scipy.optimize.linprog`, PuLP
- Kommerziell: Gurobi, CPLEX, MOSEK
- Open Source: GLPK, HiGHS, CBC

Lineare Optimierung ist das Fundament fuer viele weitergehende Methoden – von Machine Learning bis Supply-Chain-Management.