Komplexe Zahlen – Quiz

Lektion 03 – Selbsttest

BSc Analysis

Frage 1

Was ist die imaginaere Einheit i?

A. Eine reelle Zahl mit $\mathrm{i} = -1$
B. Eine Zahl mit der Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$
C. Die Quadratwurzel von 1
D. Eine natuerliche Zahl

Frage 1

Was ist die imaginaere Einheit i?

A. Eine reelle Zahl mit $\mathrm{i} = -1$

B. Eine Zahl mit der Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$

C. Die Quadratwurzel von 1

D. Eine natuerliche Zahl

Antwort: B

Die imaginaere Einheit i ist definiert durch $\mathrm{i}^2 = -1$. Sie erweitert die reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Frage 2

Welche Menge beschreibt $\mathbb{C}$?

A. $\{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
B. $\{a + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
C. $\{a \cdot b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$
D. $\{a\mathrm{i} \mid a \in \mathbb{R}\}$

Frage 2

Welche Menge beschreibt $\mathbb{C}$?

A. $\{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

B. $\{a + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

C. $\{a \cdot b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$

D. $\{a\mathrm{i} \mid a \in \mathbb{R}\}$

Antwort: A

Die Menge der komplexen Zahlen ist $\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Jede komplexe Zahl hat einen Realteil a und einen Imaginaerteil b.

Frage 3

Was ist i^4?

A. -1

B. i

C. $-\mathrm{i}$

D. 1

Frage 3

Was ist i^4?

A. -1

B. i

C. $-\mathrm{i}$

D. 1

Antwort: D

Es gilt $\mathrm{i}^2 = -1$, also $\mathrm{i}^4 = (\mathrm{i}^2)^2 = (-1)^2 = 1$. Die Potenzen von i wiederholen sich mit Periode 4.

Frage 4

Was ist der Realteil von $z = 3 - 7\mathrm{i}$?

A. -7
B. 7
C. 3
D. -3

Frage 4

Was ist der Realteil von $z = 3 - 7\mathrm{i}$?

A. -7

B. 7

C. 3

D. -3

Antwort: C

Fuer $z = a + b\mathrm{i}$ ist $\mathrm{Re}(z) = a$. Hier ist $a = 3$, also $\mathrm{Re}(z) = 3$.

Frage 5

Was ist der Imaginaerteil von $z = -2 + 5\mathrm{i}$?

A. $5\mathrm{i}$

B. -2

C. 5

D. -5

Frage 5

Was ist der Imaginaerteil von $z = -2 + 5\mathrm{i}$?

A. $5\mathrm{i}$

B. -2

C. 5

D. -5

Antwort: C

Der Imaginaerteil ist der reelle Koeffizient vor i: $\mathrm{Im}(z) = 5$. Achtung: $\mathrm{Im}(z)$ ist eine reelle Zahl, nicht 5i.

Frage 6

Welche komplexe Zahl hat $\mathrm{Re}(z) = 0$ **und** $\mathrm{Im}(z) = -4$**?**

A. $z = -4$
B. $z = 4\mathrm{i}$
C. $z = -4\mathrm{i}$
D. $z = -4 + \mathrm{i}$

Frage 6

Welche komplexe Zahl hat $\mathrm{Re}(z) = 0$ **und** $\mathrm{Im}(z) = -4$**?**

A. $z = -4$
B. $z = 4\mathrm{i}$
C. $z = -4\mathrm{i}$
D. $z = -4 + \mathrm{i}$

Antwort: C
$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \cdot \mathrm{i} = 0 + (-4)\mathrm{i} = -4\mathrm{i}$. Eine Zahl mit $\mathrm{Re}(z) = 0$ heisst rein imaginaer.

Frage 7

Was ist $(3 + 2\mathrm{i}) + (1 - 5\mathrm{i})$?

A. $4 - 3\mathrm{i}$

B. $4 + 7\mathrm{i}$

C. $2 + 7\mathrm{i}$

D. $2 - 3\mathrm{i}$

Frage 7

Was ist $(3 + 2\mathrm{i}) + (1 - 5\mathrm{i})$?

A. $4 - 3\mathrm{i}$

B. $4 + 7\mathrm{i}$

C. $2 + 7\mathrm{i}$

D. $2 - 3\mathrm{i}$

Antwort: A

Addition erfolgt komponentenweise: $(3 + 1) + (2 + (-5))\mathrm{i} = 4 - 3\mathrm{i}$.

Frage 8

Was ist $(5 + 3\mathrm{i}) - (2 + 7\mathrm{i})$?

A. $3 + 10\mathrm{i}$

B. $7 - 4\mathrm{i}$

C. $3 - 4\mathrm{i}$

D. $-3 + 4\mathrm{i}$

Frage 8

Was ist $(5+3\mathrm{i})-(2+7\mathrm{i})$?

A. $3+10\mathrm{i}$

B. $7-4\mathrm{i}$

C. $3-4\mathrm{i}$

D. $-3+4\mathrm{i}$

Antwort: C

Subtraktion erfolgt komponentenweise: $(5-2)+(3-7)\mathrm{i}=3-4\mathrm{i}$.

Frage 9

Was ist $2 \cdot (1 + 3\mathrm{i}) - (4 - \mathrm{i})$?

A. $-2 + 5\mathrm{i}$

B. $-2 + 7\mathrm{i}$

C. $6 + 5\mathrm{i}$

D. $6 + 7\mathrm{i}$

Frage 9

Was ist $2 \cdot (1 + 3\mathrm{i}) - (4 - \mathrm{i})$?

A. $-2 + 5\mathrm{i}$

B. $-2 + 7\mathrm{i}$

C. $6 + 5\mathrm{i}$

D. $6 + 7\mathrm{i}$

Antwort: B

Zuerst Skalarmultiplikation: $2(1 + 3\mathrm{i}) = 2 + 6\mathrm{i}$. Dann Subtraktion: $(2 + 6\mathrm{i}) - (4 - \mathrm{i}) = -2 + 7\mathrm{i}$.

Frage 10

Was ist $(2+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$?

A. 5

B. $7+\mathrm{i}$

C. $5+\mathrm{i}$

D. $7-\mathrm{i}$

Frage 10

Was ist $(2+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$?

A. 5

B. $7+\mathrm{i}$

C. $5+\mathrm{i}$

D. $7-\mathrm{i}$

Antwort: B

Ausmultiplizieren: $2\cdot 3+2\cdot(-\mathrm{i})+\mathrm{i}\cdot 3+\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})=6-2\mathrm{i}+3\mathrm{i}-\mathrm{i}^2=6+\mathrm{i}+1=7+\mathrm{i}$.

Frage 11

Was ist $(1 + \mathrm{i})^2$?

A. 2

B. $2\mathrm{i}$

C. $1 + 2\mathrm{i}$

D. $-2\mathrm{i}$

Frage 11

Was ist $(1+\mathrm{i})^2$?

A. 2
B. $2\mathrm{i}$
C. $1+2\mathrm{i}$
D. $-2\mathrm{i}$

Antwort: B
$(1+\mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 1 = 2\mathrm{i}$.

Frage 12

Was ist $(3 + 4\mathrm{i})(3 - 4\mathrm{i})$?

A. 25

B. -7

C. $9 - 16\mathrm{i}$

D. $7 + 24\mathrm{i}$

Frage 12

Was ist $(3 + 4\mathrm{i})(3 - 4\mathrm{i})$?

A. 25

B. -7

C. $9 - 16\mathrm{i}$

D. $7 + 24\mathrm{i}$

Antwort: A

Das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer Konjugierten ergibt $(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2$. Hier: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.

Frage 13

Was ist die komplex Konjugierte von $z = 4 - 3\mathrm{i}$?

A. $-4 + 3\mathrm{i}$

B. $4 + 3\mathrm{i}$

C. $-4 - 3\mathrm{i}$

D. $3 - 4\mathrm{i}$

Frage 13

Was ist die komplex Konjugierte von $z = 4 - 3\mathrm{i}$?

A. $-4 + 3\mathrm{i}$

B. $4 + 3\mathrm{i}$

C. $-4 - 3\mathrm{i}$

D. $3 - 4\mathrm{i}$

Antwort: B

Die Konjugierte $\overline{z}$ entsteht durch Vorzeichenwechsel des Imaginaerteils: $\overline{4 - 3\mathrm{i}} = 4 + 3\mathrm{i}$.

Frage 14

Was ist $z + \overline{z}$ fuer $z = 2 + 5\mathrm{i}$?

A. $10\mathrm{i}$

B. 0

C. 4

D. $4 + 10\mathrm{i}$

Frage 14

Was ist $z + \overline{z}$ fuer $z = 2 + 5\mathrm{i}$?

A. $10\mathrm{i}$

B. 0

C. 4

D. $4 + 10\mathrm{i}$

Antwort: C

$z + \overline{z} = (2 + 5\mathrm{i}) + (2 - 5\mathrm{i}) = 4$. Allgemein gilt $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$.

Frage 15

Was ist der Betrag von $z = 3 + 4\mathrm{i}$?

A. 7
B. $\sqrt{7}$
C. 25
D. 5

Frage 15

Was ist der Betrag von $z = 3 + 4\mathrm{i}$?

A. 7

B. $\sqrt{7}$

C. 25

D. 5

Antwort: D

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

Frage 16

Was ist $|1 - \mathrm{i}|$?

A. 0

B. 1

C. 2

D. $\sqrt{2}$

Frage 16

Was ist $|1 - \mathrm{i}|$?

A. 0
B. 1
C. 2
D. $\sqrt{2}$

Antwort: D
$|1 - \mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.

Frage 17

Was ist $\frac{1}{\mathrm{i}}$?

A. i

B. $-\mathrm{i}$

C. 1

D. -1

Frage 17

Was ist $\dfrac{1}{\mathrm{i}}$?

A. i

B. $-\mathrm{i}$

C. 1

D. -1

Antwort: B

Erweitern mit $\bar{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$: $\frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{1\cdot(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})} = \frac{-\mathrm{i}}{1} = -\mathrm{i}$.

Frage 18

Was ist $\frac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$?

A. $1+2\mathrm{i}$

B. $2+\mathrm{i}$

C. $2-\mathrm{i}$

D. $1-2\mathrm{i}$

Frage 18

Was ist $\frac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$?

A. $1+2\mathrm{i}$

B. $2+\mathrm{i}$

C. $2-\mathrm{i}$

D. $1-2\mathrm{i}$

Antwort: A

Erweitern mit $\overline{1-\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$: $\frac{(3+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{3+3\mathrm{i}+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1+1}=\frac{2+4\mathrm{i}}{2}=1+2\mathrm{i}$.

Frage 19

Wie lautet $z = 1 + \mathrm{i}$ in Polarform $r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$?

A. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

B. $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

C. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$

D. $1\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Frage 19

Wie lautet $z = 1 + \mathrm{i}$ in Polarform $r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$?

A. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

B. $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

C. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$

D. $1\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Antwort: A

$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und $\varphi = \arctan(1/1) = \pi/4$, also $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$.

Frage 20

Was sind Betrag und Argument von $z = -1 + \mathrm{i}$?

A. $r = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{4}$

B. $r = \sqrt{2},\ \varphi = \frac{3\pi}{4}$

C. $r = \sqrt{2},\ \varphi = \frac{\pi}{4}$

D. $r = 2,\ \varphi = \frac{3\pi}{4}$

Frage 20

Was sind Betrag und Argument von $z = -1 + \mathrm{i}$?

A. $r = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{4}$

B. $r = \sqrt{2},\ \varphi = \frac{3\pi}{4}$

C. $r = \sqrt{2},\ \varphi = \frac{\pi}{4}$

D. $r = 2,\ \varphi = \frac{3\pi}{4}$

Antwort: B

$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Der Punkt liegt im 2. Quadranten, also $\varphi = \pi - \arctan(1/1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Frage 21

Welche kartesische Form hat $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$**?**

A. $1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

B. $\sqrt{3} + \mathrm{i}$

C. $1 + \mathrm{i}$

D. $2 + 2\mathrm{i}$

Frage 21

Welche kartesische Form hat $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$?

A. $1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

B. $\sqrt{3} + \mathrm{i}$

C. $1 + \mathrm{i}$

D. $2 + 2\mathrm{i}$

Antwort: A

$z = 2\cos\frac{\pi}{3} + 2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2\mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

Frage 22

Was ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$?

A. 1

B. i

C. -1

D. 0

Frage 22

Was ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$?

A. 1
B. i
C. -1
D. 0

Antwort: C
Nach der Euler-Formel: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1 + 0 = -1$. Dies ist die beruehmte Euler-Identitaet $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$.

Frage 23

Was ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$?

A. -1

B. 1

C. i

D. $-\mathrm{i}$

Frage 23

Was ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$?

A. -1
B. 1
C. i
D. $-\mathrm{i}$

Antwort: C
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = 0 + \mathrm{i}\cdot 1 = \mathrm{i}$.

Frage 24

Seien $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$ und $z_2 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$. Was ist $z_1 \cdot z_2$?

A. $6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$

B. $5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$

C. $6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/18}$

D. $6\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/9}$

Frage 24

Seien $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$ und $z_2 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$. Was ist $z_1 \cdot z_2$?

A. $6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$

B. $5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$

C. $6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/18}$

D. $6\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/9}$

Antwort: A

In Polarform multipliziert man die Betraege und addiert die Argumente: $z_1 z_2 = 2 \cdot 3 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/6+\pi/3)} = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$.

Frage 25

Was ist $\frac{z_1}{z_2}$ fuer $z_1 = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ und $z_2 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$?

A. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4}$

B. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$

C. $9\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$

D. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$

Frage 25

Was ist $\frac{z_1}{z_2}$ fuer $z_1 = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ und $z_2 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$?

A. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4}$

B. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$

C. $9\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$

D. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$

Antwort: B

Bei Division dividiert man die Betraege und subtrahiert die Argumente: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - \pi/4)} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$.

Frage 26

Was sind die dritten Einheitswurzeln, also die Loesungen von $z^3 = 1$?

A. $1,\ -1,\ \mathrm{i}$

B. $1,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}$

C. $1,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$

D. $1,\ -1,\ 0$

Frage 26

Was sind die dritten Einheitswurzeln, also die Loesungen von $z^3 = 1$?

A. $1,\ -1,\ \mathrm{i}$

B. $1,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}$

C. $1,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$

D. $1,\ -1,\ 0$

Antwort: B

Die n-ten Einheitswurzeln sind $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k/n}$ fuer $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Fuer $n = 3$: $k = 0 \to 1$, $k = 1 \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$, $k = 2 \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}$.

Frage 27

Wie viele Loesungen hat $z^5 = 1$ in $\mathbb{C}$?

A. 1

B. 2

C. 5

D. 10

Frage 27

Wie viele Loesungen hat $z^5 = 1$ in $\mathbb{C}$?

A. 1

B. 2

C. 5

D. 10

Antwort: C

Die Gleichung $z^n = 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Loesungen (die n-ten Einheitswurzeln). Fuer $n = 5$ gibt es also genau 5 Loesungen, gleichmaessig auf dem Einheitskreis verteilt.

Frage 28

Was bedeutet die Multiplikation mit i geometrisch in der Gaussschen Zahlenebene?

A. Spiegelung an der reellen Achse
B. Drehung um 90 gegen den Uhrzeigersinn
C. Streckung um den Faktor 2
D. Verschiebung um 1 nach rechts

Frage 28

Was bedeutet die Multiplikation mit i geometrisch in der Gaussschen Zahlenebene?

A. Spiegelung an der reellen Achse
B. Drehung um 90 gegen den Uhrzeigersinn
C. Streckung um den Faktor 2
D. Verschiebung um 1 nach rechts

Antwort: B
Multiplikation mit $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$ dreht den Punkt um 90 gegen den Uhrzeigersinn. Beispiel: $\mathrm{i} \cdot 1 = \mathrm{i}$, also wandert 1 auf der reellen Achse nach i auf der imaginaeren Achse.

Frage 29

In der Wechselstromtechnik wird eine Impedanz als $Z = R + X\mathrm{i}$ dargestellt. Wie berechnet man den Scheinwiderstand?

A. $|Z| = R + X$

B. $|Z| = R \cdot X$

C. $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$

D. $|Z| = R^2 + X^2$

Frage 29

In der Wechselstromtechnik wird eine Impedanz als $Z = R + X\mathrm{i}$ dargestellt. Wie berechnet man den Scheinwiderstand?

A. $|Z| = R + X$

B. $|Z| = R \cdot X$

C. $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$

D. $|Z| = R^2 + X^2$

Antwort: C

Der Scheinwiderstand ist der Betrag der Impedanz: $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$, wobei R der Wirkwiderstand (Realteil) und X der Blindwiderstand (Imaginaerteil) ist.

Frage 30

Was gibt der folgende Python-Code aus?

```
import cmath
z = 1 + 1j
print(abs(z))
```

A. 2

B. 1

C. $1.414.. \approx \sqrt{2}$

D. $(1 + 1j)$

Frage 30

Was gibt der folgende Python-Code aus?

```
import cmath
z = 1 + 1j
print(abs(z))
```

A. 2

B. 1

C. 1.414.. $\approx \sqrt{2}$

D. $(1 + 1j)$

Antwort: C

In Python ist `1j` die imaginaere Einheit. `abs(z)` berechnet den Betrag: $|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1.414$.