Komplexe Zahlen

Ueberblick in 5 Minuten

BSc Analysis

Was sind komplexe Zahlen?

Definition

Eine **komplexe Zahl** $z \in \mathbb{C}$ hat die Form $z = a + b\mathrm{i}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{i}^2 = -1$.

Bestandteile:

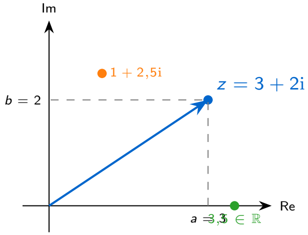
- $a = \mathrm{Re}(z)$: **Realteil**
- $b = \mathrm{Im}(z)$: **Imaginaerteil**
- i: **imaginaere Einheit** mit $\mathrm{i}^2 = -1$

Spezialfaelle:

- $b = 0$: reelle Zahl ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)
- $a = 0$: *rein imaginaer* ($b\mathrm{i}$)

Beispiel (Finanzmathe):
Charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Loesung, aber $\lambda = \pm\mathrm{i}$ in $\mathbb{C}$.

Gausssche Zahlenebene:



Jede komplexe Zahl entspricht einem Punkt in der Ebene.

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erweitern $\mathbb{R}$, sodass jede Polynomgleichung Loesungen besitzt (Fundamentalsatz der Algebra).

Grundrechenarten

Seien $z_1 = a + b\mathrm{i}$ und $z_2 = c + d\mathrm{i}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Addition (komponentenweise):

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$$

Beispiel:

$$(3 + 2\mathrm{i}) + (1 - 4\mathrm{i}) = 4 - 2\mathrm{i}$$

2. Subtraktion:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)\mathrm{i}$$

3. Multiplikation (ausmultiplizieren, $\mathrm{i}^2 = -1$):

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$$

Beispiel:

$$(2 + 3\mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) = 2 - 2\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2$$

$$= 2 + \mathrm{i} + 3 = 5 + \mathrm{i}$$

Merkregel:
Multiplikation wie bei Binomen, dann $\mathrm{i}^2 = -1$ einsetzen.

Rechenregeln

$\mathbb{C}$ bildet einen **Koerper**: Addition und Multiplikation sind kommutativ, assoziativ und distributiv – genau wie in $\mathbb{R}$.

Addition wirkt geometrisch als Vektoraddition; Multiplikation dreht und skaliert – mehr dazu bei der Polarform.

Betrag und Konjugierte

Konjugiert komplexe Zahl

$$\overline{z} = a - bi$$

Spiegelung an der reellen Achse.

Betrag (Modulus)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Abstand vom Ursprung in der Gaussschen Ebene.

Nuetzliche Identitaeten:

- $z + \overline{z} = 2a = 2\ \mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2bi = 2i\ \mathrm{Im}(z)$
- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Beispiel:

$z = 3 + 4i$, $\overline{z} = 3 - 4i$

$z \cdot \overline{z} = 9 + 16 = 25 = |z|^2$

Schluesselbeziehung:

$$\boxed{|z|^2 = z \cdot \overline{z}}$$

Dreiecksungleichung:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Beispiel:

$z = 3 + 4i$

$|z| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Anwendung: Der Betrag einer komplexen Rendite $r \in \mathbb{C}$ gibt die Schwingungsamplitude an.

Die Formel $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ ist zentral – sie vereinfacht Division und viele Beweise.

Polarform und Eulersche Formel

Polardarstellung

Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ laesst sich schreiben als

$$z = r\big(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\big) = r\ \mathrm{cis}(\varphi) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

wobei $r = |z|$ der **Betrag** und $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$ das **Argument** (Winkel) ist.

Eulersche Formel:

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi}$$

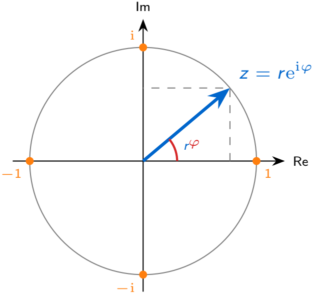
Spezialwerte:

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0} = 1$
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ (“schoenste Formel”)
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 3\pi/2} = -\mathrm{i}$

Multiplikation in Polarform:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Betraege multiplizieren, Winkel addieren.



Der Einheitskreis $|z| = 1$ enthaelt alle $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$

Zusammenfassung und Lernziele

Was Sie jetzt wissen sollten

1. Eine **komplexe Zahl** hat die Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $\mathrm{i}^2 = -1$; darstellbar als Punkt in der Gaussschen Ebene.
2. **Grundrechenarten:** Addition komponentenweise, Multiplikation ueber $(ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$.
3. **Betrag** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und **Konjugierte** $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$; Schluesselformel $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.
4. **Polarform:** $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit der Eulerschen Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$.

Naechste Schritte:

- Division komplexer Zahlen
- Umrechnung Normal- $\leftrightarrow$ Polarform
- Einheitswurzeln
- Anwendung: Wechselstromimpedanz

Zentrale Formel-Uebersicht:

$$z = a + b\mathrm{i} \qquad \text{(Normalform)}$$

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} \qquad \text{(Betrag)}$$

$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \qquad \text{(Polarform)}$$

Vertiefung: 03_komplexe_zahlen_mini10 – Mit Division, Umrechnung, Euler-Formel, Wechselstrom und Python-Beispielen.