

Komplexe Zahlen

Kompakter Einstieg in 10 Minuten

BSc Analysis

Was sind komplexe Zahlen?

Definition

Eine **komplexe Zahl** $z \in \mathbb{C}$ hat die Form $z = a + bi$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$.

Bestandteile:

- $a = \operatorname{Re}(z)$: **Realteil**
- $b = \operatorname{Im}(z)$: **Imaginarteil**
- i : **imaginaere Einheit** mit $i^2 = -1$

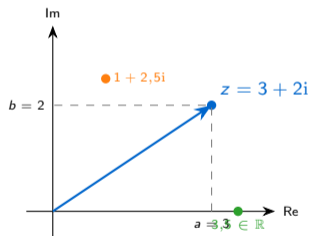
Spezialfaelle:

- $b = 0$: *reelle Zahl* ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)
- $a = 0$: *rein imaginaer* (bi)

Beispiel (Finanzmathe):

Charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Loesung, aber $\lambda = \pm i$ in \mathbb{C} .

Gaussche Zahlenebene:



Jede komplexe Zahl entspricht einem Punkt in der Ebene.

Die komplexen Zahlen \mathbb{C} erweitern \mathbb{R} , sodass jede Polynomgleichung Loesungen besitzt (**Fundamentalsatz der Algebra**).

Seien $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Addition (komponentenweise):

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Beispiel:

$$(3 + 2i) + (1 - 4i) = 4 - 2i$$

2. Subtraktion:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

3. Multiplikation (ausmultiplizieren, $i^2 = -1$):

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}(2 + 3i)(1 - i) &= 2 - 2i + 3i - 3i^2 \\ &= 2 + i + 3 = 5 + i\end{aligned}$$

Merkregel:

Multiplikation wie bei Binomen, dann $i^2 = -1$ einsetzen.

Rechenregeln

\mathbb{C} bildet einen **Koerper**: Addition und Multiplikation sind kommutativ, assoziativ und distributiv – genau wie in \mathbb{R} .

Addition wirkt geometrisch als Vektoraddition; Multiplikation dreht und skaliert – mehr dazu bei der Polarform.

Konjugiert komplexe Zahl

$$\bar{z} = a - bi$$

Spiegelung an der reellen Achse.

Nuetzliche Identitaeten:

- $z + \bar{z} = 2a = 2 \operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2bi = 2i \operatorname{Im}(z)$
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Beispiel:

$$z = 3 + 4i, \bar{z} = 3 - 4i$$

$$z \cdot \bar{z} = 9 + 16 = 25 = |z|^2$$

Die Formel $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ ist zentral – sie vereinfacht Division und viele Beweise.

Betrag (Modulus)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Abstand vom Ursprung in der Gaussischen Ebene.

Schlusselbeziehung:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

Dreiecksungleichung:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Beispiel:

$$z = 3 + 4i$$

$$|z| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Anwendung: Der Betrag einer komplexen Rendite $r \in \mathbb{C}$ gibt die Schwingungsamplitude an.

Polardarstellung

Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ lässt sich schreiben als

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \operatorname{cis}(\varphi) = r e^{i\varphi},$$

wobei $r = |z|$ der **Betrag** und $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$ das **Argument** (Winkel) ist.

Eulersche Formel:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

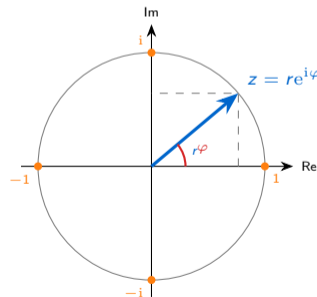
Spezialwerte:

- $e^{i \cdot 0} = 1$
- $e^{i\pi/2} = i$
- $e^{i\pi} = -1$ ("schoenste Formel")
- $e^{i \cdot 3\pi/2} = -i$

Multiplikation in Polarform:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Beträge multiplizieren, Winkel addieren.



Der Einheitskreis $|z| = 1$ enthält alle $e^{i\varphi}$

Was Sie jetzt wissen sollten

1. Eine **komplexe Zahl** hat die Form $z = a + bi$ mit $i^2 = -1$; darstellbar als Punkt in der Gaussschen Ebene.
2. **Grundrechenarten**: Addition komponentenweise, Multiplikation ueber $(ac - bd) + (ad + bc)i$.
3. **Betrag** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und **Konjugierte** $\bar{z} = a - bi$; Schluesselformel $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.
4. **Polarform**: $z = r e^{i\varphi}$ mit der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Zentrale Formel-Uebersicht:

$$z = a + bi \quad (\text{Normalform})$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} \quad (\text{Betrag})$$

$$z = r e^{i\varphi} \quad (\text{Polarform})$$

Im Folgenden:

- Gausssche Zahlenebene im Detail
- Division komplexer Zahlen
- Umrechnung Normal- \leftrightarrow Polarform
- Wechselstromimpedanz und Python

Weiter geht es mit der detaillierten Gaussschen Ebene, Division und Anwendungen.

Aufbau:

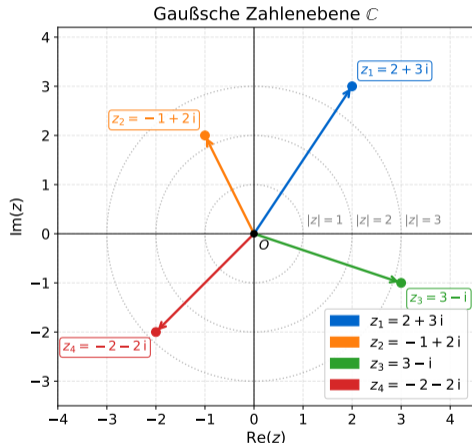
- Horizontale Achse: **reelle Achse (Re)**
- Vertikale Achse: **imaginaere Achse (Im)**
- Punkt $z = a + bi$ hat Koordinaten (a, b)

Quadranten:

1. $a > 0, b > 0$: I. Quadrant
2. $a < 0, b > 0$: II. Quadrant
3. $a < 0, b < 0$: III. Quadrant
4. $a > 0, b < 0$: IV. Quadrant

Geometrische Operationen:

- \bar{z} : Spiegelung an der Re-Achse
- $-z$: Punktspiegelung am Ursprung
- $i \cdot z$: Drehung um 90 gegen Uhrzeiger



Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußschen Ebene mit Betrag und Argument.

Die Gaußsche Ebene verbindet **Algebra** ($a + bi$) mit **Geometrie** (Punkt/Vektor) – ein mächtiges Werkzeug.

Methode: Konjugiert erweitern

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} \quad (z_2 \neq 0)$$

Ausführliches Beispiel:

$$z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = 1 - 2i$$

Schritt 1: Konjugierte bilden: $\overline{z_2} = 1 + 2i$

Schritt 2: Zaehler ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned}(3 + 4i)(1 + 2i) &= 3 + 6i + 4i + 8i^2 \\ &= 3 + 10i - 8 = -5 + 10i\end{aligned}$$

Schritt 3: Nenner berechnen:

$$|z_2|^2 = 1^2 + (-2)^2 = 5$$

Schritt 4: Dividieren:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-5 + 10i}{5} = -1 + 2i$$

Allgemeine Formel:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

In Polarform – viel einfacher:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Betraege dividieren, Winkel subtrahieren.

Sonderfall – Inverses:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Anwendung: Beim komplexen Widerstand $Z = R + iX$ berechnet man $I = U/Z$

Umrechnung: Normalform \leftrightarrow Polarform

Normalform \rightarrow Polarform

Gegeben: $z = a + bi$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\text{mit Quadrantenkorrektur})$$

Quadrantenkorrektur fuer φ :

a	b	φ
> 0	beliebig	$\arctan(b/a)$
< 0	≥ 0	$\arctan(b/a) + \pi$
< 0	< 0	$\arctan(b/a) - \pi$
$= 0$	> 0	$\pi/2$
$= 0$	< 0	$-\pi/2$

Alternativ: $\varphi = \text{atan2}(b, a)$ (Programmiersprachen).

Wichtig: $\arctan(b/a)$ allein reicht nicht – Quadrantenkorrektur beachten oder atan2 verwenden.

Polarform \rightarrow Normalform

Gegeben: $z = r e^{i\varphi}$

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi$$

$$z = r \cos \varphi + (r \sin \varphi) i$$

Beispiel 1: $z = 1 + i$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

Beispiel 2: $z = 3 e^{i\pi/3}$

$$a = 3 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}, \quad b = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$$

Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Herleitung (Potenzreihen):

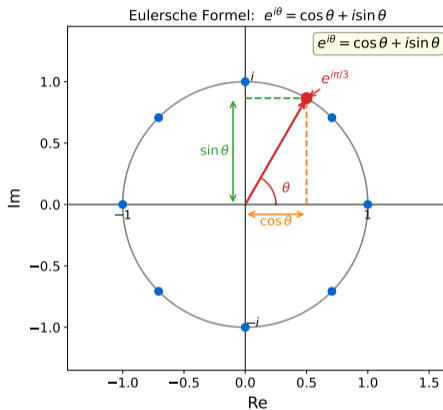
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!}$$

Sortiert nach Real- und Imaginarteil ergibt sich $\cos \varphi + i \sin \varphi$.

Wichtige Folgerungen:

- $\cos \varphi = \operatorname{Re}(e^{i\varphi}) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$
- $\sin \varphi = \operatorname{Im}(e^{i\varphi}) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$
- Moivre: $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$



Die Eulersche Formel verbindet Exponentialfunktion mit Trigonometrie auf dem Einheitskreis.

Euler-Identität:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Komplexe Impedanz

In der Wechselstromtechnik werden Widerstände als komplexe Zahlen beschrieben:

$$Z = R + iX$$

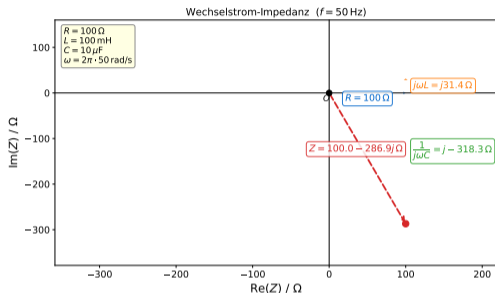
- R : Wirkwiderstand (Ohmscher Anteil)
- X : Blindwiderstand (Reaktanz)

Bauelemente:

- Widerstand: $Z_R = R$
- Spule: $Z_L = i\omega L$
- Kondensator: $Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$

Reihenschaltung:

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



Zeigerdiagramm: Impedanz als komplexer Vektor.

Zahlenbeispiel:

$$R = 100 \Omega, L = 0,1 \text{ H}, C = 10 \mu\text{F}, \omega = 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1}$$

$$Z = 100 + i(31,4 - 318,3)$$

$$= 100 - 286,9i \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{100^2 + 286,9^2} \approx 303,8 \Omega$$

Grundlagen:

```
import cmath, math

# Komplexe Zahl erzeugen
z1 = complex(3, 4) # 3+4j
z2 = 1 - 2j # Python-Syntax

# Grundrechenarten
print(z1 + z2) # (4+2j)
print(z1 * z2) # (11-2j)
print(z1 / z2) # (-1+2j)

# Betrag und Konjugierte
print(abs(z1)) # 5.0
print(z1.conjugate()) # (3-4j)
print(z1.real, z1.imag) # 3.0 4.0
```

Polarform:

```
# Normalform -> Polarform
r, phi = cmath.polar(z1)
print(f"r={r:.2f}, phi={phi:.4f}")
# r=5.00, phi=0.9273

# Polarform -> Normalform
z3 = cmath.rect(2, math.pi/4)
print(z3) # (1.414..+1.414..j)
```

Eulersche Formel verifizieren:

```
phi = math.pi / 3
euler = cmath.exp(1j * phi)
trig = math.cos(phi) + 1j*math.sin(phi)

print(f"Euler: {euler:.4f}")
print(f"Trig: {trig:.4f}")
# Beide identisch!
```

Wechselstromimpedanz:

```
R = 100 # Ohm
L = 0.1 # Henry
C = 10e-6 # Farad
omega = 2 * math.pi * 50 # 50 Hz

Z = R + 1j*omega*L + 1/(1j*omega*C)
print(f"|Z| = {abs(Z):.1f} Ohm")
print(f"Phase = {cmath.phase(Z)*180/math.pi:.1f} Grad")
# |Z| = 303.8 Ohm
# Phase = -70.8 Grad
```

Python verwendet j statt i und das Modul cmath fuer komplexe Funktionen.

Python unterstuetzt komplexe Zahlen nativ – cmath bietet polar(), rect(), phase() und exp().

Nach dieser Lektion koennen Sie ...

1. **Komplexe Zahlen** in Normalform $z = a + bi$ definieren und in der Gausschen Ebene darstellen.
2. **Grundrechenarten** ausfuehren: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division.
3. **Betrag** $|z|$ und **Konjugierte** \bar{z} berechnen und $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ anwenden.
4. Zwischen **Normalform** und **Polarform** $z = r e^{i\varphi}$ umrechnen.
5. Die **Eulersche Formel** $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ erklaren und nutzen.
6. Die **Wechselstromimpedanz** $Z = R + iX$ als praktische Anwendung komplexer Zahlen beschreiben.
7. Komplexe Zahlen in **Python** mit `cmath` verarbeiten.

Kernformeln:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad (\text{Betrag})$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (\text{Euler})$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (\text{Polar-Mult.})$$

Ausblick – Core-Version:

- Einheitswurzeln und de Moivre
- Komplexe Exponentialfunktion
- Mandelbrot- und Julia-Mengen
- Laplace- und Fourier-Transformation

Vertiefung: 03_komplexe_zahlen_core – Vollstaendige Lektion mit Einheitswurzeln, Fraktalen und weiteren Anwendungen.