Komplexe Zahlen

Was steckt dahinter? – Einfuehrung

BSc Analysis

Das Problem: Was ist die Wurzel von -1?

Ein Raetsel: Welche Zahl x erfuellt $x^2 = -1$?

- $1^2 = 1$ ×
- $(-1)^2 = 1$ ×
- Keine reelle Zahl funktioniert – jedes Quadrat ist ≥ 0!

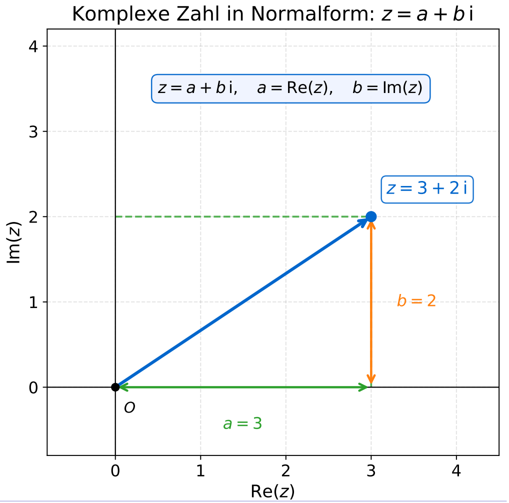
Die Loesung: Die Mathematiker haben einfach eine neue Zahl **erfunden**:

$$\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$$

Das ist die ganze Magie. Aus i baut man **komplexe Zahlen** wie $3 + 4\mathrm{i}$.

Keine Fantasie – ein Werkzeug!

i ist ein **Werkzeug**, das echte Probleme loest: Smartphone-Signale, MRT-Scanner, Elektromotoren.



Komplexe Zahlen wurden im 16. Jahrhundert erfunden, um kubische Gleichungen zu loesen.

Komplexe Zahlen als Landkarte

Reelle Zahlen leben auf einer **Linie**. **Komplexe Zahlen** leben auf einer **Ebene** – der Gaussschen Zahlenebene!

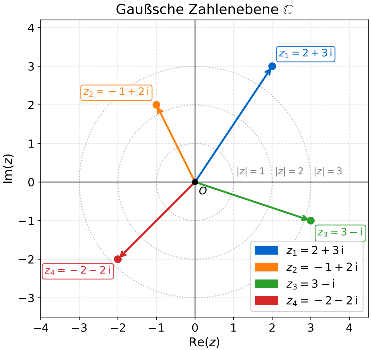
So liest man die Karte:

- x-Achse = **Realteil** (die "normalen" Zahlen)
- y-Achse = **Imaginaerteil** (das Neue!)

Beispiel: $3 + 4\mathrm{i}$

- 3 Schritte nach **rechts**, 4 nach **oben**
- Fertig – ein Punkt auf der Landkarte!

Jede komplexe Zahl ist ein Punkt auf dieser 2D-Landkarte.



Die reelle Zahlengerade ist nur die x-Achse dieser Landkarte.

Rechnen auf der Landkarte

Addition $=$ Verschieben

Wie Vektoren – Pfeile aneinanderlegen!

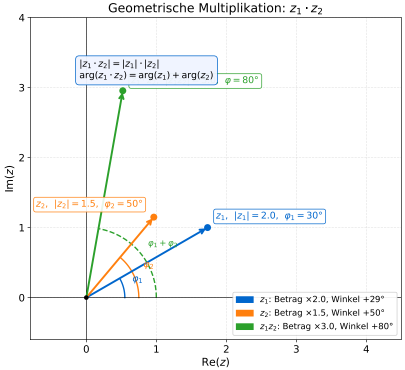
$$(2+\mathrm{i}) + (1+3\mathrm{i}) = 3+4\mathrm{i}$$

Multiplikation $=$ Drehen $+$ Strecken

$$\mathrm{i} \cdot (3+4\mathrm{i}) = -4+3\mathrm{i}$$

Mit i multiplizieren $=$ 90° drehen!

Winkel addieren, Laengen multiplizieren – Multiplikation ist **Geometrie in Aktion**.



Multiplikation mit komplexen Zahlen ist Geometrie in Aktion – Drehen und Strecken statt nur Skalieren.

Wozu braucht man das?

Komplexe Zahlen sind **ueberall** in Technik und Naturwissenschaft:

Elektrotechnik

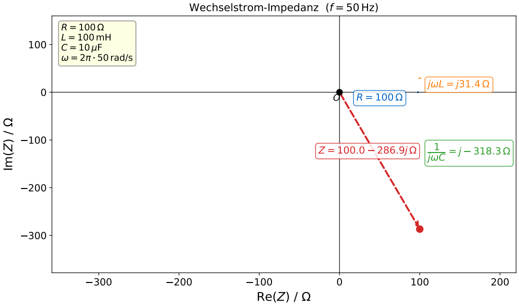
Wechselstrom nutzt **Impedanz** $Z = R + X\mathrm{i}$. Ohne i: Schaltungsberechnung ein Albtraum.

Schwingungen

Daempfung und Frequenz stecken in **komplexen Eigenwerten**. Bruecken, Autos – alles schwingt.

Computergrafik

Drehungen elegant mit komplexen Zahlen beschreiben. 2D-Rotationen = Multiplikation!



Ohne komplexe Zahlen kein Smartphone, kein WLAN, kein MRT – sie sind das Fundament moderner Technik.

Das Wichtigste

Drei Dinge zum Mitnehmen:

1. i **ist die Wurzel aus** -1 – eine nuetzliche Erfindung der Mathematik.

$$\mathrm{i}^2 = -1 \qquad \text{und} \qquad z = 3 + 4\mathrm{i} \in \mathbb{C}$$

2. **Komplexe Zahlen leben auf einer 2D-Landkarte** (der Gaussschen Zahlenebene). Realteil $\rightarrow$ x-Achse, Imaginaerteil $\rightarrow$ y-Achse.

3. **Sie loesen echte Probleme** in Elektrotechnik, Physik, Signalverarbeitung und Computergrafik.

Merksatz

Komplexe Zahlen sind nicht kompliziert – sie machen die Welt einfacher.

Euler nannte $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$ die schoenste Formel der Mathematik – sie verbindet e, i, π, 1 und 0.