Komplexe Zahlen

Vollstaendige Vorlesung

BSc Analysis

Inhaltsverzeichnis

Diese vollstaendige Vorlesung umfasst Theorie, Beweise, Anwendungen, numerische Aspekte, Geschichte und Python.

Motivation – Warum komplexe Zahlen?

Das Problem

Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat **keine reelle Loesung**, denn $x^2 \geq 0$ fuer alle $x \in \mathbb{R}$.

Idee (Euler, Gauss): Fuehre eine neue Zahl i ein mit der Eigenschaft

$$\mathrm{i}^2 = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

Damit gilt: $x^2 + 1 = 0$ hat die Loesungen $x = \mathrm{i}$ und $x = -\mathrm{i}$.

Historische Meilensteine:

- 1545: Cardano – kubische Gleichungen
- 1572: Bombelli – Rechenregeln fuer $\sqrt{-1}$
- 1748: Euler – $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$
- 1799: Gauss – Fundamentalsatz der Algebra

Warum relevant fuer Business/Finance?

- Fourier-Analyse: Erkennung von Zyklen in Zeitreihen
- Stabilitaet: Eigenwerte dynamischer Systeme
- Signalverarbeitung: Filterdesign, Frequenzanalyse
- Elektrotechnik: Wechselstrom und Impedanz

Komplexe Zahlen erweitern $\mathbb{R}$ und schliessen eine fundamentale algebraische Luecke.

Die imaginaere Einheit i

Definition

Die **imaginaere Einheit** i ist definiert durch $\mathrm{i}^2 = -1$.

Potenzen von i**:**

$$\mathrm{i}^0 = 1, \qquad \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}, \qquad \mathrm{i}^2 = -1, \qquad \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}, \qquad \mathrm{i}^4 = 1, \qquad \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}, \ \ldots$$

Perioditaet: Die Potenzen wiederholen sich mit Periode 4:

$$\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{n \bmod 4}$$

Beispiele:

- $\mathrm{i}^{42} = \mathrm{i}^{42 \bmod 4} = \mathrm{i}^2 = -1$
- $\mathrm{i}^{100} = \mathrm{i}^{100 \bmod 4} = \mathrm{i}^0 = 1$
- $\mathrm{i}^{2025} = \mathrm{i}^{2025 \bmod 4} = \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$

Die Potenzen von i **bilden die zyklische Gruppe** $\{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$ **– ein Kreis in der Zahlenebene.**

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Definition

Die Menge der **komplexen Zahlen** ist

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Zahlenmengen-Hierarchie:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Jede reelle Zahl ist komplex:

- $5 = 5 + 0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$
- $-3{,}7 = -3{,}7 + 0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$
- $\pi = \pi + 0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$

Rein imaginaere Zahlen:

- $3\mathrm{i} = 0 + 3\mathrm{i}$
- $-2\mathrm{i} = 0 + (-2)\mathrm{i}$
- Die "Null" ist sowohl reell als auch imaginaer: $0 = 0 + 0\mathrm{i}$

Gleichheit: $a + b\mathrm{i} = c + d\mathrm{i} \iff a = c$ und $b = d$

$\mathbb{C}$ ist die "kleinste" Erweiterung von $\mathbb{R}$, in der jede polynomiale Gleichung loesbar ist.

Normalform $z = a + bi$

Normalform (kartesische Darstellung)

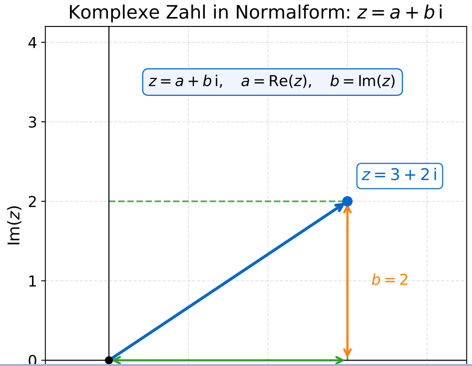
Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ laesst sich eindeutig schreiben als

$$z = a + bi \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Dabei heisst $a = \mathrm{Re}(z)$ der **Realteil** und $b = \mathrm{Im}(z)$ der **Imaginaerteil**.

Beispiele:

z	$\mathrm{Re}(z)$	$\mathrm{Im}(z)$
$3 + 4\mathrm{i}$	3	4
$-2 - 5\mathrm{i}$	-2	-5
7	7	0
$-3\mathrm{i}$	0	-3
0	0	0



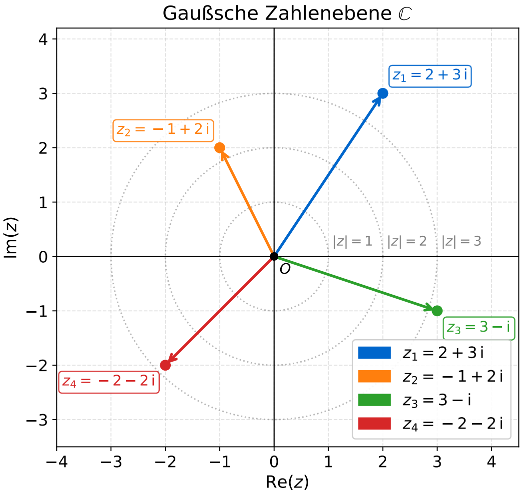
Geometrische Darstellung

Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ entspricht einem Punkt (a, b) in der Ebene:

- **x-Achse** = reelle Achse ($\mathrm{Im}(z) = 0$)
- **y-Achse** = imaginaere Achse ($\mathrm{Re}(z) = 0$)

Beispiele in der Ebene:

- $z_1 = 3 + 2i \mathrel{\hat{=}} (3, 2)$
- $z_2 = -1 + 4i \mathrel{\hat{=}} (-1, 4)$
- $z_3 = -2 - 3i \mathrel{\hat{=}} (-2, -3)$



Finance-Analogie: Ein Punkt in der Gaussschen Ebene codiert zwei Informationen gleichzeitig – wie ein Rendite-Risiko-Paar (r, σ) in der Portfoliotheorie.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) etablierte die geometrische Interpretation komplexer Zahlen.

Real- und Imaginaerteil als Funktionen

Notation

Fuer $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ sind Re und Im Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Re}(z) = a, \qquad \mathrm{Im}(z) = b.$$

Wichtige Eigenschaften:

1. $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \cdot \mathrm{i}$
2. $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$ (Linearitaet)
3. $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$
4. $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0$
5. z rein imaginaer $\iff \mathrm{Re}(z) = 0$

Achtung: $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Im}(z)$ gelten nur fuer $\lambda \in \mathbb{R}$!
Fuer komplexes λ gilt das i.A. **nicht**:

$$\mathrm{Re}(\mathrm{i} \cdot (1 + \mathrm{i})) = \mathrm{Re}(\mathrm{i} - 1) = -1 \neq \mathrm{i} \cdot \mathrm{Re}(1 + \mathrm{i}) = \mathrm{i}$$

Re **und** Im **sind $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear – ein haeufiger Fehler.**

Gleichheit komplexer Zahlen

Gleichheit

$z_1 = z_2 \iff \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ und $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$

Anwendung: Koeffizientenvergleich
Bestimme $x, y \in \mathbb{R}$ so, dass $(2x - 3) + (y + 1)\mathrm{i} = 5 + 4\mathrm{i}$.

Loesung: Vergleich von Real- und Imaginaerteil:

$$\mathrm{Re}: \; 2x - 3 = 5 \;\Rightarrow\; x = 4, \qquad \mathrm{Im}: \; y + 1 = 4 \;\Rightarrow\; y = 3$$

Beispiel aus der Finanzmathematik:
In der Eigenanalyse von Uebergangsmatrizen (z.B. Kreditrating-Migration) koennen **komplexe Eigenwerte** $\lambda = a + b\mathrm{i}$ auftreten. Dann beschreiben:

- $\mathrm{Re}(\lambda) = a$: Wachstums- oder Zerfallsrate
- $\mathrm{Im}(\lambda) = b$: Oszillationsfrequenz

Koeffizientenvergleich: Zwei komplexe Gleichungen liefern stets zwei reelle Gleichungen.

Addition und Subtraktion

Rechenregel

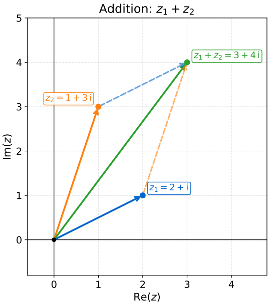
Fuer $z_1 = a + b\mathrm{i}$ und $z_2 = c + d\mathrm{i}$:

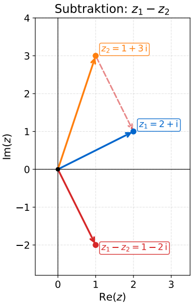
$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}, \qquad z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)\mathrm{i}$$

Beispiel:

$$(3 + 2\mathrm{i}) + (1 - 5\mathrm{i}) = 4 - 3\mathrm{i}$$
$$(3 + 2\mathrm{i}) - (1 - 5\mathrm{i}) = 2 + 7\mathrm{i}$$

Geometrisch: Addition = Vektoraddition in der Gaussschen Ebene (Parallelogrammregel).





Rechengesetze:

- Kommutativitaet: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- Assoziativitaet: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
- Neutrales Element: $z + 0 = z$
- Inverses Element: $z + (-z) = 0$

Multiplikation

Rechenregel

Fuer $z_1 = a + b\mathrm{i}$ und $z_2 = c + d\mathrm{i}$:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$$

Herleitung: Ausmultiplizieren mit $\mathrm{i}^2 = -1$:

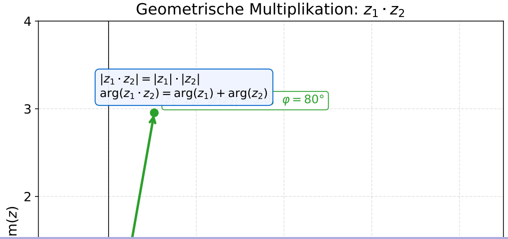
$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = ac + ad\mathrm{i} + bc\mathrm{i} + bd\mathrm{i}^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned}(2 + 3\mathrm{i})(4 - \mathrm{i}) &= (8 + 3) + (-2 + 12)\mathrm{i} \\ &= 11 + 10\mathrm{i}\end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}(1 + \mathrm{i})^2 &= 1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 \\ &= 1 + 2\mathrm{i} - 1 = 2\mathrm{i}\end{aligned}$$



Division

Rechenregel

Fuer $z_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}} = \frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)\mathrm{i}}{c^2+d^2}$$

Trick: Erweitern mit der **konjugierten** Zahl $\overline{z_2} = c - d\mathrm{i}$ beseitigt i im Nenner.

Beispiel:

$$\frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \frac{(3+4\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} = \frac{(3-8)+(6+4)\mathrm{i}}{1+4} = \frac{-5+10\mathrm{i}}{5} = -1+2\mathrm{i}$$

Probe: $(-1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) = (-1+2)+(2+2)\mathrm{i} = \ldots$
Korrekt: $(-1)(1)+(-1)(-2\mathrm{i})+(2\mathrm{i})(1)+(2\mathrm{i})(-2\mathrm{i}) = -1+2\mathrm{i}+2\mathrm{i}+4 = 3+4\mathrm{i}$ ✓

Division = Erweitern mit der Konjugierten. Dieses Prinzip taucht auch bei der Rationalisierung auf.

Quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$

Loesungsformel

$az^2 + bz + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Drei Faelle:

Diskriminante	Loesungen	Typ
$D = b^2 - 4ac > 0$	zwei reelle	$z_{1,2} \in \mathbb{R}$
$D = 0$	eine doppelte reelle	$z_1 = z_2 \in \mathbb{R}$
$D < 0$	zwei konjugiert komplexe	$z_{1,2} = \alpha \pm \beta \mathrm{i}$

Beispiel: $z^2 + 2z + 5 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4\mathrm{i}}{2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$$

Beachte: Die Loesungen treten als **konjugiert komplexes Paar** auf: $z_2 = \overline{z_1}$.

Konjugiert komplexe Loesungen treten immer paarweise auf – bei reellen Koeffizienten.

Die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$

Definition

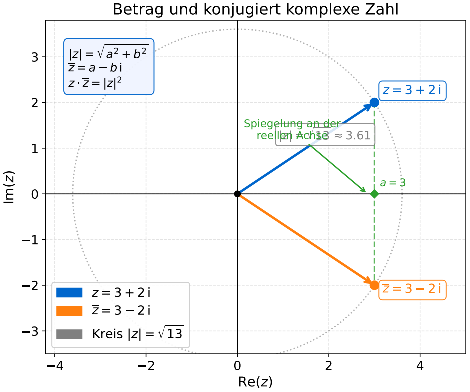
Fuer $z = a + bi$ ist die **konjugiert komplexe Zahl**:

$$\overline{z} = a - bi$$

Geometrisch: Spiegelung an der reellen Achse.

Rechenregeln:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$
5. $z + \overline{z} = 2\ \mathrm{Re}(z)$
6. $z - \overline{z} = 2i\ \mathrm{Im}(z)$
7. $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$



Der Betrag $|z|$

Definition

Fuer $z = a + bi$ ist der **Betrag** (Modulus):

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

Geometrisch: Abstand vom Ursprung in der Gaussschen Ebene.

Beispiele:

- $|3 + 4\mathrm{i}| = \sqrt{9 + 16} = 5$
- $|-1 + \mathrm{i}| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
- $|5| = 5, \quad |-3\mathrm{i}| = 3$

Rechenregeln:

1. $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad$ (Multiplikativitaet)
3. $|z_1/z_2| = |z_1| \,/\, |z_2| \quad (z_2 \neq 0)$
4. $|\overline{z}| = |z|$

Der Betrag misst den "Abstand zur Null" – fuer $z \in \mathbb{R}$ stimmt er mit dem reellen Betrag ueberein.

Dreiecksungleichung und Kreise

Satz (Dreiecksungleichung)

Fuer alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Gleichheit genau dann, wenn z_1 und z_2 in dieselbe Richtung zeigen.

Umgekehrte Dreiecksungleichung: $|z_1 - z_2| \geq \big| |z_1| - |z_2| \big|$

Kreise in der Gaussschen Ebene:

- $|z| = 1$: Einheitskreis um den Ursprung
- $|z - z_0| = r$: Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r
- $|z - z_0| < r$: offene Kreisscheibe (ε-Umgebung)

Business-Kontext: In der Stabilitaetsanalyse von ARMA-Modellen muessen alle Wurzeln des charakteristischen Polynoms **innerhalb des Einheitskreises** $|z| < 1$ liegen, damit das Modell stationaer ist.

Die Dreiecksungleichung ist fundamental fuer Konvergenzbeweise und Abschaetzungen in der Analysis.

Polarkoordinaten und Polarform

Polarform

Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ laesst sich schreiben als

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\ \mathrm{cis}(\varphi)$$

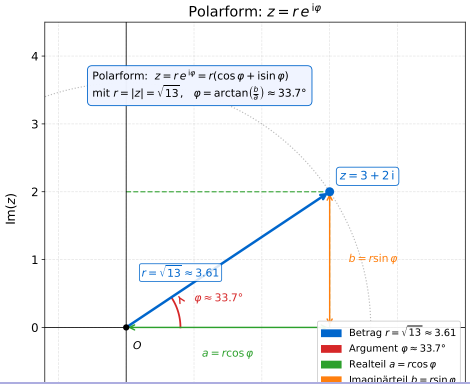
mit $r = |z| > 0$ und dem **Argument** $\varphi = \arg(z)$.

Umrechnung:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi$$

Achtung beim Argument:
$\varphi = \arctan(b/a)$ gilt nur fuer $a > 0$.
Fuer $a < 0$: Quadrantenkorrektur $\pm\pi$.



Drei Darstellungsformen im Vergleich

Form	Schreibweise	Vorteil	Nachteil
Normalform	$z = a + b\mathrm{i}$	Addition/Subtraktion einfach	Multiplikation aufwaendig
Trigonometrisch	$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$	Anschaulich	Notation lang
Exponentialform	$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$	Mult./Div./Potenz einfach	Addition aufwaendig

Zusammenhang:

$$\underbrace{a + b\mathrm{i}}_{\text{Normalform}} = \underbrace{r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)}_{\text{trigonometrisch}} = \underbrace{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}_{\text{exponential}}$$

mit $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arctan(b/a)$, $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

Faustregel:
$+/- \to$ Normalform — $\cdot/\div/$Potenz $\to$ Polarform

Die Wahl der Darstellung haengt von der Operation ab – Flexibilitaet ist der Schluessel.

Beispiel 1: Normalform → Polarform
$z = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

- $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$
- $\tan\varphi = \sqrt{3}/(-1)$, da $a < 0$, $b > 0$: 2. Quadrant $\Rightarrow \varphi = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$
- $z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi/3}$

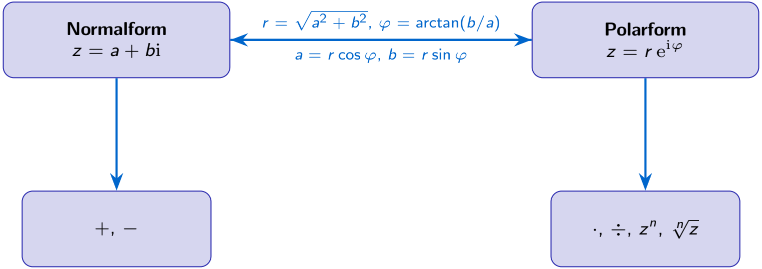
Beispiel 2: Polarform → Normalform
$z = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 5\pi/6}$

- $a = 3\cos(5\pi/6) = 3\cdot(-\sqrt{3}/2) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- $b = 3\sin(5\pi/6) = 3\cdot(1/2) = \frac{3}{2}$
- $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,\mathrm{i}$

Beispiel 3: Spezialwerte
$\mathrm{i} = 1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}, \quad -1 = 1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}, \quad -\mathrm{i} = 1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}, \quad 1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$

Die Umrechnung erfordert sorgfaeltige Quadrantenbestimmung – arctan **allein reicht nicht.**

Darstellungsformen – Wann welche?



Empfehlung:

- Starte in der Form, die zur Aufgabe passt
- Rechne um, wenn noetig
- Gib das Ergebnis in der verlangten Form an

Flexibilitaet zwischen den Darstellungsformen ist der Schluessel zum effizienten Rechnen.

Satz (Euler, 1748)

Fuer alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:

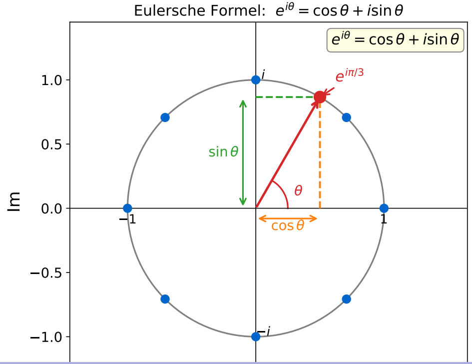
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Damit hat jede komplexe Zahl die **Exponentialform**:

$$z = r\,e^{i\varphi} \qquad \text{mit } r = |z|\,,\ \varphi = \arg(z)$$

Spezialfaelle:

$$e^{i\cdot 0} = 1 \qquad e^{i\pi/2} = i$$
$$e^{i\pi} = -1 \qquad e^{i\cdot 3\pi/2} = -i$$
$$e^{2\pi i} = 1 \qquad e^{-i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$



Folgerungen aus der Euler-Formel

Trigonometrische Funktionen ueber Exponentialfunktionen:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Additionstheoreme: Aus $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Hyperbolische Funktionen: Ersetze φ durch it:

$$\cosh t = \cos(it), \qquad \sinh t = -i\sin(it)$$

Allgemeine Potenz: $z^w = e^{w \ln z}$ fuer $z, w \in \mathbb{C}$ (Hauptwert).
Beispiel: $i^i = e^{i \ln i} = e^{i \cdot i\pi/2} = e^{-\pi/2} \approx 0{,}2079 \in \mathbb{R}$

Die Euler-Formel vereinheitlicht Trigonometrie, Exponentialfunktion und hyperbolische Funktionen.

Definition

Fuer $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x\, e^{iy}$$

Eigenschaften:

1. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} = e^x$ (Betrag haengt nur vom Realteil ab)
2. $\arg(e^z) = \mathrm{Im}(z) = y$ (Argument ist der Imaginaerteil)
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ (Funktionalgleichung bleibt gueltig)
4. $e^z \neq 0$ fuer alle $z \in \mathbb{C}$
5. e^z ist $2\pi i$-periodisch: $e^{z+2\pi i} = e^z$

Wichtig fuer Anwendungen:

- $e^{(\sigma+i\omega)t} = e^{\sigma t}(\cos \omega t + i \sin \omega t)$: Gedaempfte Schwingung
- $\sigma < 0$: abklingende Schwingung (stabil)
- $\sigma > 0$: aufklingende Schwingung (instabil)

Die Periodizitaet $e^{z+2\pi i} = e^z$ macht den komplexen Logarithmus mehrdeutig.

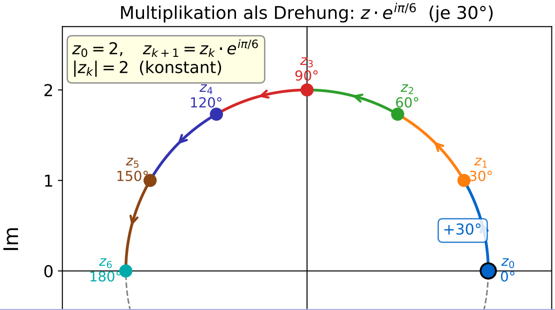
Rechenregeln

Fuer $z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Geometrisch:

- **Multiplikation:** Betraege multiplizieren, Winkel addieren
- **Division:** Betraege dividieren, Winkel subtrahieren



Potenzen – Satz von de Moivre

Satz (de Moivre)

Fuer $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ und $n \in \mathbb{Z}$:

$$z^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = r^n\big(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)\big)$$

Beispiel 1: $(1+\mathrm{i})^8$

- $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}, \quad \arg(1+\mathrm{i}) = \pi/4$
- $(1+\mathrm{i})^8 = (\sqrt{2})^8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 8\cdot\pi/4} = 16\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 16$

Beispiel 2: Berechne $\cos(3\varphi)$ und $\sin(3\varphi)$ mithilfe von de Moivre:

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^3 &= \cos(3\varphi) + \mathrm{i}\sin(3\varphi)\\ &= (\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi) + \mathrm{i}(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi)\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die **Dreifachwinkelformeln**!

De Moivre macht Potenzierung trivial und liefert trigonometrische Identitaeten als "Nebenprodukt".

Rechengesetze in $\mathbb{C}$ – Zusammenfassung

Addition:

1. Kommutativ: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. Assoziativ: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. Neutrales Element: $z + 0 = z$
4. Inverses: $z + (-z) = 0$

Multiplikation:

1. Kommutativ: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
2. Assoziativ: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
3. Neutrales Element: $z \cdot 1 = z$
4. Inverses: $z \cdot z^{-1} = 1 \quad$ fuer $z \neq 0$

Distributivgesetz: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Fazit

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ erfuellt alle **Koerperaxiome** – $\mathbb{C}$ ist ein Koerper.

Die Rechenregeln in $\mathbb{C}$ sind dieselben wie in $\mathbb{R}$ – nur die Interpretation aendert sich.

Binomische Formeln in $\mathbb{C}$

Die klassischen Formeln gelten auch fuer komplexe Zahlen:

$$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$$
$$(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2$$
$$(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2 - z_2^2$$

Beispiel 1: $(1+\mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 2\mathrm{i}$
Beispiel 2: $(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i}) = 4 - \mathrm{i}^2 = 4 + 1 = 5$

Beispiel 3 (Faktorisierung):

$$z^2 + 4 = z^2 - (2\mathrm{i})^2 = (z + 2\mathrm{i})(z - 2\mathrm{i})$$

In $\mathbb{R}$ ist $z^2 + 4$ irreduzibel – in $\mathbb{C}$ zerlegbar!

Anwendung: Partialbruchzerlegung bei Laplace-Transformation in der Regelungstechnik nutzt diese Faktorisierung.

Die dritte binomische Formel liefert direkt $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ – ein zentrales Werkzeug.

n-te Wurzeln komplexer Zahlen

Satz

Jede komplexe Zahl $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \neq 0$ hat genau n verschiedene n-te Wurzeln:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi k)/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Geometrisch: Die n Wurzeln bilden ein **regelmaessiges n-Eck** auf dem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{r}$.

Beispiel: Dritte Wurzeln von $z = 8$:

$$w_k = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi k/3}, \quad k = 0, 1, 2$$

- $w_0 = 2 \quad$ (reelle Wurzel)
- $w_1 = 2\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3} = 2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}) = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$
- $w_2 = 2\,\mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}/3} = -1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

In $\mathbb{C}$ hat jede Polynomgleichung n-ten Grades genau n Loesungen (mit Vielfachheit).

Einheitswurzeln

Definition

Die n**-ten Einheitswurzeln** sind die Loesungen von $z^n = 1$:

$$\omega_k = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

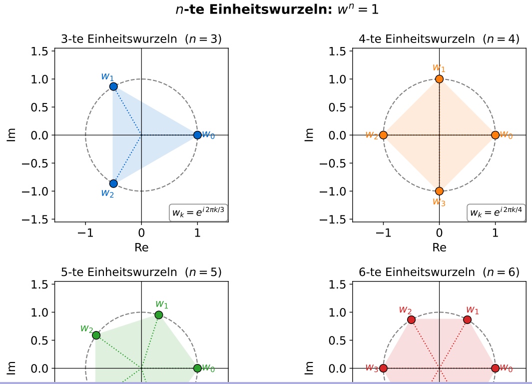
Mit der **primitiven Einheitswurzel** $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$ gilt: $\omega_k = \omega^k$.

Beispiele:

- $n = 2$: $\{1, -1\}$
- $n = 3$: $\{1, \omega, \omega^2\}$ mit $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$
- $n = 4$: $\{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$

Wichtige Eigenschaft:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$$



Anwendung: Polynomfaktorisierung mit Wurzeln

Jedes reelle Polynom laesst sich in $\mathbb{C}$ vollstaendig in Linearfaktoren zerlegen:

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

Beispiel 1: $z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})$
Beispiel 2: $z^3 - 1 = (z - 1)(z - \omega)(z - \omega^2)$ mit $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$

Reelle Faktorisierung:
Konjugiert komplexe Nullstellen $\alpha \pm \beta\mathrm{i}$ ergeben einen **reellen quadratischen Faktor**:

$$(z - (\alpha + \beta\mathrm{i}))(z - (\alpha - \beta\mathrm{i})) = z^2 - 2\alpha z + (\alpha^2 + \beta^2)$$

Beispiel: $z^2 + 2z + 5$ hat Nullstellen $-1 \pm 2\mathrm{i}$, also $z^2 + 2z + 5 = (z - (-1 + 2\mathrm{i}))(z - (-1 - 2\mathrm{i}))$.

Komplexe Wurzeln machen die vollstaendige Faktorisierung moeglich – Grundlage der Algebra.

Fundamentalsatz der Algebra

Satz (Gauss, 1799)

Jedes Polynom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ vom Grad $n \geq 1$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ hat **mindestens eine** Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Folgerung: Jedes Polynom vom Grad n hat (mit Vielfachheit) genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$:

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

Was bedeutet das?

- $\mathbb{C}$ ist **algebraisch abgeschlossen**: Keine "Luecken" wie $x^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{R}$.
- Es gibt **keinen** Koerper "groesser" als $\mathbb{C}$, der durch Polynomloesungen entsteht.
- Jede $n \times n$-Matrix hat n Eigenwerte in $\mathbb{C}$ (mit Vielfachheit).

Beweisideen: Gauss gab 4 verschiedene Beweise. Moderne Beweise nutzen Analysis (Liouville), Topologie (Windungszahl) oder Algebra (Galoistheorie).

Der Fundamentalsatz ist DER Grund, warum $\mathbb{C}$ "die richtige" Zahlenerweiterung von $\mathbb{R}$ ist.

Satz ueber konjugierte Nullstellen

Satz

Hat ein Polynom $p(z)$ mit **reellen** Koeffizienten eine komplexe Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so ist auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von p.

Beweis: Sei $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $p(z_0) = 0$. Dann:

$$p(\overline{z_0}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z_0}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{z_0^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k} = \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0 \quad \square$$

(Hierbei: $a_k \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{a_k} = a_k$ und $\overline{z^k} = \overline{z}^k$.)

Folgerung: Reelle Polynome ungeraden Grades haben stets mindestens eine **reelle** Nullstelle (denn konjugierte Paare kommen in gerader Anzahl).

Anwendung: Bei der Faktorisierung reeller Polynome genuegt es, nur die Nullstellen mit $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ zu suchen – die konjugierten kommen automatisch.

Konjugierte Nullstellen paaren sich zu reellen quadratischen Faktoren $z^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_0)z + |z_0|^2$.

Anwendung: Eigenwerte und der Fundamentalsatz

Verbindung zur Linearen Algebra:
Das **charakteristische Polynom** einer $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ ist

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

und hat Grad n. Nach dem Fundamentalsatz hat es genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$.

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p(\lambda) = \lambda^2 + 1$
$\Rightarrow \; \lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$ (rein imaginaere Eigenwerte → Rotation um 90)

Bedeutung in der Praxis:

- Komplexe Eigenwerte $\lambda = \sigma \pm \omega \mathrm{i}$ beschreiben **oszillierendes Verhalten**
- $\sigma < 0$: gedaempfte Schwingung (stabil)
- $\sigma = 0$: ungedaempfte Schwingung (grenzstabil)
- $\sigma > 0$: aufklingende Schwingung (instabil)

Finance: VAR-Modelle (Vektorautoregression) haben genau dann stationaere Loesungen, wenn alle Eigenwerte der Begleitmatrix innerhalb des Einheitskreises liegen.

Ohne $\mathbb{C}$ gaebe es Matrizen ohne Eigenwerte – der Fundamentalsatz verhindert das.

$\mathbb{C}$ als Koerper – Die Koerperaxiome

Satz

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein **Koerper**, d.h. es gelten:

Axiom	Addition	Multiplikation
Abgeschlossenheit	$z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$	$z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$
Assoziativitaet	$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$	$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
Kommutativitaet	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	$z_1 z_2 = z_2 z_1$
Neutrales Element	$z + 0 = z$	$z \cdot 1 = z$
Inverses	$z + (-z) = 0$	$z \cdot z^{-1} = 1 \quad (z \neq 0)$
Distributivitaet	$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	

Explizit: Das multiplikative Inverse von $z = a + b\mathrm{i} \neq 0$:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a - b\mathrm{i}}{a^2 + b^2}$$

$\mathbb{C}$ erweitert $\mathbb{R}$ zu einem Koerper, in dem jedes Polynom vollstaendig zerlegbar ist.

$\mathbb{C}$ ist **kein** geordneter Koerper

Satz

Es gibt **keine** totale Ordnung "$<$" auf $\mathbb{C}$, die mit Addition und Multiplikation vertraeglich ist.

Beweis (Widerspruch):
Angenommen, es gaebe eine solche Ordnung. Dann ist entweder $\mathrm{i} > 0$ oder $\mathrm{i} < 0$.

Fall 1: $\mathrm{i} > 0$
$\Rightarrow$ $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} > 0$ (Produkt positiver Zahlen ist positiv)
$\Rightarrow$ $-1 > 0$ Widerspruch!

Fall 2: $\mathrm{i} < 0$
$\Rightarrow$ $-\mathrm{i} > 0$ (Negation kehrt Ordnung um)
$\Rightarrow$ $(-\mathrm{i})(-\mathrm{i}) > 0$
$\Rightarrow$ $\mathrm{i}^2 > 0$, also $-1 > 0$ Widerspruch!

Konsequenz: Ausdruecke wie $z_1 < z_2$ sind fuer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ **sinnlos**. Man kann nur **Betraege** vergleichen: $|z_1| < |z_2|$.

Man "bezahlt" fuer die algebraische Vollstaendigkeit von $\mathbb{C}$ mit dem Verlust der Ordnung.

Vergleich: $\mathbb{R}$ vs. $\mathbb{C}$

Eigenschaft	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
Koerper	Ja	Ja
Geordneter Koerper	Ja	**Nein**
Vollstaendig (Cauchy-Folgen)	Ja	Ja
Algebraisch abgeschlossen	**Nein**	Ja
$x^2 + 1 = 0$ **loesbar**	Nein	Ja
Dimension ueber $\mathbb{R}$	1	2
Zwischenwertsatz	Ja	(nicht direkt anwendbar)
Maximum/Minimum	Ja	Nur fuer $\lvert\cdot\rvert$
Geometrie	Zahlengerade	Gausssche Ebene

Kernaussage

$\mathbb{R}$ hat Ordnung, $\mathbb{C}$ hat algebraische Abgeschlossenheit. Beides gleichzeitig geht nicht (Satz von Artin–Schreier).

Die Erweiterung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gewinnt Loesbarkeit aller Polynomgleichungen und verliert die Ordnung.

Definition

Eine **komplexe Funktion** $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ordnet jeder komplexen Zahl z einen Wert $w = f(z) \in \mathbb{C}$ zu.

Zerlegung in Real- und Imaginaerteil:

$$f(z) = f(x + y\mathrm{i}) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y) \qquad \text{mit } u, v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Wichtige Beispiele:

Funktion	Definition	Eigenschaft
Polynom	$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$	Ganz (ueberall analytisch)
Exponential	$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$	$2\pi\mathrm{i}$-periodisch
Logarithmus	$\ln z = \ln\lvert z\rvert + \mathrm{i} \arg(z)$	Mehrdeutig!
Potenz	$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln z}$	Hauptwert via Arg

Achtung: $\ln z$ ist nur als **Hauptwert** $\mathrm{Ln}(z) = \ln\lvert z\rvert + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$ eindeutig.

Komplexe Funktionen bilden die Ebene auf die Ebene ab – sie sind “2D-Abbildungen”.

Der komplexe Logarithmus

Definition

Fuer $z \neq 0$ ist der **komplexe Logarithmus**:

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}(\operatorname{Arg}(z) + 2\pi k), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Der **Hauptwert** waehlt $k = 0$: $\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(z)$.

Beispiele:

- $\operatorname{Ln}(1) = \ln 1 + \mathrm{i} \cdot 0 = 0$
- $\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + \mathrm{i}\pi = \mathrm{i}\pi$
- $\operatorname{Ln}(\mathrm{i}) = \ln 1 + \mathrm{i} \cdot \pi/2 = \mathrm{i}\pi/2$
- $\operatorname{Ln}(-\mathrm{i}) = \ln 1 + \mathrm{i} \cdot (-\pi/2) = -\mathrm{i}\pi/2$

Warnung – Logarithmengesetze:

- $\mathrm{e}^{\operatorname{Ln}(z)} = z$ ✓ (stets gueltig)
- $\operatorname{Ln}(\mathrm{e}^z) = z$ **nur** falls $\operatorname{Im}(z) \in (-\pi, \pi]$
- $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Ln}(z_1) + \operatorname{Ln}(z_2)$ im Allgemeinen!

Die Mehrdeutigkeit des Logarithmus fuehrt zum Konzept der Riemannschen Flaeche.

Holomorphie und Cauchy-Riemann-Gleichungen

Definition

$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ ist **holomorph** (komplex differenzierbar) in z_0, falls

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

existiert (Grenzwert unabhaengig von der Richtung, aus der $h \to 0$).

Cauchy-Riemann-Gleichungen (notwendige Bedingung):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Beispiel: $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\,\mathrm{i}$, also $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

$$u_x = 2x = v_y \checkmark, \qquad u_y = -2y = -v_x \checkmark$$

Gegenbeispiel: $f(z) = \overline{z} = x - y\mathrm{i}$, also $u = x$, $v = -y$: $u_x = 1 \neq v_y = -1 \;\Rightarrow\; \overline{z}$ ist **nirgends** holomorph!

Holomorphie ist viel staerker als reelle Differenzierbarkeit – sie erzwingt Analytizitaet.

Konforme Abbildungen – Anwendung

Definition

Eine holomorphe Funktion f mit $f'(z_0) \neq 0$ ist **konform** (winkeltreu) in z_0.

Wichtige konforme Abbildungen:

- $f(z) = az + b$: Translation und Drehstreckung
- $f(z) = z^2$: Winkel werden verdoppelt
- $f(z) = \mathrm{e}^z$: Streifen $\rightarrow$ Sektor
- $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$: Moebiustransformation (Kreise $\rightarrow$ Kreise)

Anwendungen:

- **Stroemungsmechanik:** Umstroemung von Tragflaechenprofilen (Joukowski-Transformation)
- **Elektrostatik:** Potentialprobleme in 2D
- **Kartographie:** Konforme Projektionen (Mercator)
- **Finance:** Konforme Abbildungen in der Optionsbewertung (Modellkalibrierung)

Konforme Abbildungen bewahren Winkel – sie sind das "Werkzeug" der 2D-Analysis.

Komplexe Impedanz

In der Wechselstromtechnik wird die Impedanz als komplexe Zahl beschrieben:

$$Z = R + \mathrm{i}X$$

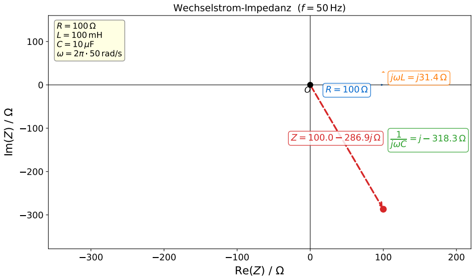
mit Wirkwiderstand $R = \mathrm{Re}(Z)$ und Blindwiderstand $X = \mathrm{Im}(Z)$.

Bauelemente:

Bauteil	Impedanz
Widerstand R	$Z_R = R$
Spule L	$Z_L = \mathrm{i}\omega L$
Kondensator C	$Z_C = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega C}$

Kombination:

- Serienschaltung: $Z_{\text{ges}} = Z_1 + Z_2$
- Parallelschaltung: $\frac{1}{Z_{\text{ges}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$



Komplexe Impedanzen erlauben es, Wechselstromkreise wie Gleichstromkreise zu berechnen.

Impedanz – Rechenbeispiel

RLC-Serienschaltung: $R = 100\,\Omega$, $L = 0{,}1\,\mathrm{H}$, $C = 10\,\mu\mathrm{F}$, $\omega = 1000\,\mathrm{rad/s}$

Schritt 1: Einzelimpedanzen berechnen:

$$Z_R = 100$$
$$Z_L = \mathrm{i} \cdot 1000 \cdot 0{,}1 = 100\mathrm{i}$$
$$Z_C = \frac{1}{\mathrm{i} \cdot 1000 \cdot 10^{-5}} = \frac{1}{0{,}01\mathrm{i}} = -100\mathrm{i}$$

Schritt 2: Gesamtimpedanz:

$$Z_{\text{ges}} = Z_R + Z_L + Z_C = 100 + 100\mathrm{i} - 100\mathrm{i} = 100\,\Omega$$

Schritt 3: Interpretation:

- $|Z_{\text{ges}}| = 100\,\Omega$ (Scheinwiderstand)
- $\mathrm{Im}(Z_{\text{ges}}) = 0 \Rightarrow$ **Resonanzfall!**
- Phasenverschiebung: $\varphi = \arctan(0/100) = 0$ – Strom und Spannung sind in Phase.

Bei Resonanz ($\omega L = 1/(\omega C)$) wird der Blindwiderstand null – maximaler Stromfluss.

Impedanz-Netzwerke: Serien- und Parallelschaltung

Serienschaltung

$$Z_{\text{ser}} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

Beispiel: $R = 50\,\Omega$ in Serie mit $L = 0{,}1\,\text{H}$ bei $\omega = 100$:

$$Z = 50 + 10\text{i}$$

$|Z| = \sqrt{2600} \approx 51{,}0\,\Omega$
$\varphi = \arctan(10/50) \approx 11{,}3$

Parallelschaltung

$$Z_{\text{par}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Beispiel: $R = 100\,\Omega$ parallel mit $C = 10\,\mu\text{F}$ bei $\omega = 1000$:

$$Z_{\text{par}} = \frac{100 \cdot (-100\text{i})}{100 - 100\text{i}}$$

$= \frac{-10000\text{i}}{100(1-\text{i})} = 50 - 50\text{i}$

Allgemeine Methode: Komplexe Netzwerke schrittweise vereinfachen – genau wie bei Gleichstromwiderstaenden, aber mit komplexer Arithmetik.

Komplexe Impedanzen reduzieren Wechselstromberechnungen auf algebraische Operationen.

Harmonische Schwingung:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\big(A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}\big)$$

Vorteil der komplexen Schreibweise:

- Differenzieren wird einfach: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \mathrm{i}\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$
- Ueberlagerung: Summe von Schwingungen = Summe komplexer Zeiger
- Amplituden und Phasen lassen sich direkt ablesen

Gedaempfte Schwingung: $x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}(A\,\mathrm{e}^{(-\gamma+\mathrm{i}\omega)t+\mathrm{i}\varphi})$

Der komplexe Exponent $s = -\gamma + \mathrm{i}\omega$ codiert gleichzeitig:

- $\mathrm{Re}(s) = -\gamma$: Daempfungsrate (negativ = stabil)
- $\mathrm{Im}(s) = \omega$: Schwingungsfrequenz

Die komplexe Exponentialfunktion vereinfacht Schwingungsberechnungen drastisch.

Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Definition

Fuer ein Signal $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ ist die DFT:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\, kn/N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Inverse DFT: $x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, kn/N}$

Kern der DFT: Die N-ten Einheitswurzeln $\omega = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}/N}$:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\, \omega^{kn}$$

Anwendungen in Finance:

- **Zykluserkennung:** Saisonale Muster in Umsatzdaten identifizieren
- **Optionspreise:** Carr-Madan-Methode nutzt FFT zur Bewertung europaeischer Optionen
- **Spektralanalyse:** Frequenzgehalt von Rendite-Zeitreihen untersuchen

Die FFT (Fast Fourier Transform) berechnet die DFT in $O(N \log N)$ statt $O(N^2)$ – ein Meilenstein.

Fraktale: Mandelbrot- und Julia-Mengen

Mandelbrot-Menge

Die **Mandelbrot-Menge** M ist die Menge aller $c \in \mathbb{C}$, fuer die die Iteration

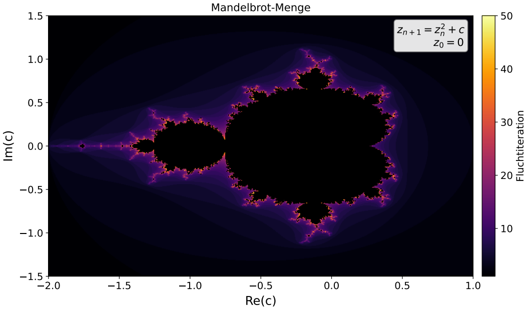
$$z_0 = 0, \qquad z_{n+1} = z_n^2 + c$$

beschraenkt bleibt (d.h. $|z_n|$ divergiert nicht).

Julia-Menge:
Fuer festes c die Menge der Startwerte z_0, fuer die $z_{n+1} = z_n^2 + c$ beschraenkt bleibt.

Zusammenhang:

- $c \in M \Leftrightarrow$ Julia-Menge von c ist zusammenhaengend
- $c \notin M \Leftrightarrow$ Julia-Menge ist "Staub"



Finance: Fraktale Geometrie (Mandelbrot, 1997) modelliert "raue" Finanzzeitreihen besser als die Normalverteilung.

Benoit Mandelbrot praegte auch den Begriff "Fraktal" – selbstaehnliche Strukturen auf allen Skalen.

Stabilitaetskriterium

Ein lineares dynamisches System $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ist **stabil**, wenn alle Eigenwerte von **A negativen Realteil** haben:

$$\text{Re}(\lambda_k) < 0 \quad \text{fuer alle } k$$

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$$

$\text{Re}(\lambda_{1,2}) = -1 < 0 \Rightarrow$ System ist **stabil** (gedaempfte Schwingung).

Anwendungen:

- **Oekonomische Modelle:** Ist ein Marktgleichgewicht stabil unter Stoerungen?
- **ARMA-Modelle:** Stationaritaet $\Leftrightarrow$ Wurzeln des char. Polynoms ausserhalb des Einheitskreises
- **Regelungstechnik:** Sind Regelkreise stabil? (Nyquist-Kriterium)

Komplexe Eigenwerte bestimmen, ob ein System schwingt ($\text{Im} \neq 0$) und ob es stabil ist ($\text{Re} < 0$).

Definition

Die **charakteristische Funktion** einer Zufallsvariable X ist

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f_X(x)\, \mathrm{d}x, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Warum komplex? $\phi_X(t)$ existiert **immer** (im Gegensatz zur momenterzeugendenFunktion).

Beispiele:

Verteilung	$\phi_X(t)$
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t - \sigma^2 t^2/2}$
$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$	$\frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}t}$
$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$	$\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)}$

Eigenschaft: $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$ fuer unabhaengige X, Y.

Die charakteristische Funktion ist die Fourier-Transformierte der Dichtefunktion.

Optionsbewertung via Fourier-Methoden

Carr-Madan-Methode (1999): Europaeische Call-Optionspreise via FFT:

$$C(K) = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^\infty e^{-iv \ln K}\, \psi(v)\, dv$$

wobei $\psi(v)$ von der charakteristischen Funktion des Log-Preises abhaengt.

Heston-Modell (1993): Stochastische Volatilitaet mit geschlossener Formel:

$$\phi_{\ln S_T}(u) = \exp\big(C(u,\tau) + D(u,\tau)v_0 + iu \ln S_0\big)$$

Die Funktionen C und D sind **explizit berechenbar** (komplexe Differentialgleichungen).

Vorteile der Fourier-Methode:

- Preise fuer **alle Strikes** gleichzeitig via FFT ($O(N \log N)$)
- Funktioniert fuer **jedes** Modell mit bekannter char. Funktion
- Numerisch stabil und schnell (wichtig fuer Kalibrierung)

Die Fourier-Methode revolutionierte die numerische Optionsbewertung ab ca. 2000.

Levy-Khintchine-Darstellung:

$$\phi_X(t) = \exp\left(\mathrm{i}\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1 - \mathrm{i}tx\,\mathbf{1}_{|x|<1}\right) \nu(\,\mathrm{d}x)\right)$$

Bedeutung der drei Teile:

- $\mathrm{i}\gamma t$: Drift (deterministischer Trend)
- $-\sigma^2 t^2/2$: Brownsche Bewegung (Diffusion)
- Integral: Spruenge (modelliert durch das Levy-Mass ν)

Populaere Levy-Modelle in Finance:

Modell	Eigenschaft
Variance Gamma	Keine Diffusion, endliche Aktivitaet
CGMY	Kontrollierbare Sprungaktivitaet
Normal Inverse Gaussian	Gute Anpassung an Renditeverteilungen

Alle diese Modelle werden ueber ihre **komplexe** charakteristische Funktion kalibriert!

Komplexe Zahlen sind das zentrale Werkzeug der modernen quantitativen Finance.

Python: Komplexe Zahlen Grundlagen

Python unterstuetzt komplexe Zahlen nativ:

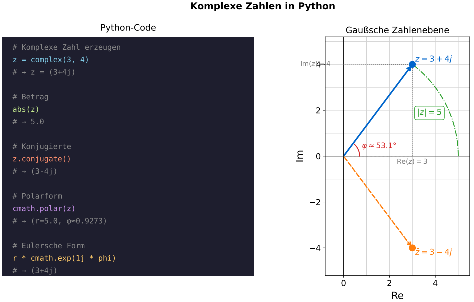
Grundoperationen

```
z1 = 3 + 4j
z2 = 1 - 2j

# Grundrechenarten
print(z1 + z2)    # (4+2j)
print(z1 * z2)    # (11-2j)
print(z1 / z2)    # (-1+2j)

# Real- und Imaginaerteil
print(z1.real)     # 3.0
print(z1.imag)     # 4.0

# Betrag und Konjugierte
print(abs(z1))          # 5.0
print(z1.conjugate())  # (3-4j)
```



Python verwendet j statt i – Konvention aus der Elektrotechnik.

cmath – Komplexe Mathematik

Das Modul `cmath` erweitert `math` fuer komplexe Zahlen.

```
import cmath

z = 3 + 4j

# Polarform
r, phi = cmath.polar(z)
print(f"|z| = {r}")          # 5.0
print(f"phi = {phi:.4f}")  # 0.9273

# Zurueck zur Normalform
w = cmath.rect(5, 0.9273)
print(w)  # (3.0000+4.0000j)

# Euler-Formel
print(cmath.exp(1j * cmath.pi))
# (-1+1.2246e-16j) ~ -1
```

Wichtige Funktionen:

`polar(z)`	$\to (r, \varphi)$
`rect(r,`φ`)`	$\to z$
`phase(z)`	$\to \varphi$
`exp(z)`	e^z
`log(z)`	$\ln(z)$
`sqrt(z)`	$\sqrt{z}$
`sin(z)`	$\sin(z)$
`cos(z)`	$\cos(z)$

Vorteil: `cmath.sqrt(-1)` liefert `1j` statt Fehler.

`cmath` **ist in der Standardbibliothek – kein** `pip install` **noetig.**

Python: numpy mit komplexen Arrays

numpy – Vektorisierte komplexe Arithmetik

numpy unterstuetzt den Datentyp complex128 fuer effiziente Array-Operationen.

```
import numpy as np

# Komplexes Array
z = np.array([1+2j, 3-1j, -2+4j, 5+0j])

# Elementweise Operationen
print(np.abs(z))            # [2.236, 3.162, 4.472, 5.0]
print(np.angle(z))          # [1.107, -0.322, 2.034, 0.0]
print(np.real(z))           # [1, 3, -2, 5]
print(np.imag(z))           # [2, -1, 4, 0]
print(np.conj(z))           # [1-2j, 3+1j, -2-4j, 5-0j]

# DFT mit numpy
signal = np.array([1, 2, 1, -1, 1.5, 0.5])
spectrum = np.fft.fft(signal)
print(np.abs(spectrum))     # Amplituden der Frequenzkomponenten
```

Eigenwerteberechnung: `np.linalg.eig(A)` gibt auch komplexe Eigenwerte zurueck.

Python: Vollstaendiges Impedanz-Beispiel

Aufgabe

Berechne die Gesamtimpedanz eines RLC-Netzwerks: $R = 200\,\Omega$ in Serie mit der Parallelschaltung von $L = 50\,\text{mH}$ und $C = 2\,\mu\text{F}$ bei $f = 1000\,\text{Hz}$.

```
import cmath, math

R = 200          # Ohm
L = 50e-3        # Henry
C = 2e-6         # Farad
f = 1000         # Hz
omega = 2 * math.pi * f

Z_R = R
Z_L = 1j * omega * L            # = 314.16j
Z_C = 1 / (1j * omega * C)      # = -159.15j

# Parallelschaltung L || C
Z_par = (Z_L * Z_C) / (Z_L + Z_C)

# Gesamtimpedanz (Serie)
Z_ges = Z_R + Z_par
```

Beweis: Dreiecksungleichung

Zu zeigen: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Beweis: Wir quadrieren beide Seiten (beide ≥ 0):

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

Nun ist $\mathrm{Re}(w) \leq |w|$ fuer alle $w \in \mathbb{C}$, also:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

Wurzelziehen (beide Seiten ≥ 0) liefert $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. $\square$

Gleichheit: Genau dann, wenn $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}|$, d.h. $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, also $z_2 = \lambda z_1$ mit $\lambda \geq 0$.

Dieser Beweis nutzt geschickt $|z|^2 = z\bar{z}$ **und** $\mathrm{Re}(w) \leq |w|$.

Beweis: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Zu zeigen: $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ fuer alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Beweis (direkt): Sei $z_1 = a + b\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\mathrm{i}$. Dann:

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$$

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \end{aligned}$$

Wurzelziehen liefert $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$. $\square$

Eleganter Beweis (mit Konjugierten):

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = |z_1|^2\,|z_2|^2$$

Die Multiplikativitaet ist aequivalent zur Lagrange-Identitaet $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

Herleitung: Eulersche Formel via Potenzreihen

Idee: Setze $\mathrm{i}\varphi$ in die Potenzreihe der Exponentialfunktion ein.

Potenzreihen:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Einsetzen von $x = \mathrm{i}\varphi$:

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n \varphi^n}{n!} \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \cdots\right)}_{\cos\varphi} + \mathrm{i} \underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots\right)}_{\sin\varphi} \end{aligned}$$

Denn $\mathrm{i}^0 = 1$, $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = 1, \ldots$ trennt gerade/ungerade Terme.

Ergebnis: $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ $\square$

Dieser "Beweis" setzt voraus, dass Potenzreihen fuer komplexe Argumente konvergieren – was man zeigen kann.

Beweis: Rechenregeln der Konjugation

Zu zeigen: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Beweis: Sei $z_1 = a + b\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\mathrm{i}$. Dann:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i} \\ \overline{z_1 z_2} &= (ac - bd) - (ad + bc)\mathrm{i} \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (a - b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i}) \\ &= (ac - bd) + (-ad - bc)\mathrm{i} = (ac - bd) - (ad + bc)\mathrm{i} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\square$

Folgerung (Induktion): $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.

Damit folgt: $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$ fuer jedes Polynom p mit reellen Koeffizienten. Daraus ergibt sich direkt der Satz ueber konjugierte Nullstellen.

Die Konjugation ist ein Ringautomorphismus – sie respektiert Addition und Multiplikation.

Numerische Aspekte: Gleitkommaarithmetik in $\mathbb{C}$

Komplexe Zahlen im Computer: Ein `complex128` besteht aus zwei `float64`-Werten.

Typische Fehlerquellen:

1. **Rundungsfehler:** $e^{i\pi} \neq -1$ exakt, sondern $\approx -1 + 1{,}22 \times 10^{-16} i$
2. **Ausloesung:** $z_1 - z_2$ fuer $z_1 \approx z_2$ (Stellenverlust)
3. **Overflow/Underflow:** $|z|$ kann ueberlaufen, obwohl z darstellbar ist

Sichere Betragsberechnung:

- **Naiv:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – Overflow moeglich bei grossen a, b
- **Besser:** Skalierung: $|z| = |a| \sqrt{1 + (b/a)^2}$ falls $|a| \geq |b|$
- Python: `abs(z)` und `numpy.abs(z)` verwenden intern die sichere Variante

Argument: `math.atan2(b, a)` statt `math.atan(b/a)` – vermeidet Division durch Null und liefert den korrekten Quadranten.

Numerische Stabilitaet ist bei komplexer Arithmetik besonders wichtig – doppelte Fehlerquellen!

Numerische Berechnung: FFT

Cooley-Tukey-Algorithmus (1965):
Rekursive Zerlegung der DFT der Laenge $N = 2^m$:

$$X_k = \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n}\,\omega^{2nk}}_{\text{gerade Indizes}} + \underbrace{\omega^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1}\,\omega^{2nk}}_{\text{ungerade Indizes}}$$

Komplexitaet:

- Naive DFT: $O(N^2)$ komplexe Multiplikationen
- FFT: $O(N \log N)$ – bei $N = 10^6$ ein Faktor $\approx 50\,000$!

Numerische Aspekte:

- **Butterfly-Operationen:** Jeder Schritt kombiniert zwei Werte mit einer Einheitswurzel
- **Twiddle-Faktoren:** $\omega^k = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} k/N}$ werden vorberechnet
- **In-Place:** Speichereffizient durch Bit-Reversal-Permutation

Praxis: `numpy.fft.fft()` verwendet optimierte C-Bibliotheken (FFTPACK/FFTW).

Die FFT gilt als einer der wichtigsten Algorithmen des 20. Jahrhunderts.

Typische Fehler und Fallstricke

Fehler	Falsch	Richtig
$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$	$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$	$\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}^2 = -1$
$\mathrm{Im}(z)$ **ist komplex**	$\mathrm{Im}(3+4\mathrm{i}) = 4\mathrm{i}$	$\mathrm{Im}(3+4\mathrm{i}) = 4 \in \mathbb{R}$
Argument ohne Quadrant	$\arg(-1+\mathrm{i}) = \arctan(-1)$	$\arg(-1+\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{4}$
Ordnung auf $\mathbb{C}$	$3+4\mathrm{i} > 1+2\mathrm{i}$	Nicht definiert!
$\lvert z_1 + z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert$	Stets Gleichheit	Nur wenn gleiche Richtung
Division ohne Konjugierte	$\frac{1}{1+\mathrm{i}} = 1 - \mathrm{i}$	$\frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{2}$

Numerische Fallstricke:

- `cmath.sqrt(-1)` $\rightarrow$ `1j` ✓, aber `math.sqrt(-1)` $\rightarrow$ `ValueError`
- Vergleich: `z1 == z2` ist bei Gleitkomma unzuverlaessig; besser `abs(z1-z2) < eps`
- `numpy.roots()` kann bei schlecht konditionierten Polynomen ungenau sein

Die meisten Fehler entstehen durch unbedachtes Uebertragen reeller Regeln auf $\mathbb{C}$.

Geschichte der komplexen Zahlen

16. Jahrhundert – Die Anfaenge:

- **Cardano (1545):** Kubische Formel erzwingt $\sqrt{-1}$ – nannte es "mentale Tortur"
- **Bombelli (1572):** Erste systematische Rechenregeln fuer $\sqrt{-1}$

17.–18. Jahrhundert – Akzeptanz:

- **Descartes (1637):** Praegte "imaginaer" (abwertend)
- **Euler (1748):** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$
- **Wessel (1797):** Geometrische Darstellung als Ebene

19. Jahrhundert – Triumph:

- **Gauss (1799):** Fundamentalsatz der Algebra (4 Beweise)
- **Argand (1806):** Argand-Diagramm (= Gausssche Ebene)
- **Cauchy (1825):** Komplexe Analysis (Integralsatz)
- **Riemann (1851):** Riemannsche Flaechen
- **Hamilton (1843):** Quaternionen $\mathbb{H}$ als 4D-Verallgemeinerung

20. Jahrhundert:

- Quantenmechanik ($\psi \in \mathbb{C}$)
- Signalverarbeitung (FFT, 1965)
- Fraktale (Mandelbrot, 1980er)

Vom "unmoeglich" zum unverzichtbar – die komplexen Zahlen brauchten 400 Jahre bis zur Akzeptanz.

Euler, Gauss, Cauchy – Wegbereiter

Leonhard Euler (1707–1783):

- Praegte die Notation $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$
- Eulersche Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$
- Eulersche Identitaet $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$
- Berechnete $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\pi/2}$

Carl Friedrich Gauss (1777–1855):

- "Princeps mathematicorum"
- 4 Beweise des Fundamentalsatzes
- Praegte "Gausssche Zahlenebene"
- Gausssche ganze Zahlen $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857):

- Begruender der komplexen Analysis
- Cauchy-Integralsatz und -formel
- Residuensatz (maechtiges Berechnungswerkzeug)
- Cauchysche Integralformel:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

Diese Formel bestimmt eine holomorphe Funktion **vollstaendig** aus ihren Randwerten!

Bernhard Riemann (1826–1866):

- Riemannsche Flaechen
- Riemannsche Vermutung (ζ-Funktion)

Diese vier Mathematiker schufen die theoretischen Grundlagen der komplexen Analysis.

Zahlbereichserweiterungen – Der grosse Bogen

Jede Erweiterung loest ein Problem und "kostet" etwas:

Erweiterung	Motivation	Gewinn	Verlust
$\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$	$3 - 5 = ?$	Subtraktion	"Natuerlichkeit"
$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$	$3/5 = ?$	Division	Abzaehlbarkeit bleibt
$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$	$\sqrt{2} = ?$	Vollstaendigkeit	Abzaehlbarkeit
$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$	$\sqrt{-1} = ?$	Alg. Abgeschlossenheit	Ordnung

Gibt es noch "groessere" Zahlsysteme?

- **Quaternionen** $\mathbb{H}$ (Hamilton, 1843): 4D, nicht kommutativ ($i\mathbf{j} \neq \mathbf{j}i$)
- **Oktonionen** $\mathbb{O}$: 8D, nicht assoziativ
- **Satz von Hurwitz:** $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ sind die einzigen **normten Divisionsalgebren**

$\mathbb{C}$ ist der "sweet spot": kommutativ, assoziativ, algebraisch abgeschlossen.

Nach $\mathbb{C}$ kann man keine neuen "Zahlen" mehr einfuehren, ohne grundlegende Rechenregeln zu verlieren.

Formelsammlung – Komplexe Zahlen

Konzept	Formel
Normalform	$z = a + b\mathrm{i}, \quad a = \mathrm{Re}(z),\ b = \mathrm{Im}(z)$
Polarform	$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad r = \lvert z\rvert,\ \varphi = \arg(z)$
Betrag	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$
Konjugierte	$\overline{z} = a - b\mathrm{i}, \quad z \cdot \overline{z} = \lvert z\rvert^2$
Addition	$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$
Multiplikation	$r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{\lvert z_2\rvert^2}$
De Moivre	$z^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$
***n*-te Wurzel**	$w_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi k)/n}, \quad k = 0, \ldots, n-1$
Euler	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$
Dreiecksungl.	$\lvert z_1 + z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$

Diese Formeln bilden das Grundgeruest – sie sollten sicher beherrscht werden.

Lernziele – Selbsttest

Nach dieser Vorlesung sollten Sie:

1. Komplexe Zahlen in Normal- und Polarform darstellen und ineinander umrechnen
2. Alle Grundrechenarten $(+, -, \cdot, \div)$ sicher durchfuehren
3. Betrag, Konjugierte und deren Eigenschaften anwenden
4. Die Eulersche Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ kennen und nutzen
5. n-te Wurzeln und Einheitswurzeln berechnen
6. Den Fundamentalsatz der Algebra und seine Konsequenzen kennen
7. Holomorphie und die Cauchy-Riemann-Gleichungen verstehen
8. Anwendungen in Wechselstromtechnik und Fourier-Analyse bearbeiten
9. Charakteristische Funktionen und Fourier-Methoden in Finance einordnen
10. Komplexe Arithmetik in Python (`cmath`, `numpy`) programmieren

Testfragen:

- Berechnen Sie $(2 - \mathrm{i})^3$ in Normalform.
- Bestimmen Sie alle vierten Wurzeln von -16.
- Fuer welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z = \overline{z}$?
- Ist $f(z) = |z|^2$ holomorph?

Koennen Sie alle Testfragen beantworten? Falls nicht, wiederholen Sie die entsprechenden Abschnitte.

Kernkonzepte – Zusammenfassung

Darstellungen:

- Normalform $z = a + b\mathrm{i}$
- Polarform $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$
- $+/-$ in Normalform, $\cdot/\div$ in Polarform

Struktur:

- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Koerper
- Algebraisch abgeschlossen (Fundamentalsatz)
- Nicht geordnet ($\mathrm{i} > 0$ fuehrt zum Widerspruch)

Analysis:

- Euler: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$
- Holomorphie $\Leftrightarrow$ Cauchy-Riemann
- Konforme Abbildungen

Anwendungen Technik:

- Impedanz: $Z = R + \mathrm{i}X$
- Schwingungen: $\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}$
- DFT/FFT: Frequenzanalyse
- Stabilitaet: $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$

Anwendungen Finance:

- Charakteristische Funktionen
- Carr-Madan (Optionsbewertung via FFT)
- Heston-Modell
- Levy-Prozesse

Python:

- `complex`, `cmath`, `numpy`
- `numpy.fft` fuer FFT

Komplexe Zahlen verbinden Algebra, Geometrie, Analysis und ihre Anwendungen.

Ausblick

Wohin fuehren komplexe Zahlen weiter?

Mathematik:

- Komplexe Analysis (Cauchy, Residuen)
- Konforme Abbildungen
- Riemannsche Flaechen
- Algebraische Geometrie

Signalverarbeitung:

- Laplace- und z-Transformation
- Digitale Filter (IIR, FIR)
- Wavelet-Analyse

Quantitative Finance:

- Optionsbewertung via Fourier (Carr-Madan)
- Charakteristische Funktionen
- Stochastische Volatilitaetsmodelle (Heston)

Physik / Technik:

- Quantenmechanik ($\psi \in \mathbb{C}$)
- Elektromagnetismus (Maxwell)
- Regelungstechnik (Bode, Nyquist)

Fazit

Komplexe Zahlen sind weit mehr als "imaginaer" – sie sind ein **unverzichtbares Werkzeug** in Mathematik, Naturwissenschaften, Technik und quantitativer Finance.

Von $\mathrm{i}^2 = -1$ zu Quantenmechanik und Optionspreisen – komplexe Zahlen sind ueberall.