

Komplexe Zahlen

Erweiterte Vorlesung

BSc Analysis

- 1 Grundlagen
- 2 Einfuehrung
- 3 Normalform
- 4 Grundoperationen
- 5 Betrag und Konjugierte
- 6 Polarform

- 7 Wurzeln
- 8 Anwendungen
- 9 Zusammenfassung
- 10 Algebraische Struktur
- 11 Beweise
- 12 Erweiterte Anwendungen
- 13 Python vertieft

Diese erweiterte Vorlesung umfasst algebraische Strukturen, Beweise, vertiefte Anwendungen und Python-Programmierung.

Das Problem

Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat **keine reelle Loesung**, denn $x^2 \geq 0$ fuer alle $x \in \mathbb{R}$.

Idee (Euler, Gauss): Fuehre eine neue Zahl i ein mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1 \quad \implies \quad i = \sqrt{-1}$$

Damit gilt: $x^2 + 1 = 0$ hat die Loesungen $x = i$ und $x = -i$.

Historische Meilensteine:

- 1545: Cardano – kubische Gleichungen
- 1572: Bombelli – Rechenregeln fuer $\sqrt{-1}$
- 1748: Euler – $e^{i\pi} + 1 = 0$
- 1799: Gauss – Fundamentalsatz der Algebra

Warum relevant fuer Business/Finance?

- Fourier-Analyse: Erkennung von Zyklen in Zeitreihen
- Stabilitaet: Eigenwerte dynamischer Systeme
- Signalverarbeitung: Filterdesign, Frequenzanalyse
- Elektrotechnik: Wechselstrom und Impedanz

Komplexe Zahlen erweitern \mathbb{R} und schliessen eine fundamentale algebraische Luecke.

Definition

Die **imaginaere Einheit** i ist definiert durch $i^2 = -1$.

Potenzen von i :

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \dots$$

Perioditaet: Die Potenzen wiederholen sich mit Periode 4:

$$i^n = i^{n \bmod 4}$$

Beispiele:

- $i^{42} = i^{42 \bmod 4} = i^2 = -1$
- $i^{100} = i^{100 \bmod 4} = i^0 = 1$
- $i^{2025} = i^{2025 \bmod 4} = i^1 = i$

Die Potenzen von i bilden die zyklische Gruppe $\{1, i, -1, -i\}$ – ein Kreis in der Zahlenebene.

Definition

Die Menge der **komplexen Zahlen** ist

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Zahlenmengen-Hierarchie:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Jede reelle Zahl ist komplex:

- $5 = 5 + 0i \in \mathbb{C}$
- $-3,7 = -3,7 + 0i \in \mathbb{C}$
- $\pi = \pi + 0i \in \mathbb{C}$

Rein imaginaere Zahlen:

- $3i = 0 + 3i$
- $-2i = 0 + (-2)i$
- Die "Null" ist sowohl reell als auch imaginaer:
 $0 = 0 + 0i$

Gleichheit: $a + bi = c + di \iff a = c$ und $b = d$

\mathbb{C} ist die "kleinste" Erweiterung von \mathbb{R} , in der jede polynomiale Gleichung loesbar ist.

Normalform $z = a + bi$

Normalform (kartesische Darstellung)

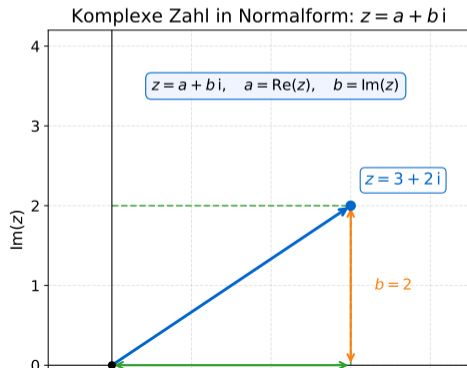
Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$z = a + bi \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Dabei heisst $a = \operatorname{Re}(z)$ der **Realteil** und $b = \operatorname{Im}(z)$ der **Imaginarteil**.

Beispiele:

z	$\operatorname{Re}(z)$	$\operatorname{Im}(z)$
$3 + 4i$	3	4
$-2 - 5i$	-2	-5
7	7	0
$-3i$	0	-3
0	0	0



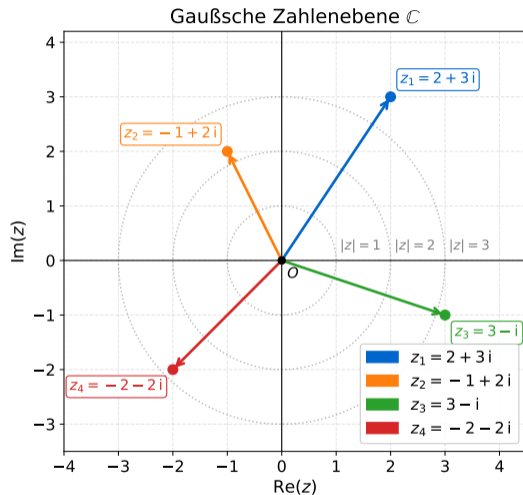
Geometrische Darstellung

Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ entspricht einem Punkt (a, b) in der Ebene:

- **x-Achse** = reelle Achse ($\text{Im}(z) = 0$)
- **y-Achse** = imaginaere Achse ($\text{Re}(z) = 0$)

Beispiele in der Ebene:

- $z_1 = 3 + 2i \hat{=} (3, 2)$
- $z_2 = -1 + 4i \hat{=} (-1, 4)$
- $z_3 = -2 - 3i \hat{=} (-2, -3)$



Finance-Analogie: Ein Punkt in der Gaußschen Ebene codiert zwei Informationen gleichzeitig – wie ein Rendite-Risiko-Paar (r, σ) in der Portfoliotheorie.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) etablierte die geometrische Interpretation komplexer Zahlen

Notation

Fuer $z = a + bi \in \mathbb{C}$ sind Re und Im Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Re}(z) = a, \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

Wichtige Eigenschaften:

1. $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \cdot i$
2. $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$ (Linearitaet)
3. $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$
4. $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0$
5. z rein imaginaer $\iff \operatorname{Re}(z) = 0$

Achtung: $\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z)$ gelten nur fuer $\lambda \in \mathbb{R}$!

Fuer komplexes λ gilt das i.A. **nicht**:

$$\operatorname{Re}(i \cdot (1 + i)) = \operatorname{Re}(i - 1) = -1 \neq i \cdot \operatorname{Re}(1 + i) = i$$

Re und Im sind \mathbb{R} -linear, aber nicht \mathbb{C} -linear – ein haeufiger Fehler.

Gleichheit

$$z_1 = z_2 \iff \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \text{ und } \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$$

Anwendung: Koeffizientenvergleich

Bestimme $x, y \in \mathbb{R}$ so, dass $(2x - 3) + (y + 1)i = 5 + 4i$.

Loesung: Vergleich von Real- und Imaginarteil:

$$\operatorname{Re} : 2x - 3 = 5 \Rightarrow x = 4, \quad \operatorname{Im} : y + 1 = 4 \Rightarrow y = 3$$

Beispiel aus der Finanzmathematik:

In der Eigenanalyse von Uebergangsmatrizen (z.B. Kreditrating-Migration) koennen **komplexe Eigenwerte** $\lambda = a + bi$ auftreten. Dann beschreiben:

- $\operatorname{Re}(\lambda) = a$: Wachstums- oder Zerfallsrate
- $\operatorname{Im}(\lambda) = b$: Oszillationsfrequenz

Koeffizientenvergleich: Zwei komplexe Gleichungen liefern stets zwei reelle Gleichungen.

Rechenregel

Fuer $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$:

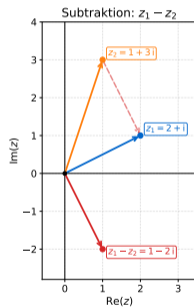
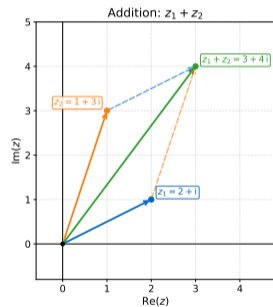
$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i, \quad z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Beispiel:

$$(3 + 2i) + (1 - 5i) = 4 - 3i$$

$$(3 + 2i) - (1 - 5i) = 2 + 7i$$

Geometrisch: Addition = Vektoraddition in der Gausschen Ebene (Parallelogrammregel).



Rechengesetze:

- Kommutativitaet: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- Assoziativitaet: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
- Neutrales Element: $z + 0 = z$

Rechenregel

Fuer $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Herleitung: Ausmultiplizieren mit $i^2 = -1$:

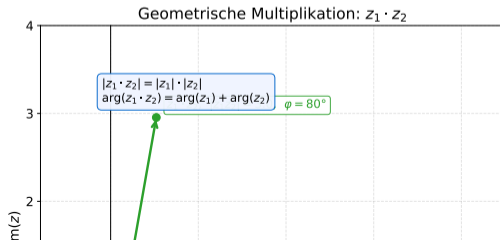
$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned}(2 + 3i)(4 - i) &= (8 + 3) + (-2 + 12)i \\ &= 11 + 10i\end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}(1 + i)^2 &= 1 + 2i + i^2 \\ &= 1 + 2i - 1 = 2i\end{aligned}$$



Rechenregel

Für $z_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Trick: Erweitern mit der **konjugierten** Zahl $\bar{z}_2 = c - di$ beseitigt i im Nenner.

Beispiel:

$$\frac{3 + 4i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{(3 - 8) + (6 + 4)i}{1 + 4} = \frac{-5 + 10i}{5} = -1 + 2i$$

Probe: $(-1 + 2i)(1 - 2i) = (-1 + 2) + (2 + 2)i = \dots$

Korrekt: $(-1)(1) + (-1)(-2i) + (2i)(1) + (2i)(-2i) = -1 + 2i + 2i + 4 = 3 + 4i \checkmark$

Division = Erweitern mit der Konjugierten. Dieses Prinzip taucht auch bei der Rationalisierung auf.

Addition:

1. Kommutativ: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. Assoziativ: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. Neutrales Element: $z + 0 = z$
4. Inverses: $z + (-z) = 0$

Multiplikation:

1. Kommutativ: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
2. Assoziativ: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
3. Neutrales Element: $z \cdot 1 = z$
4. Inverses: $z \cdot z^{-1} = 1$ fuer $z \neq 0$

Distributivgesetz: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Fazit

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ erfuehlt alle **Koerperaxiome** – \mathbb{C} ist ein Koerper.

Die Rechenregeln in \mathbb{C} sind dieselben wie in \mathbb{R} – nur die Interpretation aendert sich.

Die klassischen Formeln gelten auch fuer komplexe Zahlen:

$$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$$

$$(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2$$

$$(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2 - z_2^2$$

Beispiel 1: $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$

Beispiel 2: $(2 + i)(2 - i) = 4 - i^2 = 4 + 1 = 5$

Beispiel 3 (Faktorisierung):

$$z^2 + 4 = z^2 - (2i)^2 = (z + 2i)(z - 2i)$$

In \mathbb{R} ist $z^2 + 4$ irreduzibel – in \mathbb{C} zerlegbar!

Anwendung: Partialbruchzerlegung bei Laplace-Transformation in der Regelungstechnik nutzt diese Faktorisierung.

Die dritte binomische Formel liefert direkt $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ – ein zentrales Werkzeug.

Loesungsformel

$az^2 + bz + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Drei Faelle:

Diskriminante	Loesungen	Typ
$D = b^2 - 4ac > 0$	zwei reelle	$z_{1,2} \in \mathbb{R}$
$D = 0$	eine doppelte reelle	$z_1 = z_2 \in \mathbb{R}$
$D < 0$	zwei konjugiert komplexe	$z_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

Beispiel: $z^2 + 2z + 5 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

Beachte: Die Loesungen treten als **konjugiert komplexes Paar** auf: $z_2 = \overline{z_1}$.

Konjugiert komplexe Loesungen treten immer paarweise auf – bei reellen Koeffizienten.

Die konjugiert komplexe Zahl \bar{z}

Definition

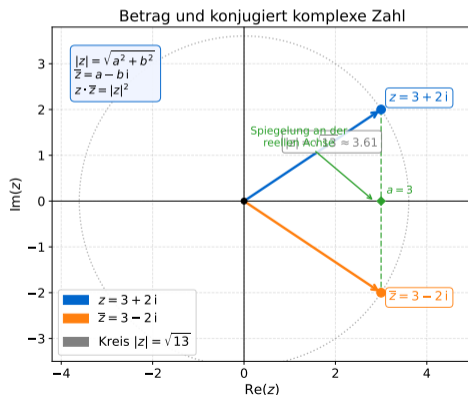
Fuer $z = a + bi$ ist die **konjugiert komplexe Zahl**:

$$\bar{z} = a - bi$$

Geometrisch: Spiegelung an der reellen Achse.

Rechenregeln:

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4. $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$
5. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$
6. $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$
7. $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$



Definition

Fuer $z = a + bi$ ist der **Betrag** (Modulus):

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Geometrisch: Abstand vom Ursprung in der Gausschen Ebene.

Beispiele:

- $|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$
- $|-1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
- $|5| = 5, \quad |-3i| = 3$

Rechenregeln:

1. $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (Multiplikativitaet)
3. $|z_1/z_2| = |z_1| / |z_2|$ ($z_2 \neq 0$)
4. $|\bar{z}| = |z|$

Der Betrag misst den "Abstand zur Null" – fuer $z \in \mathbb{R}$ stimmt er mit dem reellen Betrag ueberein.

Satz (Dreiecksungleichung)

Fuer alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Gleichheit genau dann, wenn z_1 und z_2 in dieselbe Richtung zeigen.

Umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$|z_1 - z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|$$

Geometrische Deutung:

In einem Dreieck ist jede Seite **höchstens so lang** wie die Summe der anderen beiden.

Finanz-Beispiel: Portfolio-Risiko $\sigma_P \leq \sigma_1 + \sigma_2$ (ohne Korrelation). Die Dreiecksungleichung begründet formal den **Diversifikationseffekt**: Das Gesamtrisiko ist kleiner oder gleich der Summe der Einzelrisiken.

Die Dreiecksungleichung ist fundamental fuer Konvergenzbeweise und Abschaetzungen in der Analysis.

Kreisgleichung

Der Kreis mit Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

Spezialfaelle:

- $|z| = 1$: Einheitskreis um den Ursprung
- $|z - z_0| < r$: offene Kreisscheibe (ε -Umgebung von z_0)
- $|z - z_0| \leq r$: abgeschlossene Kreisscheibe

Beispiel: $|z - (1 + i)| = 2$ beschreibt den Kreis mit Mittelpunkt $1 + i$ und Radius 2.

Business-Kontext: In der Stabilitaetsanalyse von ARMA-Modellen muessen alle Wurzeln des charakteristischen Polynoms **innerhalb des Einheitskreises** $|z| < 1$ liegen, damit das Modell stationaer ist.

$|z - z_0| = r$ ist die komplexe Schreibweise der Kreisgleichung $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Polarform

Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ lässt sich schreiben als

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \operatorname{cis}(\varphi)$$

mit $r = |z| > 0$ und dem **Argument** $\varphi = \arg(z)$.

Umrechnung:

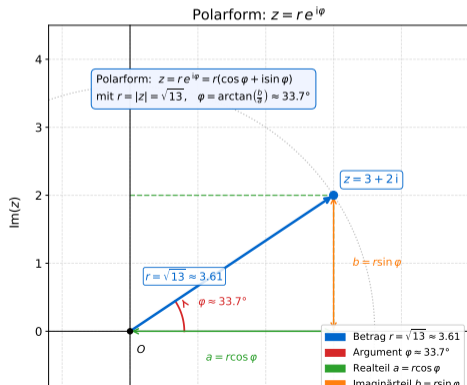
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi$$

Achtung beim Argument:

$\varphi = \arctan(b/a)$ gilt nur fuer $a > 0$.

Fuer $a < 0$: Quadrantenkorrektur $\pm\pi$.



Die Eulersche Formel

Satz (Euler, 1748)

Fuer alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:

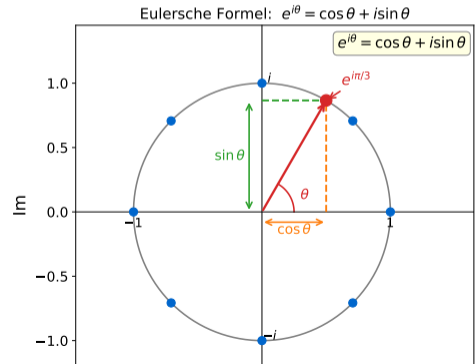
$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Damit hat jede komplexe Zahl die **Exponentialform**:

$$z = r e^{i\varphi} \quad \text{mit } r = |z|, \varphi = \arg(z)$$

Spezialfaelle:

$$\begin{array}{ll} e^{i \cdot 0} = 1 & e^{i\pi/2} = i \\ e^{i\pi} = -1 & e^{i \cdot 3\pi/2} = -i \\ e^{2\pi i} = 1 & e^{-i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) \end{array}$$



Multiplikation und Division in Polarform

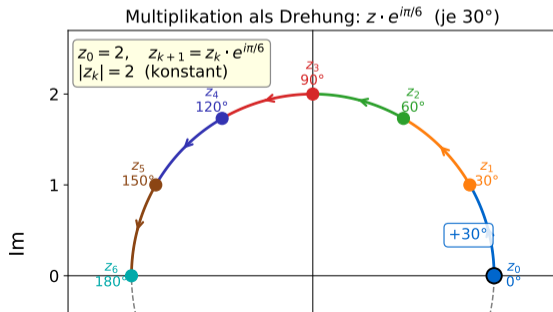
Rechenregeln

Fuer $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Geometrisch:

- **Multiplikation:** Betraege multiplizieren, Winkel addieren
- **Division:** Betraege dividieren, Winkel subtrahieren



Satz (de Moivre)

Fuer $z = r e^{i\varphi}$ und $n \in \mathbb{Z}$:

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Beispiel 1: $(1 + i)^8$

- $|1 + i| = \sqrt{2}$, $\arg(1 + i) = \pi/4$
- $(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 \cdot e^{i \cdot 8 \cdot \pi/4} = 16 e^{2\pi i} = 16$

Beispiel 2: Berechne $\cos(3\varphi)$ und $\sin(3\varphi)$ mithilfe von de Moivre:

$$\begin{aligned}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 &= \cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi) \\ &= (\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi) + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi)\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die **Dreifachwinkelformeln!**

De Moivre macht Potenzierung trivial und liefert trigonometrische Identitaeten als "Nebenprodukt".

Drei Darstellungsformen im Vergleich

Form	Schreibweise	Vorteil	Nachteil
Normalform	$z = a + bi$	Addition/Subtraktion einfach	Multiplikation aufwaendig
Trigonometrisch	$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$	Anschaulich	Notation lang
Exponentialform	$z = r e^{i\varphi}$	Mult./Div./Potenz einfach	Addition aufwaendig

Zusammenhang:

$$\underbrace{a + bi}_{\text{Normalform}} = \underbrace{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{\text{trigonometrisch}} = \underbrace{r e^{i\varphi}}_{\text{exponential}}$$

mit $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arctan(b/a)$, $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$.

Faustregel:

+/- \rightarrow Normalform — \cdot / \div /Potenz \rightarrow Polarform

Die Wahl der Darstellung haengt von der Operation ab – Flexibilitaet ist der Schluessel.

Satz

Jede komplexe Zahl $z = r e^{i\varphi} \neq 0$ hat genau n verschiedene n -te Wurzeln:

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi+2\pi k)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Geometrisch: Die n Wurzeln bilden ein **regelmässiges n -Eck** auf dem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{r}$.

Beispiel: Dritte Wurzeln von $z = 8$:

$$w_k = 2 e^{i \cdot 2\pi k/3}, \quad k = 0, 1, 2$$

- $w_0 = 2$ (reelle Wurzel)
- $w_1 = 2 e^{2\pi i/3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i$
- $w_2 = 2 e^{4\pi i/3} = -1 - \sqrt{3}i$

In \mathbb{C} hat jede Polynomgleichung n -ten Grades genau n Loesungen (mit Vielfachheit).

Definition

Die n -ten Einheitswurzeln sind die Lösungen von $z^n = 1$:

$$\omega_k = e^{2\pi i k/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Mit der primitiven Einheitswurzel $\omega = e^{2\pi i/n}$ gilt: $\omega_k = \omega^k$.

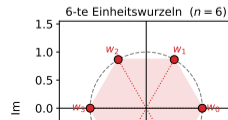
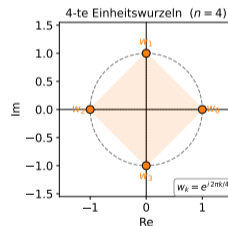
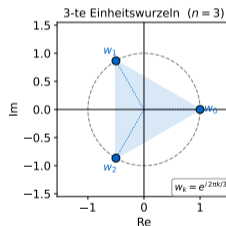
Beispiele:

- $n = 2$: $\{1, -1\}$
- $n = 3$: $\{1, \omega, \omega^2\}$ mit $\omega = e^{2\pi i/3}$
- $n = 4$: $\{1, i, -1, -i\}$

Wichtige Eigenschaft:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$$

n -te Einheitswurzeln: $w^n = 1$



Jedes reelle Polynom lässt sich in \mathbb{C} vollständig in Linearfaktoren zerlegen:

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

Beispiel 1: $z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$

Beispiel 2: $z^3 - 1 = (z - 1)(z - \omega)(z - \omega^2)$ mit $\omega = e^{2\pi i/3}$

Reelle Faktorisierung:

Konjugiert komplexe Nullstellen $\alpha \pm \beta i$ ergeben einen **reellen quadratischen Faktor**:

$$(z - (\alpha + \beta i))(z - (\alpha - \beta i)) = z^2 - 2\alpha z + (\alpha^2 + \beta^2)$$

Beispiel: $z^2 + 2z + 5$ hat Nullstellen $-1 \pm 2i$, also $z^2 + 2z + 5 = (z - (-1 + 2i))(z - (-1 - 2i))$.

Komplexe Wurzeln machen die vollständige Faktorisierung möglich – Grundlage der Algebra.

Komplexe Impedanz

In der Wechselstromtechnik wird die Impedanz als komplexe Zahl beschrieben:

$$Z = R + iX$$

mit Wirkwiderstand $R = \operatorname{Re}(Z)$ und Blindwiderstand $X = \operatorname{Im}(Z)$.

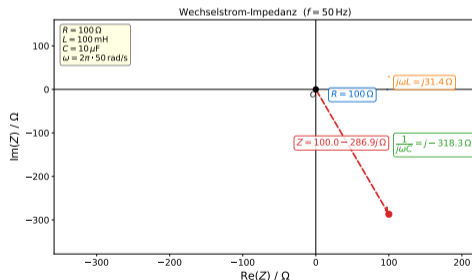
Bauelemente:

Bauteil	Impedanz
Widerstand R	$Z_R = R$
Spule L	$Z_L = i\omega L$
Kondensator C	$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$

Kombination:

- Serienschaltung: $Z_{\text{ges}} = Z_1 + Z_2$
- Parallelschaltung: $\frac{1}{Z_{\text{ges}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$

Komplexe Impedanzen erlauben es, Wechselstromkreise wie Gleichstromkreise zu berechnen.



RLC-Serienschaltung: $R = 100 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$, $C = 10 \mu\text{F}$, $\omega = 1000 \text{ rad/s}$

Schritt 1: Einzelimpedanzen berechnen:

$$Z_R = 100$$

$$Z_L = i \cdot 1000 \cdot 0,1 = 100i$$

$$Z_C = \frac{1}{i \cdot 1000 \cdot 10^{-5}} = \frac{1}{0,01i} = -100i$$

Schritt 2: Gesamtimpedanz:

$$Z_{\text{ges}} = Z_R + Z_L + Z_C = 100 + 100i - 100i = 100 \Omega$$

Schritt 3: Interpretation:

- $|Z_{\text{ges}}| = 100 \Omega$ (Scheinwiderstand)
- $\text{Im}(Z_{\text{ges}}) = 0 \Rightarrow$ **Resonanzfall!** Induktiver und kapazitiver Blindwiderstand heben sich auf.
- Phasenverschiebung: $\varphi = \arctan(0/100) = 0$ – Strom und Spannung sind in Phase.

Bei Resonanz ($\omega L = 1/(\omega C)$) wird der Blindwiderstand null – maximaler Stromfluss.

Harmonische Schwingung:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(A e^{i(\omega t + \varphi)})$$

Vorteil der komplexen Schreibweise:

- Differenzieren wird einfach: $\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}$
- Ueberlagerung: Summe von Schwingungen = Summe komplexer Zeiger
- Amplituden und Phasen lassen sich direkt ablesen

Finance-Anwendung: Zyklen in Zeitreihen

Aktienkurse, Konjunkturdaten und saisonale Muster werden mit der **Fourier-Analyse** zerlegt:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i k t / N}$$

Jeder Term $c_k e^{2\pi i k t / N}$ ist eine "komplexe Schwingung" mit Frequenz k .

Die komplexe Exponentialfunktion vereinfacht Schwingungsberechnungen drastisch.

Mandelbrot-Menge

Die **Mandelbrot-Menge** M ist die Menge aller $c \in \mathbb{C}$, fuer die die Iteration

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c$$

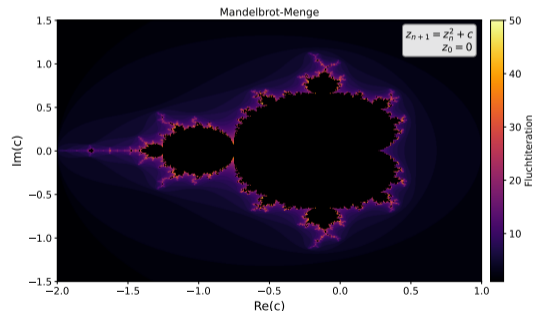
beschraenkt bleibt (d.h. $|z_n|$ divergiert nicht).

Julia-Menge:

Fuer festes c die Menge der Startwerte z_0 , fuer die $z_{n+1} = z_n^2 + c$ beschraenkt bleibt.

Zusammenhang:

- $c \in M \Leftrightarrow$ Julia-Menge von c ist zusammenhaengend
- $c \notin M \Leftrightarrow$ Julia-Menge ist "Staub"



Finance: Fraktale Geometrie (Mandelbrot, 1997) modelliert "raue" Finanzzeitreihen besser als die Normalverteilung.
Benoit Mandelbrot praegte auch den Begriff "Fraktal" – selbstaehnliche Strukturen auf allen Skalen.

Python unterstützt komplexe Zahlen nativ:

Grundoperationen

```
z1 = 3 + 4j  
z2 = 1 - 2j
```

Grundrechenarten

```
print(z1 + z2)    # (4+2j)  
print(z1 * z2)    # (11-2j)  
print(z1 / z2)    # (-1+2j)
```

Real- und Imaginärteil

```
print(z1.real)    # 3.0  
print(z1.imag)    # 4.0
```

Betrag und Konjugierte

```
print(abs(z1))     # 5.0  
print(z1.conjugate()) # (3-4j)
```

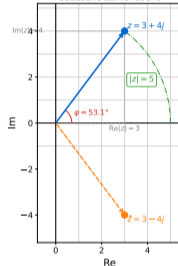
Python verwendet j statt i – Konvention aus der Elektrotechnik.

Komplexe Zahlen in Python

Python-Code

```
# Komplexe Zahl erzeugen  
z = complex(3, 4)  
# - z = (3+4j)  
  
# Betrag  
abs(z)  
# - 5.0  
  
# Konjugierte  
z.conjugate()  
# - (3-4j)  
  
# Polarform  
cmath.polar(z)  
# - (r=5.0, phi=0.9273)  
  
# Eulersche Form  
r * cmath.exp(1j * phi)  
# - (3+4j)
```

Gaußsche Zahlenebene



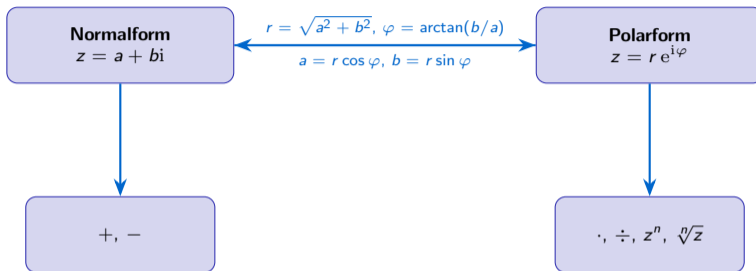
Konzept	Formel
Normalform	$z = a + bi, \quad a = \operatorname{Re}(z), \quad b = \operatorname{Im}(z)$
Polarform	$z = r e^{i\varphi}, \quad r = z , \quad \varphi = \arg(z)$
Betrag	$ z = \sqrt{a^2 + b^2}$
Konjugierte	$\bar{z} = a - bi, \quad z \cdot \bar{z} = z ^2$
Addition	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
Multiplikation	$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{ z_2 ^2}$
De Moivre	$z^n = r^n e^{in\varphi}$
n-te Wurzel	$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi + 2\pi k)/n}, \quad k = 0, \dots, n-1$
Euler	$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$
Dreiecksungl.	$ z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $

Diese Formeln bilden das Grundgeruest – sie sollten sicher beherrscht werden.

Fehler	Falsch	Richtig
$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$	$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$	$i \cdot i = i^2 = -1$
Im(z) ist komplex	$\operatorname{Im}(3 + 4i) = 4i$	$\operatorname{Im}(3 + 4i) = 4 \in \mathbb{R}$
Argument ohne Quadrant	$\arg(-1 + i) = \arctan(-1)$	$\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$
Ordnung auf \mathbb{C}	$3 + 4i > 1 + 2i$	Nicht definiert!
$ z_1 + z_2 = z_1 + z_2 $	Stets Gleichheit	Nur wenn gleiche Richtung
Division ohne Konjugierte	$\frac{1}{1+i} = 1 - i$	$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$

Merksatz: Die Wurzelgesetze $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ gelten **nur** fuer $a, b \geq 0$!

Die meisten Fehler entstehen durch unbedachtes Uebertragen reeller Regeln auf \mathbb{C} .



Empfehlung:

- Starte in der Form, die zur Aufgabe passt
- Rechne um, wenn noetig
- Gib das Ergebnis in der verlangten Form an

Flexibilitaet zwischen den Darstellungsformen ist der Schluessel zum effizienten Rechnen.

Nach dieser Vorlesung sollten Sie:

1. Komplexe Zahlen in Normal- und Polarform darstellen und ineinander umrechnen
2. Alle Grundrechenarten ($+$, $-$, \cdot , \div) sicher durchfuehren
3. Betrag, Konjugierte und deren Eigenschaften anwenden
4. Die Eulersche Formel $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ kennen und nutzen
5. n -te Wurzeln und Einheitswurzeln berechnen
6. Quadratische Gleichungen in \mathbb{C} loesen
7. Komplexe Zahlen geometrisch in der Gausschen Ebene interpretieren
8. Einfache Anwendungen (Impedanz, Schwingungen) bearbeiten

Testfragen:

- Berechnen Sie $(2 - i)^3$ in Normalform.
- Bestimmen Sie alle vierten Wurzeln von -16 .
- Fuer welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z = \bar{z}$?

Koennen Sie alle Testfragen beantworten? Falls nicht, wiederholen Sie die entsprechenden Abschnitte.

Im Folgenden vertiefen wir:

Theorie:

- \mathbb{C} als algebraische Struktur (Körper)
- Formale Beweise (Dreiecksungl., Multiplikativitaet, Euler-Formel)
- Fundamentalsatz der Algebra

Praxis:

- Fraktale: Mandelbrot und Julia im Detail
- Diskrete Fourier-Transformation (DFT)
- Stabilitaetsanalyse und Eigenwerte
- Python: `cmath`, `numpy`, `Plotting`

Verbindung zur Praxis

Diese erweiterten Themen bilden die Bruecke zwischen der “reinen” Theorie der komplexen Zahlen und ihren Anwendungen in Signalverarbeitung, Regelungstechnik, quantitativer Finance und wissenschaftlichem Rechnen.

Die folgenden Abschnitte gehen ueber den Pflichtstoff hinaus – sie sind fuer besonders Interessierte.

Satz

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein **Koerper**, d.h. es gelten:

Axiom	Addition	Multiplikation
Abgeschlossenheit	$z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$	$z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$
Assoziativitaet	$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$	$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
Kommutativitaet	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	$z_1 z_2 = z_2 z_1$
Neutrales Element	$z + 0 = z$	$z \cdot 1 = z$
Inverses	$z + (-z) = 0$	$z \cdot z^{-1} = 1 \quad (z \neq 0)$
Distributivitaet	$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	

Explizit: Das multiplikative Inverse von $z = a + bi \neq 0$:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

\mathbb{C} erweitert \mathbb{R} zu einem Koerper, in dem jedes Polynom vollstaendig zerlegbar ist.

Satz

Es gibt **keine** totale Ordnung " $<$ " auf \mathbb{C} , die mit Addition und Multiplikation verträglich ist.

Beweis (Widerspruch):

Angenommen, es gäbe eine solche Ordnung. Dann ist entweder $i > 0$ oder $i < 0$.

Fall 1: $i > 0$

$\Rightarrow i \cdot i > 0$ (Produkt positiver Zahlen ist positiv)

$\Rightarrow -1 > 0$ Widerspruch!

Fall 2: $i < 0$

$\Rightarrow -i > 0$ (Negation kehrt Ordnung um)

$\Rightarrow (-i)(-i) > 0$

$\Rightarrow i^2 > 0$, also $-1 > 0$ Widerspruch!

Konsequenz: Ausdrücke wie $z_1 < z_2$ sind für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ **sinnlos**. Man kann nur **Beträge** vergleichen: $|z_1| < |z_2|$.

Man "bezahlt" für die algebraische Vollständigkeit von \mathbb{C} mit dem Verlust der Ordnung.

Vergleich: \mathbb{R} vs. \mathbb{C}

Eigenschaft	\mathbb{R}	\mathbb{C}
Koerper	Ja	Ja
Geordneter Koerper	Ja	Nein
Vollstaendig (Cauchy-Folgen)	Ja	Ja
Algebraisch abgeschlossen	Nein	Ja
$x^2 + 1 = 0$ loesbar	Nein	Ja
Dimension ueber \mathbb{R}	1	2
Zwischenwertsatz	Ja	(nicht direkt anwendbar)
Maximum/Minimum	Ja	Nur fuer $ \cdot $
Geometrie	Zahlengerade	Gaussche Ebene

Kernaussage

\mathbb{R} hat Ordnung, \mathbb{C} hat algebraische Abgeschlossenheit. Beides gleichzeitig geht nicht (Satz von Artin–Schreier).

Die Erweiterung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gewinnt Loesbarkeit aller Polynomgleichungen und verliert die Ordnung.

Zu zeigen: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Beweis: Wir quadrieren beide Seiten (beide ≥ 0):

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2\end{aligned}$$

Nun ist $\operatorname{Re}(w) \leq |w|$ fuer alle $w \in \mathbb{C}$, also:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

Wurzelziehen (beide Seiten ≥ 0) liefert $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. □

Gleichheit: Genau dann, wenn $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1\bar{z}_2|$, d.h. $z_1\bar{z}_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, also $z_2 = \lambda z_1$ mit $\lambda \geq 0$.

Dieser Beweis nutzt geschickt $|z|^2 = z\bar{z}$ und $\operatorname{Re}(w) \leq |w|$.

Beweis: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Zu zeigen: $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ fuer alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Beweis (direkt): Sei $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Dann:

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= a^2 c^2 - 2abcd + b^2 d^2 + a^2 d^2 + 2abcd + b^2 c^2 \\ &= a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \end{aligned}$$

Wurzelziehen liefert $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$. □

Eleganter Beweis (mit Konjugierten):

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

Die Multiplikativitaet ist aequivalent zur Lagrange-Identitaet $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

Herleitung: Eulersche Formel via Potenzreihen

Idee: Setze $i\varphi$ in die Potenzreihe der Exponentialfunktion ein.

Potenzreihen:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Einsetzen von $x = i\varphi$:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \varphi^n}{n!} \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\right)}_{\cos \varphi} + i \underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots\right)}_{\sin \varphi} \end{aligned}$$

Denn $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, ... trennt gerade/ungerade Terme.

Ergebnis: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

□

Dieser "Beweis" setzt voraus, dass Potenzreihen fuer komplexe Argumente konvergieren – was man zeigen kann.

Satz (Gauss, 1799)

Jedes Polynom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ vom Grad $n \geq 1$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ hat **mindestens eine** Nullstelle in \mathbb{C} .

Folgerung: Jedes Polynom vom Grad n hat (mit Vielfachheit) genau n Nullstellen in \mathbb{C} :

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

Was bedeutet das?

- \mathbb{C} ist **algebraisch abgeschlossen**: Kein “Luecken” wie $x^2 + 1 = 0$ in \mathbb{R} .
- Es gibt **keinen** Koerper “groesser” als \mathbb{C} , der durch Polynomloesungen entsteht.
- Jede $n \times n$ -Matrix hat n Eigenwerte in \mathbb{C} (mit Vielfachheit).

Beweisideen: Gauss gab 4 verschiedene Beweise. Moderne Beweise nutzen Analysis (Liouville), Topologie (Windungszahl) oder Algebra (Galoistheorie).

Der Fundamentalsatz ist DER Grund, warum \mathbb{C} “die richtige” Zahlenerweiterung von \mathbb{R} ist.

Algorithmus (Escape-Time):

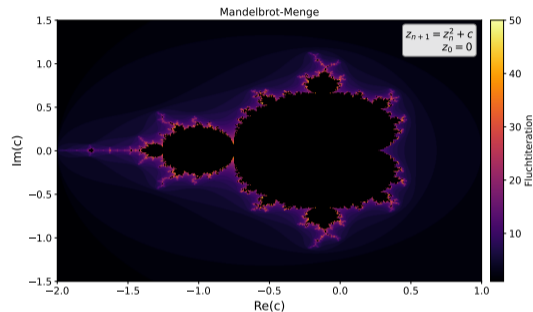
1. Für jeden Punkt c (Mandelbrot) bzw. z_0 (Julia):
2. Iteriere $z_{n+1} = z_n^2 + c$
3. Falls $|z_n| > 2$ für ein $n \leq N_{\max}$: Punkt gehört **nicht** zur Menge
4. Farbe nach Anzahl der Iterationen

Interessante Julia-Parameter:

- | | |
|----------------------|------------------|
| $c = -0,7 + 0,27i$ | Spiralstrukturen |
| $c = 0,355 + 0,355i$ | Seepferdchen-Tal |
| $c = -0,8 + 0,156i$ | Dendritenmuster |

Finance-Verbindung: Mandelbrot (1963) zeigte, dass Finanzrenditen “dicke Ränder” (fat tails) haben. Seine fraktale Geometrie motivierte Modelle jenseits der Normalverteilung (Levy-stabile Verteilungen, multifraktale Modelle).

Die Grenze der Mandelbrot-Menge hat die Hausdorff-Dimension 2 – unendlich komplex.



Definition

Fuer ein Signal $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ ist die DFT:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-2\pi i kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Inverse DFT: $x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{2\pi i kn/N}$

Kern der DFT: Die N -ten Einheitswurzeln $\omega = e^{-2\pi i/N}$:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{kn}$$

Anwendungen in Finance:

- **Zykluserkennung:** Saisonale Muster in Umsatzdaten identifizieren
- **Optionspreise:** Carr-Madan-Methode nutzt FFT zur Bewertung europaeischer Optionen
- **Spektralanalyse:** Frequenzgehalt von Rendite-Zeitreihen untersuchen

Die FFT (Fast Fourier Transform) berechnet die DFT in $O(N \log N)$ statt $O(N^2)$ – ein Meilenstein.

Systematische Berechnung komplexer Netzwerke:

Serienschaltung

$$Z_{\text{ser}} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

Beispiel: $R = 50 \Omega$ in Serie mit $L = 0,1 \text{ H}$ bei $\omega = 100$:

$$Z = 50 + 10i$$

$$|Z| = \sqrt{2600} \approx 51,0 \Omega$$

$$\varphi = \arctan(10/50) \approx 11,3$$

Parallelschaltung

$$\frac{1}{Z_{\text{par}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

Aequivalent:

$$Z_{\text{par}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Beispiel: $R = 100 \Omega$ parallel mit $C = 10 \mu\text{F}$ bei $\omega = 1000$:

$$Z_{\text{par}} = \frac{100 \cdot (-100i)}{100 - 100i} = \frac{-10000i}{100(1 - i)}$$

Allgemeine Methode: Komplexe Netzwerke schrittweise vereinfachen – genau wie bei Gleichstromwiderständen, aber mit komplexer Arithmetik.

Komplexe Impedanzen reduzieren Wechselstromberechnungen auf algebraische Operationen.

Stabilitaetskriterium

Ein lineares dynamisches System $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ist **stabil**, wenn alle Eigenwerte von \mathbf{A} **negativen Realteil** haben:

$$\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0 \quad \text{fuer alle } k$$

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i$$

$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = -1 < 0 \Rightarrow$ System ist **stabil** (gedaempfte Schwingung).

Anwendungen in Finance und Oekonomie:

- **Oekonomische Modelle:** Ist ein Marktgleichgewicht stabil unter Stoerungen?
- **ARMA-Modelle:** Stationaritaet \Leftrightarrow Wurzeln des char. Polynoms ausserhalb des Einheitskreises
- **Regelungstechnik:** Sind Regelkreise stabil? (Nyquist-Kriterium)

Komplexe Eigenwerte bestimmen, ob ein System schwingt ($\operatorname{Im} \neq 0$) und ob es stabil ist ($\operatorname{Re} < 0$).

cmath – Komplexe Mathematik

Das Modul cmath erweitert math fuer komplexe Zahlen.

```
import cmath

z = 3 + 4j

# Polarform
r, phi = cmath.polar(z)
print(f"|z| = {r}")          # 5.0
print(f"phi = {phi:.4f}")    # 0.9273

# Zurueck zur Normalform
w = cmath.rect(5, 0.9273)
print(w)  # (3.0000+4.0000j)

# Phase (= Argument)
print(cmath.phase(z))       # 0.9273

# Euler-Formel
print(cmath.exp(1j * cmath.pi))
```

Wichtige Funktionen:

<code>polar(z)</code>	$\rightarrow (r, \varphi)$
<code>rect(r, φ)</code>	$\rightarrow z$
<code>phase(z)</code>	$\rightarrow \varphi$
<code>exp(z)</code>	e^z
<code>log(z)</code>	$\ln(z)$
<code>sqrt(z)</code>	\sqrt{z}
<code>sin(z)</code>	$\sin(z)$
<code>cos(z)</code>	$\cos(z)$

Vorteil: `cmath.sqrt(-1)` liefert `1j` statt Fehler.

numpy – Vektorisierte komplexe Arithmetik

numpy unterstützt den Datentyp `complex128` fuer effiziente Array-Operationen.

```
import numpy as np

# Komplexes Array
z = np.array([1+2j, 3-1j, -2+4j, 5+0j])

# Elementweise Operationen
print(np.abs(z))          # [2.236, 3.162, 4.472, 5.0]
print(np.angle(z))       # [1.107, -0.322, 2.034, 0.0]
print(np.real(z))        # [1, 3, -2, 5]
print(np.imag(z))        # [2, -1, 4, 0]
print(np.conj(z))        # [1-2j, 3+1j, -2-4j, 5-0j]

# DFT mit numpy
signal = np.array([1, 2, 1, -1, 1.5, 0.5])
spectrum = np.fft.fft(signal)
print(np.abs(spectrum))  # Amplituden der Frequenzkomponenten
```

Eigenwerteberechnung: `np.linalg.eig(A)` gibt auch komplexe Eigenwerte zurueck.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Einheitswurzeln (n=6)
n = 6
k = np.arange(n)
omega = np.exp(2j * np.pi * k / n)

fig, ax = plt.subplots(figsize=(5,5))
# Einheitskreis
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
ax.plot(np.cos(theta), np.sin(theta),
        '--', color='gray', alpha=0.5)

# Einheitswurzeln
ax.scatter(omega.real, omega.imag,
          s=100, zorder=5)
for i, w in enumerate(omega):
    ax.annotate(f'$\omega^{{i}}$',
                (w.real, w.imag),
                textcoords="offset points",
                xytext=(10, 5))
```

Komplexe Zahlen in Python

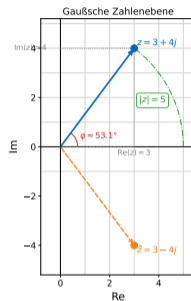
```
Python-Code
# Komplexe Zahl erzeugen
z = complex(3, 4)
# → z = (3+4j)

# Betrag
abs(z)
# → 5.0

# Konjugierte
z.conjugate()
# → (3-4j)

# Polarform
cmath.polar(z)
# → (r=5.0, φ=0.9273)

# Eulersche Form
r * cmath.exp(1j * phi)
# → (3+4j)
```



Visualisierungstipps:

- `ax.set_aspect('equal')` fuer korrekte Kreise
- Realteil → x-Achse, Imaginarteil → y-Achse
- `quiver` fuer Pfeile (Zeiger)
- Farbkodierung fuer Argument oder Betrag

Aufgabe

Berechne die Gesamtimpedanz eines RLC-Netzwerks: $R = 200 \Omega$ in Serie mit der Parallelschaltung von $L = 50 \text{ mH}$ und $C = 2 \mu\text{F}$ bei $f = 1000 \text{ Hz}$.

```
import cmath, math

R = 200          # Ohm
L = 50e-3       # Henry
C = 2e-6        # Farad
f = 1000        # Hz
omega = 2 * math.pi * f

Z_R = R
Z_L = 1j * omega * L          # = 314.16j
Z_C = 1 / (1j * omega * C)   # = -159.15j

# Parallelschaltung L || C
Z_par = (Z_L * Z_C) / (Z_L + Z_C)

# Gesamtimpedanz (Serie)
Z_ges = Z_R + Z_par
```

Wohin fuehren komplexe Zahlen weiter?

Mathematik:

- Komplexe Analysis (Cauchy, Residuen)
- Konforme Abbildungen
- Riemannsche Flaechen
- Algebraische Geometrie

Signalverarbeitung:

- Laplace- und z-Transformation
- Digitale Filter (IIR, FIR)
- Wavelet-Analyse

Quantitative Finance:

- Optionsbewertung via Fourier (Carr-Madan)
- Charakteristische Funktionen
- Stochastische Volatilitaetsmodelle (Heston)

Physik / Technik:

- Quantenmechanik ($\psi \in \mathbb{C}$)
- Elektromagnetismus (Maxwell)
- Regelungstechnik (Bode, Nyquist)

Fazit

Komplexe Zahlen sind weit mehr als “imaginaer” – sie sind ein **unverzichtbares Werkzeug** in Mathematik, Naturwissenschaften, Technik und quantitativer Finance.

Von $i^2 = -1$ zu Quantenmechanik und Optionspreisen – komplexe Zahlen sind ueberall.