Komplexe Zahlen

Kernvorlesung

BSc Analysis

Inhaltsverzeichnis

Lernziele

Am Ende dieser Lektion koennen Sie:

1. Komplexe Zahlen in **Normalform** $z = a + b\mathrm{i}$ darstellen und in der Gaussschen Zahlenebene einordnen.
2. **Grundrechenarten** (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) mit komplexen Zahlen sicher durchfuehren.
3. **Betrag** $|z|$ und **konjugiert komplexe Zahl** $\overline{z}$ berechnen und deren Eigenschaften anwenden.
4. Komplexe Zahlen in **Polarform** $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ darstellen und zwischen Normal- und Polarform umrechnen.
5. Die **Eulersche Formel** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ verstehen und anwenden.
6. ***n*-te Wurzeln** komplexer Zahlen und **Einheitswurzeln** berechnen.
7. Komplexe Zahlen in **wirtschaftlichen und technischen Anwendungen** (Impedanz, Signalverarbeitung, Rotationen) einsetzen.

Komplexe Zahlen erweitern die reellen Zahlen und eroeffnen neue Loesungswege in Technik, Physik und Wirtschaft.

Komplexe Zahlen: Definition

Definition

Eine **komplexe Zahl** $z \in \mathbb{C}$ hat die Form

$$z = a + b\mathrm{i}, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

wobei $a = \mathrm{Re}(z)$ der **Realteil** und $b = \mathrm{Im}(z)$ der **Imaginaerteil** ist.

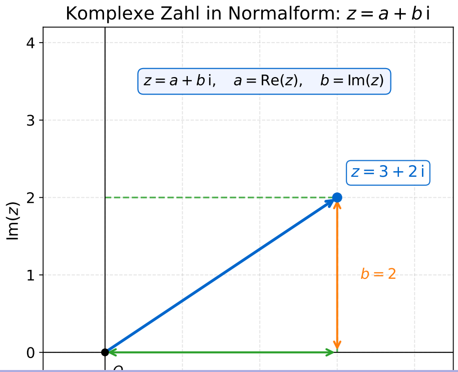
Die imaginaere Einheit:

$$\mathrm{i}^2 = -1, \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

Spezialfaelle:

- $b = 0$: reelle Zahl ($z = a \in \mathbb{R}$)
- $a = 0$: rein imaginaer ($z = b\mathrm{i}$)
- $a = 0, b = 0$: Null ($z = 0$)

Gleichheit: $z_1 = z_2$ genau dann, wenn $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ und $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$.



Die imaginaere Einheit i

Potenzen von i

Die Potenzen von i wiederholen sich mit Periode 4:

$$\mathrm{i}^0 = 1, \qquad \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}, \qquad \mathrm{i}^2 = -1, \qquad \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}, \qquad \mathrm{i}^4 = 1, \quad \ldots$$

Allgemeine Regel:

$$\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{n \bmod 4}$$

Beispiele:

- $\mathrm{i}^{17} = \mathrm{i}^{17 \bmod 4} = \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$
- $\mathrm{i}^{42} = \mathrm{i}^{42 \bmod 4} = \mathrm{i}^2 = -1$
- $\mathrm{i}^{100} = \mathrm{i}^{100 \bmod 4} = \mathrm{i}^0 = 1$

Motivation – warum $\mathbb{C}$?

Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{R}$ **keine Loesung**.
In $\mathbb{C}$: $x = \pm\mathrm{i}$ sind Loesungen.

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ hat genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ (mit Vielfachheit gezaehlt).

Die Periodizitaet von i vereinfacht viele Berechnungen – merken Sie sich den 4er-Zyklus: $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$.

Darstellung

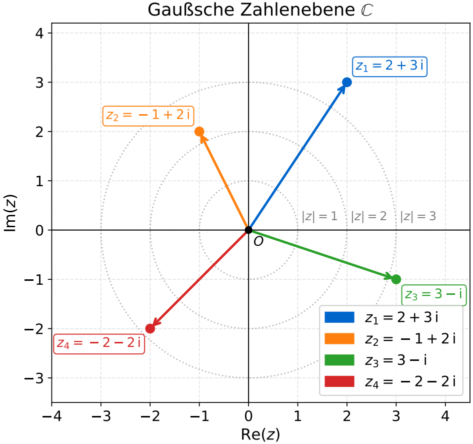
Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ entspricht einem **Punkt** (a, b) in der Ebene.

Achsen:

- Horizontale Achse: **Realachse** (Re)
- Vertikale Achse: **Imaginaerachse** (Im)

Beispiele:

- $z_1 = 3 + 2i \rightarrow (3, 2)$
- $z_2 = -1 + 4i \rightarrow (-1, 4)$
- $z_3 = -2 - i \rightarrow (-2, -1)$
- $z_4 = 2 \rightarrow (2, 0)$ (reell)
- $z_5 = -3i \rightarrow (0, -3)$ (imaginaer)



Finanzinterpretation: Rendite (Realteil) und Risiko-Phasenverschiebung (Imaginaerteil) als zweidimensionaler Zustandsraum.

Die Gausssche Zahlenebene macht komplexe Zahlen “sichtbar” – Algebra und Geometrie verschmelzen.

Beispiele zur Normalform

Bestimmen Sie Real- und Imaginaerteil:

Komplexe Zahl z	$\mathrm{Re}(z)$	$\mathrm{Im}(z)$	**Typ**
$z = 5 - 3\mathrm{i}$	5	-3	komplex
$z = -7$	-7	0	reell
$z = 4\mathrm{i}$	0	4	rein imaginaer
$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	komplex
$z = (2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$	3	-1	komplex

Nachrechnung letztes Beispiel:

$$(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 2 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 2 - \mathrm{i} - (-1) = 3 - \mathrm{i}$$

Wirtschaftsbeispiel: Ein Impedanzwert $Z = 100 + 50\mathrm{i}\ \Omega$ hat Wirkwiderstand $\mathrm{Re}(Z) = 100\ \Omega$ und Blindwiderstand $\mathrm{Im}(Z) = 50\ \Omega$.

Uebung: Zerlegen Sie stets zuerst in $a + b\mathrm{i}$, dann lesen Sie Real- und Imaginaerteil direkt ab.

Addition komplexer Zahlen

Definition

Seien $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$ und $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$. Dann:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}$$

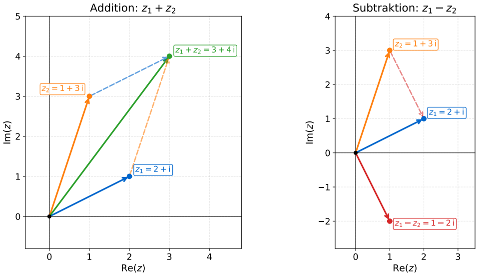
Beispiel:

$$z_1 = 3 + 2\mathrm{i}, \quad z_2 = -1 + 4\mathrm{i}$$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (3 + (-1)) + (2 + 4)\mathrm{i} \\ &= 2 + 6\mathrm{i} \end{aligned}$$

Rechenregeln:

- Kommutativ: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- Assoziativ: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
- Neutrales Element: $z + 0 = z$
- Inverses: $z + (-z) = 0$



Geometrisch: Addition entspricht der **Parallelogrammregel** – wie bei Vektoren in $\mathbb{R}^2$.

Komplexe Addition ist komponentenweise – genau wie Vektoraddition in der Gaussschen Ebene.

Subtraktion komplexer Zahlen

Definition

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathrm{i}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} z_1 &= 5 + 3\mathrm{i}, \quad z_2 = 2 + 7\mathrm{i} \\ z_1 - z_2 &= (5-2) + (3-7)\mathrm{i} \\ &= 3 - 4\mathrm{i} \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation:

Die Differenz $z_1 - z_2$ zeigt als Pfeil von z_2 nach z_1 in der Gaussschen Ebene.

Abstand zweier Punkte:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Wirtschaftsbeispiel:
Zwei Wechselstrom-Impedanzen:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 200 + 80\mathrm{i}\ \Omega \\ Z_2 &= 150 + 120\mathrm{i}\ \Omega \end{aligned}$$

Differenz:

$$Z_1 - Z_2 = 50 - 40\mathrm{i}\ \Omega$$

Interpretation: Impedanz Z_1 hat einen um 50 Ω hoeheren Wirkwiderstand, aber einen um 40 Ω *niedrigeren* Blindwiderstand als Z_2.

Subtraktion ist die Umkehroperation der Addition – geometrisch ein Gegenvektor in der Gaussschen Ebene.

Multiplikation komplexer Zahlen

Formel

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\mathrm{i}$$

Herleitung (ausmultiplizieren):

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1\mathrm{i})(a_2 + b_2\mathrm{i}) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2\mathrm{i} + b_1\mathrm{i} \cdot a_2 + b_1 b_2\mathrm{i}^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\mathrm{i} \end{aligned}$$

Rechenregeln:

- Kommutativ: $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- Assoziativ: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
- Distributiv: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
- Einselement: $z \cdot 1 = z$

Durchgerechnetes Beispiel:

$$z_1 = 3 + 2\mathrm{i}, \quad z_2 = 1 - 4\mathrm{i}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3)(1) + (3)(-4\mathrm{i}) + (2\mathrm{i})(1) + (2\mathrm{i})(-4\mathrm{i}) \\ &= 3 - 12\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - 8\mathrm{i}^2 \\ &= 3 - 10\mathrm{i} - 8(-1) \\ &= 11 - 10\mathrm{i} \end{aligned}$$

Probe:

$$\mathrm{Re}: 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) = 3 + 8 = 11 \checkmark$$

$$\mathrm{Im}: 3 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 = -12 + 2 = -10 \checkmark$$

Multiplikation in Normalform: einfach ausmultiplizieren und $\mathrm{i}^2 = -1$ einsetzen.

Division komplexer Zahlen

Methode: Konjugiert erweitern

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

Durchgerechnetes Beispiel:

$$\frac{3+2\mathrm{i}}{1-4\mathrm{i}} = \frac{(3+2\mathrm{i})(1+4\mathrm{i})}{(1-4\mathrm{i})(1+4\mathrm{i})}$$

$$\begin{aligned} \text{Zaehler: } & 3 + 12\mathrm{i} + 2\mathrm{i} + 8\mathrm{i}^2 \\ & = 3 + 14\mathrm{i} - 8 = -5 + 14\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nenner: } & 1 + 4\mathrm{i} - 4\mathrm{i} - 16\mathrm{i}^2 \\ & = 1 + 16 = 17 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{3+2\mathrm{i}}{1-4\mathrm{i}} = -\frac{5}{17} + \frac{14}{17}\mathrm{i}$$

Prinzip:
Erweitern mit $\overline{z_2}$ macht den Nenner **reell**:

$$z_2 \cdot \overline{z_2} = |z_2|^2 \in \mathbb{R}$$

Wirtschaftsbeispiel – Impedanz-Quotient:
Spannungsteiler mit $Z_1 = 100 + 50\mathrm{i}$ und $Z_2 = 200$:

$$\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{100 + 50\mathrm{i}}{300 + 50\mathrm{i}}$$

Erweitern mit $\overline{(300 + 50\mathrm{i})} = 300 - 50\mathrm{i}$:

$$= \frac{32500 + 10000\mathrm{i}}{92500} = 0{,}351 + 0{,}108\mathrm{i}$$

Division immer durch konjugiert Erweitern – der Nenner wird reell, dann normal dividieren.

Rechenbeispiele: Gemischte Aufgaben

Berechnen Sie und geben Sie das Ergebnis in Normalform $a + b\mathrm{i}$ an:

1. $(2 + 3\mathrm{i}) + (4 - \mathrm{i}) = 6 + 2\mathrm{i}$
2. $(5 + \mathrm{i}) - (3 + 4\mathrm{i}) = 2 - 3\mathrm{i}$
3. $(1 + \mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 2\mathrm{i}$
4. $(2 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i}) = 4 - \mathrm{i}^2 = 5$ (reell!)
5. $\frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{1 \cdot (-\mathrm{i})}{\mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i})} = \frac{-\mathrm{i}}{1} = -\mathrm{i}$
6. $\frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \frac{(1 + \mathrm{i})^2}{(1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$

Dritte binomische Formel in $\mathbb{C}$

$$(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

Das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer Konjugierten ist stets **reell und nicht-negativ**.

Tipp: Nutzen Sie $(z)(\bar{z}) = |z|^2$, um Nenner zu "realisieren" – das ist der Schluessel zur Division.

Zusammenfassung: Grundoperationen

Operation	**Formel**	**Ergebnis**
Addition	$(a_1 + b_1\mathrm{i}) + (a_2 + b_2\mathrm{i})$	$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}$
Subtraktion	$(a_1 + b_1\mathrm{i}) - (a_2 + b_2\mathrm{i})$	$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathrm{i}$
Multiplikation	$(a_1 + b_1\mathrm{i})(a_2 + b_2\mathrm{i})$	$(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\mathrm{i}$
Division	$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{z_1 \overline{z_2}}{\lvert z_2 \rvert^2}$

Koerperstruktur: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bildet einen **Koerper** – alle vier Grundrechenarten sind ausfuehrbar (Division durch $z \neq 0$).

- $\mathbb{C}$ ist **nicht angeordnet**: Es gibt kein “>” fuer komplexe Zahlen.
- Stattdessen vergleicht man **Betraege**: $|z_1|$ vs. $|z_2|$.
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: Jede reelle Zahl ist eine komplexe Zahl mit $b = 0$.

$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen – jedes Polynom zerfaellt vollstaendig in Linearfaktoren ueber $\mathbb{C}$.

Betrag einer komplexen Zahl

Definition

Der **Betrag** (Modulus) von $z = a + b\mathrm{i}$:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

Beispiele:

- $|3 + 4\mathrm{i}| = \sqrt{9 + 16} = 5$
- $|-1 + \mathrm{i}| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
- $|5| = \sqrt{25 + 0} = 5$
- $|-3\mathrm{i}| = \sqrt{0 + 9} = 3$

Geometrisch: $|z|$ ist der **Abstand** des Punktes z vom Ursprung in der Gaussschen Ebene (Pythagoras).

Eigenschaften:

1. $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (multiplikativ)
3. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$
4. $|\overline{z}| = |z|$
5. **Dreiecksungleichung:**
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
6. Umgekehrte Dreiecksungl.:
$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$$

Der Betrag verallgemeinert den Absolutbetrag reeller Zahlen – er misst den "Abstand zur Null".

Die Dreiecksungleichung

Satz

Fuer alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn z_1 und z_2 auf demselben Strahl vom Ursprung liegen.

Geometrische Anschauung:
In einem Dreieck ist jede Seite **kuerzer** als die Summe der beiden anderen.

Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 + 4i, \quad |z_1| = 5 \\ z_2 &= -1 + 2i, \quad |z_2| = \sqrt{5} \approx 2{,}24 \\ z_1 + z_2 &= 2 + 6i \\ |z_1 + z_2| &= \sqrt{40} \approx 6{,}32 \end{aligned}$$

Pruefung: $6{,}32 \leq 5 + 2{,}24 = 7{,}24$ ✓

Varianten:

1. $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
2. $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2|$
3. Induktiv: $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

Finanzanwendung:
Portfolio-Risiko: Das Gesamtrisiko zweier Positionen (als komplexe Impedanzen modelliert) ist **hoechstens so gross** wie die Summe der Einzelrisiken – Diversifikation reduziert Risiko.

Die Dreiecksungleichung ist fundamental fuer Konvergenzbeweise und Abschaetzungen in der Analysis.

Die konjugiert komplexe Zahl

Definition

Die **konjugiert komplexe Zahl** von $z = a + bi$ ist:

$$\overline{z} = a - bi$$

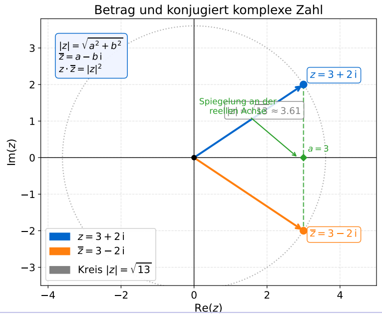
Geometrisch: Spiegelung an der **Realachse**.

Eigenschaften:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
5. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
6. $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\ \mathrm{Im}(z)$

Daraus:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$$



Konjugation ist ein Koerperautomorphismus von $\mathbb{C}$ – sie vertauscht die beiden Loesungen von $x^2 + 1 = 0$.

Schluesselidentitaet: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

Satz

Fuer jedes $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ gilt:

$$z \cdot \overline{z} = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Anwendung – Inverses berechnen:
Fuer $z \neq 0$:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a - b\mathrm{i}}{a^2 + b^2}$$

Beispiel: $z = 3 + 4\mathrm{i}$

$$|z|^2 = 9 + 16 = 25$$

$$z^{-1} = \frac{3 - 4\mathrm{i}}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}\mathrm{i}$$

Probe: $z \cdot z^{-1} = \frac{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{25} = \frac{25}{25} = 1$ ✓

Weitere Identitaeten:

- $|z|^2 = z\overline{z}$ (Definition)
- $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 \, |z_2|^2$
- $|z^n| = |z|^n$
- $z\overline{z} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Finanzbeispiel:
Die "Energie" eines komplexen Signals $z(t)$ in der Signalverarbeitung:

$$E = \sum_t z(t) \cdot \overline{z(t)} = \sum_t |z(t)|^2$$

Analog: Varianz eines Portfolios als Summe der quadrierten Betraege.

Die Identitaet $z\overline{z} = |z|^2$ ist das wichtigste Werkzeug – sie verbindet Algebra mit Geometrie.

Polardarstellung

Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ laesst sich schreiben als:

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\,\mathrm{cis}(\varphi)$$

mit dem **Betrag** $r = |z| > 0$ und dem **Argument** $\varphi = \arg(z)$.

Zusammenhang mit Normalform:

$$a = r\cos\varphi = \mathrm{Re}(z)$$
$$b = r\sin\varphi = \mathrm{Im}(z)$$

Betrag:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argument:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{(Quadrant beachten!)}$$

Quadrantenregel fuer φ:

a	b	φ
> 0	≥ 0	$\arctan(b/a)$
< 0	beliebig	$\arctan(b/a) + \pi$
> 0	< 0	$\arctan(b/a) + 2\pi$
$= 0$	> 0	$\pi/2$
$= 0$	< 0	$3\pi/2$

Hauptargument: $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$

Die Polarform beschreibt z durch "wie weit" (r) und "in welcher Richtung" (φ) vom Ursprung.

Umrechnung: Normalform $\leftrightarrow$ Polarform

Normalform $\rightarrow$ Polarform

Gegeben: $z = a + b\mathrm{i}$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \text{Korrektur}$$

Beispiel: $z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$

$$r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\varphi = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

Also: $z = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Polarform $\rightarrow$ Normalform

Gegeben: $z = r\,\mathrm{cis}(\varphi)$

$$a = r\cos\varphi$$

$$b = r\sin\varphi$$

Beispiel: $z = 4\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$$a = 4\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$b = 4\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$$

Also: $z = -2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$

Wirtschaftsbeispiel: Saisonale Umsatzschwankungen $U(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ lassen sich als $\mathrm{Re}\big(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)$ mit $r = \sqrt{A^2 + B^2}$ und Phasenverschiebung $\varphi = \arctan(B/A)$ kompakt darstellen.

Die Umrechnung nutzt Pythagoras (r) und Trigonometrie (φ) – Quadrant immer beachten!

Die Eulersche Formel

Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Damit schreibt sich die Polarform als:

$$\boxed{z = re^{i\varphi}}$$

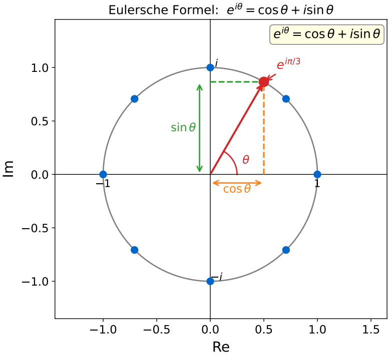
Beruhmte Spezialfaelle:

- $e^{i\cdot 0} = 1$
- $e^{i\pi/2} = i$
- $e^{i\pi} = -1$ (Euler-Identitaet!)
- $e^{i3\pi/2} = -i$
- $e^{i2\pi} = 1$

Euler-Identitaet:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Verbindet e, i, π, 1, 0 – die fuenf wichtigsten Konstanten der Mathematik.



Zusammenhang mit cos/sin:

Multiplikation und Division in Polarform

Regeln

Seien $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Dann:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Geometrische Bedeutung:

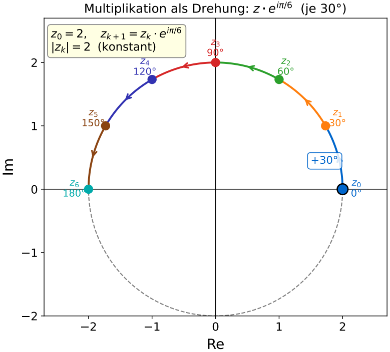
- **Multiplikation:** Betraege multiplizieren, Winkel addieren
- **Division:** Betraege dividieren, Winkel subtrahieren

Beispiel:

$$z_1 = 2e^{i\pi/3}, \quad z_2 = 3e^{i\pi/4}$$

$$z_1 z_2 = 6e^{i \cdot 7\pi/12}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} e^{i\pi/12}$$



Umrechnung in Polar- bzw. Normalform:

Normalform	r	φ	**Polarform**	**Euler**
$1+\mathrm{i}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$
-2	2	π	$2\,\text{cis}(\pi)$	$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$
$-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$	2	$\frac{4\pi}{3}$	$2\,\text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$	$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}$
$3\mathrm{i}$	3	$\frac{\pi}{2}$	$3\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$

Berechnung: $(1+\mathrm{i})^8$

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$$

$$(1+\mathrm{i})^8 = (\sqrt{2})^8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 8\cdot\pi/4} = 16\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 16$$

In Normalform waere diese Rechnung extrem aufwaendig – die Polarform macht sie in einer Zeile!

Polarform ist ideal fuer Potenzen und Wurzeln – Normalform ist besser fuer Addition und Subtraktion.

n-te Wurzeln komplexer Zahlen

Satz (de Moivre)

Die n-te Wurzel von $z = re^{i\varphi}$ hat genau n Loesungen:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Beispiel: $\sqrt[3]{8}$ **in** $\mathbb{C}$

$z = 8 = 8e^{i\cdot 0}$, also $r = 8$, $\varphi = 0$.

$$w_k = \sqrt[3]{8}\, e^{i\cdot 2\pi k/3} = 2e^{i\cdot 2\pi k/3}$$

- $w_0 = 2e^0 = 2$
- $w_1 = 2e^{i2\pi/3} = -1 + \sqrt{3}i$
- $w_2 = 2e^{i4\pi/3} = -1 - \sqrt{3}i$

Probe: $(w_1)^3 = 8e^{i2\pi} = 8$ ✓

Geometrie:
Die n Wurzeln liegen auf einem **Kreis** mit Radius $\sqrt[n]{r}$ und bilden ein regelmaessiges n-**Eck**.

Aufeinanderfolgende Wurzeln sind um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ gedreht.

Wirtschaftsbeispiel:
In der Systemtheorie entsprechen die n Wurzeln den n Eigenwerten eines zyklischen Prozesses – sie bestimmen die Stabiliaet des Systems.

In $\mathbb{C}$ hat jede Zahl $z \neq 0$ genau n verschiedene n-te Wurzeln – gleichmaessig auf einem Kreis verteilt.

Einheitswurzeln

Definition

Die n-**ten Einheitswurzeln** sind die Loesungen von $z^n = 1$:

$$\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi k/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Primitive Einheitswurzel:

$$\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi/n}$$

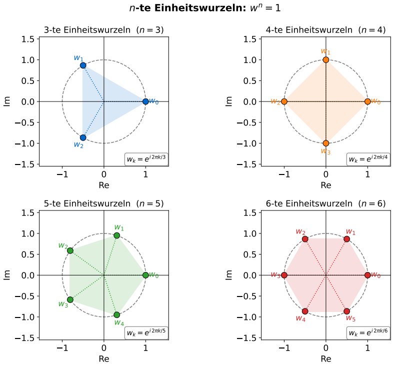
Dann: $\omega_k = \omega^k$ fuer $k = 0, \ldots, n-1$.

Beispiel $n = 4$**:**

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= 1 \\
\omega_1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i} \\
\omega_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1 \\
\omega_3 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2} = -\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Summeneigenschaft:

$$\sum^{n-1} \omega^k = 0$$



Geometrische Verteilung der Wurzeln

Allgemeine n-te Wurzeln von z:

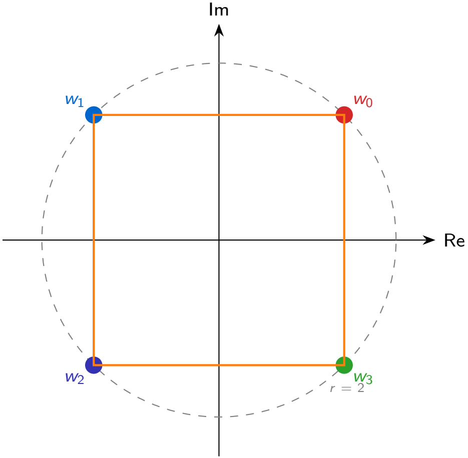
Die n Loesungen von $w^n = z$ liegen auf einem Kreis mit:

- **Radius:** $\sqrt[n]{|z|}$
- **Startwinkel:** $\frac{\arg(z)}{n}$
- **Winkelabstand:** $\frac{2\pi}{n}$

Beispiel: $\sqrt[4]{-16}$
$z = -16 = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

$$w_k = \sqrt[4]{16}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2\pi k)/4} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+k\pi/2)}$$

- $w_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \sqrt{2}(1+\mathrm{i})$
- $w_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4} = \sqrt{2}(-1+\mathrm{i})$
- $w_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4} = \sqrt{2}(-1-\mathrm{i})$
- $w_3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/4} = \sqrt{2}(1-\mathrm{i})$



Die vier Wurzeln bilden ein **Quadrat** – allgemein bilden n Wurzeln ein regelmaessiges n-Eck.

Die Symmetrie der Wurzelverteilung folgt direkt aus der Gleichmaessigkeit der Winkelteilung $2\pi/n$.

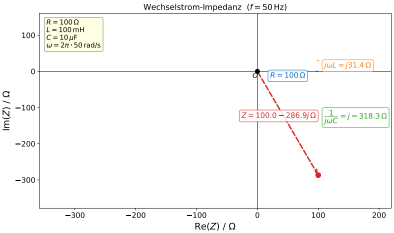
Anwendung: Wechselstromtechnik und Impedanz

Komplexe Impedanz

In der Wechselstromtechnik werden Widerstaende als komplexe Zahlen dargestellt:

$$Z = R + \mathrm{i}X$$

- $R = \mathrm{Re}(Z)$: Wirkwiderstand (Ω)
- $X = \mathrm{Im}(Z)$: Blindwiderstand (Ω)



Bauelemente:

- Widerstand: $Z_R = R$
- Kondensator: $Z_C = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega C}$
- Spule: $Z_L = \mathrm{i}\omega L$

Beispiel – Reihenschaltung:

$$R = 100\ \Omega,\ L = 0{,}1\ \mathrm{H},\ \omega = 100\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$Z = R + \mathrm{i}\omega L = 100 + 10\mathrm{i}\ \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{10000 + 100} \approx 100{,}5\ \Omega$$

$$\varphi = \arctan(10/100) \approx 5{,}7^\circ$$

Komplexe Impedanzen erlauben es, Wechselstromkreise wie Gleichstromkreise zu behandeln – mit Ohms Gesetz $U = ZI$.

Anwendung: Signalverarbeitung

Fourier-Darstellung

Jedes periodische Signal $f(t)$ laesst sich als Summe komplexer Exponentialfunktionen schreiben:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t}$$

mit Fourier-Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$.

Diskrete Fourier-Transformation (DFT):
Fuer N Datenpunkte $x_0, \ldots, x_{N-1}$:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kn/N}$$

Die Basisfunktionen sind **Einheitswurzeln** ω^{kn} mit $\omega = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/N}$.

Anwendungen:

- Audio-/Bildkompression (MP3, JPEG)
- Frequenzanalyse von Zeitreihen
- Rauschfilterung in Finanzdaten

Finanz-Beispiel: Saisonale Muster

Monatliche Umsatzdaten $U_0, \ldots, U_{11}$ eines Unternehmens koennen per DFT in Frequenzkomponenten zerlegt werden:

- X_0: Jahresdurchschnitt
- X_1: Jahresperiode (Saisonalitaet)
- X_2: Halbjahresperiode
- X_k: hoehere Harmonische

$|X_k|$ gibt die **Staerke** der k-ten Frequenzkomponente an, $\arg(X_k)$ die **Phasenlage**.

Anwendung: Rotation und wirtschaftliche Interpretation

Rotation als Multiplikation:

Multiplikation mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ dreht einen Punkt in der Ebene um den Winkel φ:

$$z' = z \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

- $|z'| = |z|$ (Betrag bleibt gleich)
- $\arg(z') = \arg(z) + \varphi$ (Winkel addiert)

Drehung um 90°**:**

$$z \cdot \mathrm{i} = z \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$$

Beispiel: $z = 3 + \mathrm{i}$

$$z \cdot \mathrm{i} = 3\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = -1 + 3\mathrm{i}$$

Wirtschaftliche Interpretationen:

1. Phasenverschiebung im Konjunkturzyklus:
Wenn BIP und Zinsen denselben Zyklus haben, aber phasenverschoben sind, modelliert $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ die Verzoegerung.

2. Portfolio-Rotation:
Die Umschichtung eines Portfolios (gleiche Gesamtinvestition, andere Gewichtung) entspricht einer Drehung des Zustandsvektors in der komplexen Ebene.

3. Wachstum mit Oszillation:

$$z(t) = A\mathrm{e}^{(\sigma + \mathrm{i}\omega)t}$$

- $\sigma > 0$: exponentielles Wachstum
- ω: Oszillationsfrequenz
- Kombination: gedaempfte/wachsende Schwingung

Komplexe Zahlen verbinden Wachstum (Betrag) mit Oszillation (Phase) – ein maechtige Modellierungstechnik.

Python-Demo: Komplexe Zahlen mit cmath

Grundoperationen

```
import cmath, math

# Komplexe Zahlen definieren
z1 = 3 + 2j
z2 = 1 - 4j

# Grundrechenarten
print(z1 + z2)    # (4-2j)
print(z1 * z2)    # (11-10j)
print(z1 / z2)    # (-0.294+0.824j)

# Betrag und Phase
print(abs(z1))         # 3.606
print(cmath.phase(z1)) # 0.588 rad

# Konjugierte
print(z1.conjugate())  # (3-2j)
```

Polarform und Euler

```
# Normalform -> Polarform
r, phi = cmath.polar(z1)
print(f"r={r:.3f}, phi={phi:.3f}")
# r=3.606, phi=0.588

# Polarform -> Normalform
z = cmath.rect(2, math.pi/3)
print(f"z = {z.real:.3f} + "
      f"{z.imag:.3f}i")
# z = 1.000 + 1.732i

# Euler-Identitaet pruefen
e_ipi = cmath.exp(1j * cmath.pi)
print(e_ipi + 1)  # ~0j

# n-te Einheitswurzeln
n = 5
roots = [cmath.exp(2j*cmath.pi*k/n)
         for k in range(n)]
```

Python unterstuetzt komplexe Zahlen nativ – `j` statt `i`, Modul `cmath` fuer komplexe Funktionen.

Anwendungsbeispiel: Wechselstrom-Netzwerk

Aufgabe: Ein Serienschwingkreis besteht aus $R = 50\ \Omega$, $L = 0{,}2$ H und $C = 100\ \mu$F bei $\omega = 50\ \text{s}^{-1}$. Berechnen Sie die Gesamtimpedanz, den Betrag und die Phasenverschiebung.

Schritt 1: Einzelimpedanzen

$$Z_R = 50, \qquad Z_L = \mathrm{i}\omega L = \mathrm{i} \cdot 50 \cdot 0{,}2 = 10\mathrm{i}, \qquad Z_C = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} = \frac{1}{\mathrm{i} \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{0{,}005\mathrm{i}} = -200\mathrm{i}$$

Schritt 2: Gesamtimpedanz (Reihenschaltung)

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = 50 + 10\mathrm{i} - 200\mathrm{i} = 50 - 190\mathrm{i}\ \Omega$$

Schritt 3: Betrag und Phase

$$|Z| = \sqrt{50^2 + 190^2} = \sqrt{2500 + 36100} = \sqrt{38600} \approx 196{,}5\ \Omega$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-190}{50}\right) = \arctan(-3{,}8) \approx -75{,}3^\circ$$

Interpretation: Der Strom **eilt der Spannung voraus** ($\varphi < 0$, kapazitiv dominiert). Der Scheinwiderstand $|Z| \approx 196{,}5\ \Omega$ ist deutlich groesser als der Wirkwiderstand $50\ \Omega$.

Reale Schaltkreise lassen sich Schritt fuer Schritt mit komplexer Arithmetik analysieren – genau wie reelle Widerstaende.

Formeluebersicht: Komplexe Zahlen

Konzept	**Formel**	**Bemerkung**
Normalform	$z = a + b\mathrm{i}$	$a = \mathrm{Re}(z),\ b = \mathrm{Im}(z)$
Betrag	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	Abstand zum Ursprung
Konjugierte	$\bar{z} = a - b\mathrm{i}$	Spiegelung an Realachse
$z\bar{z}$	$z\bar{z} = \lvert z\rvert^2$	Immer reell ≥ 0
Inverses	$z^{-1} = \bar{z}/\lvert z\rvert^2$	Fuer $z \neq 0$
Polarform	$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$	$r = \lvert z\rvert$, $\varphi = \arg(z)$
Euler-Formel	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$	Verbindet e, cos, sin
de Moivre	$z^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$	Potenzierung
n-te Wurzel	$w_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi k)/n}$	$k = 0, \ldots, n-1$

Diese Formelsammlung deckt alle Kernformeln der Lektion ab – ideal zur Klausurvorbereitung.

Rechenregeln-Tabelle

Regel	**Formel**
Multiplikation Betraege	$\lvert z_1 z_2\rvert = \lvert z_1\rvert\,\lvert z_2\rvert$
Multiplikation Argumente	$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
Dreiecksungleichung	$\lvert z_1 + z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$
Konjugation Summe	$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
Konjugation Produkt	$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
Doppelte Konjugation	$\overline{\overline{z}} = z$
Real- und Imaginaerteil	$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$
Euler-Identitaet	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$
Potenzen von i	$\mathrm{i}^0 = 1,\ \mathrm{i}^1 = \mathrm{i},\ \mathrm{i}^2 = -1,\ \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$

Diese Rechenregeln gelten ausnahmslos – sie sind die Werkzeuge fuer jede Aufgabe mit komplexen Zahlen.

Zusammenfassung der Kernkonzepte

1. **Normalform:** $z = a + b\mathrm{i}$ mit $\mathrm{i}^2 = -1$. Geeignet fuer Addition und Subtraktion.
2. **Gaussche Zahlenebene:** z entspricht Punkt (a, b) – Geometrie und Algebra vereint.
3. **Grundoperationen:** Addition/Subtraktion komponentenweise, Multiplikation per Ausmultiplizieren, Division per konjugiert Erweitern.
4. **Betrag:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ misst den Abstand zum Ursprung; erfuellt die Dreiecksungleichung.
5. **Konjugierte:** $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$ mit $z\overline{z} = |z|^2$ – Schluessel zur Division und zum Inversem.
6. **Polarform:** $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ – ideal fuer Multiplikation, Division und Potenzierung.
7. **Eulersche Formel:** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ verbindet Exponential- und Trigonometrie.
8. **Wurzeln:** n-te Wurzel liefert n Loesungen, gleichmaessig auf einem Kreis verteilt.
9. **Anwendungen:** Impedanz, Signalverarbeitung, Rotationen, Schwingungsmodelle.

Komplexe Zahlen sind nicht "kompliziert" – sie vereinfachen viele Probleme, die in $\mathbb{R}$ schwierig waeren.

Weiterfuehrende Literatur

Standardwerke:

- **Needham, T.**: *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, 1997. – Herausragende geometrische Intuition.
- **Arens et al.**: *Mathematik*, Springer Spektrum, 2022. – Umfassendes deutschsprachiges Lehrbuch.
- **Papula, L.**: *Mathematik fuer Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Bd. 1, Springer Vieweg, 2018. – Anwendungsorientiert.
- **Sydsaeter, Hammond, Strom**: *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Pearson, 2021. – Wirtschaftsmathematik-Fokus.

Online-Ressourcen:

- **3Blue1Brown**: *Essence of Complex Analysis* – Interaktive Visualisierungen.
- **GeoGebra**: Gausssche Zahlenebene interaktiv erkunden.
- **Wolfram Alpha**: Komplexe Arithmetik pruefen und visualisieren.
- **Python** `cmath`: Offizielle Dokumentation fuer numerische Experimente.

Empfehlung: Needham fuer geometrische Intuition, Papula fuer Rechenpraxis, Python fuer Experimente.

Zusammenfassung: Lektion 3 – Komplexe Zahlen

Erreichte Lernziele

1. ✓ **Normalform:** Komplexe Zahlen als $z = a + bi$ darstellen, Real-/Imaginaerteil ablesen.
2. ✓ **Grundrechenarten:** Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division sicher durchfuehren.
3. ✓ **Betrag und Konjugierte:** $|z|$, $\overline{z}$, Dreiecksungleichung, $z\overline{z} = |z|^2$.
4. ✓ **Polarform:** Umrechnung Normal↔Polar, Euler-Formel, Multiplikation/Division.
5. ✓ **Wurzeln:** n-te Wurzeln, Einheitswurzeln, geometrische Verteilung.
6. ✓ **Anwendungen:** Impedanz, Fourier-Transformation, Rotationen.

Uebungshinweise:

- Rechnen Sie **jede Aufgabe** sowohl in Normalform als auch in Polarform – vergleichen Sie die Ergebnisse.
- Zeichnen Sie komplexe Zahlen **immer** in die Gausssche Ebene – die Geometrie hilft beim Verstaendnis.
- Nutzen Sie Python (`cmath`) zur **Ergebnisueberpruefung** – nicht als Ersatz fuer Handrechnung.
- Pruefen Sie Divisionen per **Probe**: $\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \stackrel{?}{=} z_1$.

Naechste Lektion: L04 – Folgen und Reihen

Konvergenz • Grenzwerte • Reihen • Konvergenzkriterien

Komplexe Zahlen sind das Fundament fuer Folgen, Reihen und Differentialgleichungen – sie begleiten uns weiter.