Vektoren und Matrizen – Quiz

Lektion 02 – Selbsttest

BSc Analysis

Frage 1

Was ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$?

A. Eine einzelne reelle Zahl

B. Ein geordnetes Tripel (x_1, x_2, x_3) reeller Zahlen

C. Eine Menge ohne Ordnung

D. Eine 3×3-Matrix

Frage 1

Was ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$?

A. Eine einzelne reelle Zahl

B. Ein geordnetes Tripel (x_1, x_2, x_3) reeller Zahlen

C. Eine Menge ohne Ordnung

D. Eine 3×3-Matrix

Antwort: B

Ein Vektor im $\mathbb{R}^3$ ist ein geordnetes Tripel reeller Zahlen, also ein Element der Menge $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$. Die Reihenfolge der Komponenten ist wesentlich.

Frage 2

Welche Dimension hat der Vektorraum $\mathbb{R}^4$?

A. 3
B. 1
C. 4
D. 8

Frage 2

Welche Dimension hat der Vektorraum $\mathbb{R}^4$?

A. 3

B. 1

C. 4

D. 8

Antwort: C

Die Dimension von $\mathbb{R}^n$ ist n. Also hat $\mathbb{R}^4$ die Dimension 4. Die Standardbasis besteht aus den vier Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$.

Frage 3

Was unterscheidet einen Spaltenvektor von einem Zeilenvektor?

A. Spaltenvektoren haben mehr Komponenten
B. Zeilenvektoren sind immer laenger
C. Ein Spaltenvektor ist eine $n \times 1$-Matrix, ein Zeilenvektor eine $1 \times n$-Matrix
D. Es gibt keinen Unterschied

Frage 3

Was unterscheidet einen Spaltenvektor von einem Zeilenvektor?

A. Spaltenvektoren haben mehr Komponenten

B. Zeilenvektoren sind immer laenger

C. Ein Spaltenvektor ist eine $n \times 1$-Matrix, ein Zeilenvektor eine $1 \times n$-Matrix

D. Es gibt keinen Unterschied

Antwort: C

Ein Spaltenvektor ordnet die Komponenten vertikal an ($n \times 1$-Matrix), ein Zeilenvektor horizontal ($1 \times n$-Matrix). Die Unterscheidung ist fuer die Matrizenmultiplikation wesentlich.

Frage 4

Seien $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Was ist $\mathbf{u} + \mathbf{v}$?

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Frage 4

Seien $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Was ist $\mathbf{u} + \mathbf{v}$?

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Antwort: A

Vektoraddition erfolgt komponentenweise: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 + (-1) \\ -1 + 4 \\ 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Frage 5

Was ist $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$**?**

A. $\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix}$

Frage 5

Was ist $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$**?**

A. $\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix}$

Antwort: B

Zuerst Skalarmultiplikation, dann Subtraktion: $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$.

Frage 6

Welcher Vektor ist eine Linearkombination von $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten $\alpha = 3$ und $\beta = -2$?

A. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Frage 6

Welcher Vektor ist eine Linearkombination von $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten $\alpha = 3$ und $\beta = -2$?

A. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Antwort: B

Die Linearkombination ist $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Frage 7

Was ist das Skalarprodukt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ fuer $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

A. 0

B. 4

C. 8

D. 12

Frage 7

Was ist das Skalarprodukt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ fuer $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

A. 0

B. 4

C. 8

D. 12

Antwort: C

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 4 - 2 + 6 = 8.$

Frage 8

Zwei Vektoren u und v stehen senkrecht aufeinander (sind orthogonal), genau dann wenn:

A. $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$

B. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1$

C. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$

D. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Frage 8

Zwei Vektoren u und v stehen senkrecht aufeinander (sind orthogonal), genau dann wenn:

A. $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$

B. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1$

C. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$

D. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Antwort: C

Orthogonalitaet bedeutet, dass das Skalarprodukt verschwindet: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Geometrisch entspricht dies einem Winkel von 90 zwischen den Vektoren.

Frage 9

Was ist das Kreuzprodukt $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ fuer $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

A. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Frage 9

Was ist das Kreuzprodukt $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ fuer $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

A. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Antwort: C

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das Kreuzprodukt von $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ ist $\mathbf{e}_3$.

Frage 10

Welche Dimension hat die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$**?**

A. 3×2

B. 2×3

C. 6×1

D. 2×2

Frage 10

Welche Dimension hat die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$?

A. 3×2
B. 2×3
C. 6×1
D. 2×2

Antwort: B
Die Matrix hat 2 Zeilen und 3 Spalten, also ist die Dimension 2×3. Die Konvention ist stets: Zeilenanzahl $\times$ Spaltenanzahl.

Frage 11

Was ist die 3×3-Einheitsmatrix?

A. Eine Matrix mit lauter Einsen
B. Eine Matrix mit Einsen auf der Diagonale und Nullen sonst
C. Eine Matrix mit Nullen auf der Diagonale und Einsen sonst
D. Die Nullmatrix

Frage 11

Was ist die 3×3-Einheitsmatrix?

A. Eine Matrix mit lauter Einsen
B. Eine Matrix mit Einsen auf der Diagonale und Nullen sonst
C. Eine Matrix mit Nullen auf der Diagonale und Einsen sonst
D. Die Nullmatrix

Antwort: B

Die Einheitsmatrix $\mathbf{I}_3$ hat Einsen auf der Hauptdiagonale und ueberall sonst Nullen. Sie ist das neutrale Element der Matrizenmultiplikation: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Frage 12

Welche der folgenden Matrizen ist eine Diagonalmatrix?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Frage 12

Welche der folgenden Matrizen ist eine Diagonalmatrix?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Antwort: B

Eine Diagonalmatrix hat ausserhalb der Hauptdiagonale nur Nullen. Nur $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ erfuellt diese Bedingung.

Frage 13

Seien $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Was ist $\mathbf{A} + \mathbf{B}$?

A. $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 21 & 32 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$

Frage 13

Seien $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Was ist $\mathbf{A} + \mathbf{B}$?

A. $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 21 & 32 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$

Antwort: A

Matrizenaddition erfolgt komponentenweise: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

Frage 14

Seien $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Was ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$?

A. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Frage 14

Seien $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Was ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$?

A. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Antwort: B

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Frage 15

Fuer Matrizen A und B gilt im Allgemeinen:

A. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

B. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

C. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

D. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ existiert immer

Frage 15

Fuer Matrizen A und B gilt im Allgemeinen:

A. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
B. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
C. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$
D. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ existiert immer

Antwort: B
Die Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ, d. h. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Es gibt Spezialfaelle (z. B. Diagonalmatrizen), aber die Regel ist Nicht-Kommutativitaet.

Frage 16

Was ist die Transponierte von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$?

A. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Was ist die Transponierte von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$?

A. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Antwort: B

Beim Transponieren werden Zeilen und Spalten vertauscht: Die i-te Zeile wird zur i-ten Spalte. Aus der 2×3-Matrix wird eine 3×2-Matrix.

Frage 17

Welche Rechenregel gilt fuer die Transponierte eines Matrizenprodukts?

A. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{B}^{\mathsf{T}}$

B. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$

C. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

D. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

Frage 17

Welche Rechenregel gilt fuer die Transponierte eines Matrizenprodukts?

A. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{B}^{\mathsf{T}}$

B. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$

C. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

D. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

Antwort: B

Die Transponierte eines Produkts kehrt die Reihenfolge um: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$. Diese Regel wird Schuhanzieher-Regel (shoe-sock rule) genannt.

Frage 18

Was ist die Determinante von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$?

A. 14

B. 10

C. 12

D. 5

Frage 18

Was ist die Determinante von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$?

A. 14

B. 10

C. 12

D. 5

Antwort: B

Fuer eine 2×2-Matrix gilt: $\det(\mathbf{A}) = ad - bc = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10$.

Frage 19

Wie berechnet man die Determinante der 3×3-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

A. -5

B. 1

C. 5

D. -1

Frage 19

Wie berechnet man die Determinante der 3×3-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

A. -5

B. 1

C. 5

D. -1

Antwort: A

Entwicklung nach der 2. Zeile (nur ein Nicht-Null-Eintrag): $\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 3) = 1 - 6 = -5$.

Frage 20

Was passiert mit der Determinante, wenn man zwei Zeilen einer Matrix vertauscht?

A. Sie bleibt gleich
B. Sie wird verdoppelt
C. Sie aendert das Vorzeichen
D. Sie wird Null

Frage 20

Was passiert mit der Determinante, wenn man zwei Zeilen einer Matrix vertauscht?

A. Sie bleibt gleich
B. Sie wird verdoppelt
C. Sie aendert das Vorzeichen
D. Sie wird Null

Antwort: C
Das Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) aendert das Vorzeichen der Determinante. Diese Eigenschaft ist fundamental fuer die Berechnung mit dem Gauss-Verfahren.

Frage 21

Wie lautet die Inverse von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$

Frage 21

Wie lautet die Inverse von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$

Antwort: A

Fuer eine 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt: $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Hier: $\det(\mathbf{A}) = 2 - 1 = 1$, also $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Frage 22

Wann existiert die Inverse einer quadratischen Matrix A NICHT?

A. Wenn $\mathbf{A}$ symmetrisch ist

B. Wenn $\det(\mathbf{A}) = 0$

C. Wenn $\mathbf{A}$ eine Diagonalmatrix ist

D. Wenn $\mathbf{A}$ die Einheitsmatrix ist

Frage 22

Wann existiert die Inverse einer quadratischen Matrix A NICHT?

A. Wenn $\mathbf{A}$ symmetrisch ist

B. Wenn $\det(\mathbf{A}) = 0$

C. Wenn $\mathbf{A}$ eine Diagonalmatrix ist

D. Wenn $\mathbf{A}$ die Einheitsmatrix ist

Antwort: B

Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar (regulaer), wenn ihre Determinante ungleich Null ist. Ist $\det(\mathbf{A}) = 0$, so heisst die Matrix singulaer und besitzt keine Inverse.

Frage 23

Welche Eigenschaft hat das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$?

A. Es ergibt die Nullmatrix
B. Es ergibt $\mathbf{A}^2$
C. Es ergibt die Einheitsmatrix $\mathbf{I}$
D. Es ist nicht definiert

Frage 23

Welche Eigenschaft hat das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$?

A. Es ergibt die Nullmatrix
B. Es ergibt $\mathbf{A}^2$
C. Es ergibt die Einheitsmatrix $\mathbf{I}$
D. Es ist nicht definiert

Antwort: C
Per Definition der Inversen gilt: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Die Inverse ist das multiplikative Gegenstueck einer Matrix.

Frage 24

Welches Ergebnis liefert die Gauss-Elimination fuer das System $x + y = 3$ und $2x + 2y = 6$?

A. Genau eine Loesung: $x = 3, y = 0$

B. Keine Loesung

C. Unendlich viele Loesungen

D. Genau eine Loesung: $x = 1, y = 2$

Frage 24

Welches Ergebnis liefert die Gauss-Elimination fuer das System $x + y = 3$ und $2x + 2y = 6$?

A. Genau eine Loesung: $x = 3, y = 0$

B. Keine Loesung

C. Unendlich viele Loesungen

D. Genau eine Loesung: $x = 1, y = 2$

Antwort: C

Die zweite Gleichung ist das Doppelte der ersten: $2(x + y) = 2 \cdot 3 = 6$. Die Gleichungen sind linear abhaengig. Die Loesungsmenge ist $\{(3 - t,\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ – unendlich viele Loesungen.

Frage 25

Was ist die Loesung des Systems $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$**?**

A. $x = 2,\ y = 2$

B. $x = 4,\ y = 0$

C. $x = 3,\ y = 1$

D. $x = 1,\ y = 3$

Frage 25

Was ist die Loesung des Systems $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

A. $x = 2,\ y = 2$

B. $x = 4,\ y = 0$

C. $x = 3,\ y = 1$

D. $x = 1,\ y = 3$

Antwort: C

Aus $x + y = 4$ und $x - y = 2$ folgt durch Addition $2x = 6$, also $x = 3$. Einsetzen: $3 + y = 4$, also $y = 1$. Probe: $3 - 1 = 2$. Die Loesung ist $x = 3, y = 1$.

Frage 26

Was ist ein Eigenwert einer Matrix A?

A. Ein Vektor, der durch **A** auf sich selbst abgebildet wird

B. Eine Zahl λ, fuer die $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ gilt

C. Der groesste Eintrag der Matrix

D. Die Spur der Matrix

Frage 26

Was ist ein Eigenwert einer Matrix A?

A. Ein Vektor, der durch **A** auf sich selbst abgebildet wird

B. Eine Zahl λ, fuer die $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ gilt

C. Der groesste Eintrag der Matrix

D. Die Spur der Matrix

Antwort: B

Ein Eigenwert λ ist eine Zahl, fuer die es einen Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ mit $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ gibt. Die Eigenwerte findet man ueber die charakteristische Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.

Frage 27

Was sind die Eigenwerte von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?

A. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0$

B. $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 3$

C. $\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 0$

D. $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1$

Frage 27

Was sind die Eigenwerte von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?

A. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0$

B. $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 3$

C. $\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 0$

D. $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1$

Antwort: B

Fuer eine obere Dreiecksmatrix sind die Eigenwerte die Diagonaleintraege. Alternativ: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 0 = 0$ liefert $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 3$.

Frage 28

Die Matrix A $= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **beschreibt welche lineare Abbildung in** $\mathbb{R}^2$**?**

A. Spiegelung an der x-Achse
B. Skalierung um den Faktor 2
C. Drehung um 90 gegen den Uhrzeigersinn
D. Projektion auf die x-Achse

Frage 28

Die Matrix A $= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **beschreibt welche lineare Abbildung in** $\mathbb{R}^2$**?**

A. Spiegelung an der x-Achse

B. Skalierung um den Faktor 2

C. Drehung um 90 gegen den Uhrzeigersinn

D. Projektion auf die x-Achse

Antwort: C

Die Drehmatrix fuer den Winkel θ ist $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Fuer $\theta = 90$: $\cos 90 = 0$, $\sin 90 = 1$, also $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Frage 29

Im Leontief-Modell sei die Technologiematrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$ und der Endnachfragevektor $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$. Welche Gleichung bestimmt den Produktionsvektor x?

A. $\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}$

B. $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{d}$

C. $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{d}$

D. $\mathbf{x} = \mathbf{d} - \mathbf{A}$

Frage 29

Im Leontief-Modell sei die Technologiematrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$ und der Endnachfragevektor $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$. Welche Gleichung bestimmt den Produktionsvektor x?

A. $\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}$

B. $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{d}$

C. $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{d}$

D. $\mathbf{x} = \mathbf{d} - \mathbf{A}$

Antwort: B

Im Leontief-Modell gilt $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{d}$, also $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d}$. Die Loesung ist $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d}$, wobei $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ die Leontief-Inverse heisst.

Frage 30

Eine Markov-Uebergangsmatrix P hat welche Eigenschaft?

A. Alle Eintraege sind negativ
B. Die Determinante ist immer 1
C. Jede Spaltensumme ist 1 und alle Eintraege sind nicht-negativ
D. Sie ist immer symmetrisch

Frage 30

Eine Markov-Uebergangsmatrix P hat welche Eigenschaft?

A. Alle Eintraege sind negativ

B. Die Determinante ist immer 1

C. Jede Spaltensumme ist 1 und alle Eintraege sind nicht-negativ

D. Sie ist immer symmetrisch

Antwort: C

Eine (spalten-)stochastische Uebergangsmatrix hat nicht-negative Eintraege, und jede Spalte summiert sich zu 1. Die Eintraege repraesentieren Uebergangswahrscheinlichkeiten, die zusammen 100% ergeben muessen.