Vektoren und Matrizen

Ueberblick in 5 Minuten

BSc Analysis

Was ist ein Vektor?

Definition

Ein **Vektor** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist ein geordnetes n-Tupel reeller Zahlen. Er beschreibt eine Groesse mit *Betrag* und *Richtung*.

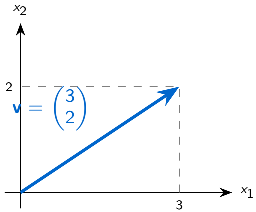
Spaltenvektor (Standard):

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Zeilenvektor:

$$\mathbf{v}^\top = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Geometrische Darstellung ($\mathbb{R}^2$):



Beispiel: Preisvektor $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$ beschreibt die Preise dreier Gueter. Norm: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$.

Vektoren in $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern den Ortsbegriff auf n Dimensionen.

Vektoroperationen

1. **Addition** $(\mathbf{u}+\mathbf{v})$: komponentenweise

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

2. **Subtraktion** $(\mathbf{u}-\mathbf{v})$: komponentenweise

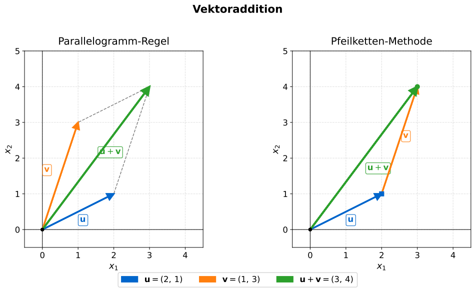
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. **Skalarmultiplikation** $(\lambda\,\mathbf{v})$:

$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, v_1 \\ \lambda\, v_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda > 1$: strecken, $0 < \lambda < 1$: stauchen, $\lambda < 0$: umkehren.

Rechenregeln: $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ (kommutativ), $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ (distributiv).



Parallelogrammregel: $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ als Diagonale.

Alle Operationen funktionieren komponentenweise – einfach, aber maechtig.

Was ist eine Matrix?

Definition

Eine **Matrix** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten.

Allgemeine Form:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel (2×3):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Spezialmatrizen:

Einheitsmatrix $\mathbf{I}_n$:

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{I} = \mathbf{A}$$

Diagonalmatrix:

$$\operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

Nullmatrix $\mathbf{0}$: alle Eintraege $= 0$.

Konvention: Matrizen in Grossbuchstaben ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$), Vektoren in Kleinbuchstaben ($\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$).

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kann als Sammlung von n Spaltenvektoren oder m Zeilenvektoren gelesen werden.

Matrizenoperationen

1. Addition (gleiche Dimension):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Skalarmultiplikation:

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

3. Matrixmultiplikation (Zeile $\times$ Spalte):
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times n} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell}\, b_{\ell j}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Achtung: Multiplikation ist *nicht* kommutativ!

Im Allgemeinen gilt $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Ausserdem muss die “innere Dimension” uebereinstimmen: $\mathbb{R}^{m \times k} \cdot \mathbb{R}^{k \times n}$.

Merke: Zeile mal Spalte – die innere Dimension muss passen, die aeusseren bestimmen das Ergebnis.

Zusammenfassung und Lernziele

Was Sie jetzt wissen sollten

1. Ein **Vektor** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist ein geordnetes n-Tupel; Darstellung als Spalten- oder Zeilenvektor.
2. **Vektoroperationen:** Addition, Subtraktion, Skalarmultiplikation – alle komponentenweise.
3. Eine **Matrix** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hat m Zeilen und n Spalten; Spezialfaelle $\mathbf{I}$, diag, $\mathbf{0}$.
4. **Matrixmultiplikation:** Zeile $\times$ Spalte, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ im Allgemeinen.

Naechste Schritte:

- Skalarprodukt und Kreuzprodukt
- Transponierte und Inverse
- Determinanten und Eigenwerte
- Anwendung: Input-Output-Modelle

Zentrale Formel-Uebersicht:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\textstyle\sum_i v_i^2} \qquad \text{(Norm)}$$

$$c_{ij} = \textstyle\sum_\ell a_{i\ell}\, b_{\ell j} \qquad \text{(Multiplikation)}$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{I} = \mathbf{A} \qquad \text{(Einheitsmatrix)}$$

Vertiefung: 02_vektoren_matrizen_mini10 – Kompakter Einstieg mit Skalarprodukt, Determinanten und Python-Beispielen.

(c) Joerg Osterrieder 2025