Vektoren und Matrizen

Kompakter Einstieg in 10 Minuten

BSc Analysis

Was ist ein Vektor?

Definition

Ein **Vektor** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist ein geordnetes n-Tupel reeller Zahlen. Er beschreibt eine Groesse mit *Betrag* und *Richtung*.

Spaltenvektor (Standard):

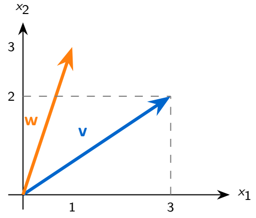
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Zeilenvektor: $\mathbf{v}^\mathsf{T} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

Ortsvektor: Vektor vom Ursprung zum Punkt $P = (p_1, p_2)$:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Geometrische Darstellung ($\mathbb{R}^2$):



Norm (Laenge): $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$

Jeder Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ kann mit seinem Ortsvektor identifiziert werden.

Vektoroperationen

1. Addition $(\mathbf{u}+\mathbf{v})$: komponentenweise

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

2. Subtraktion $(\mathbf{u}-\mathbf{v})$: komponentenweise

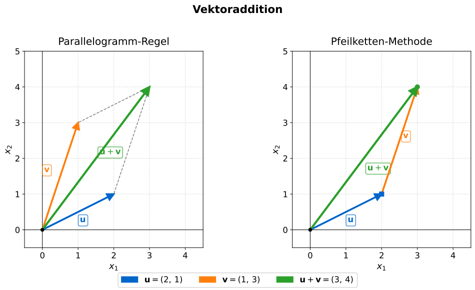
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Skalarmultiplikation $(\lambda\,\mathbf{v})$:

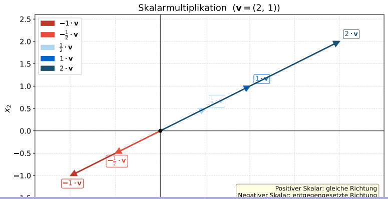
$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, v_1 \\ \lambda\, v_2 \end{pmatrix}$$

4. Linearkombination: $\mathbf{w} = \alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v}$

Beispiel: $2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$



Parallelogrammregel: $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ als Diagonale.



Skalarprodukt

Definition

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\mathsf{T} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \, v_i = \|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\| \; \cos\theta.$$

Rechenbeispiel:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 8$$

Geometrische Interpretation:

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$: spitzer Winkel ($\theta < 90$)
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$: rechter Winkel ($\theta = 90$)
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$: stumpfer Winkel ($\theta > 90$)

Orthogonalitaet:
Zwei Vektoren stehen **senkrecht** aufeinander, genau dann wenn

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Beispiel: $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 \; \checkmark$$

Winkelformel:

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\|}$$

Das Skalarprodukt misst die “Gleichgerichtetheit” zweier Vektoren – zentral fuer Projektionen und Winkel.

Kreuzprodukt (nur $\mathbb{R}^3$)

Definition

Das **Kreuzprodukt** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ liefert einen Vektor, der senkrecht auf $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ steht:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Rechenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

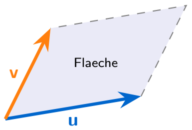
Eigenschaften:

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ (antikommutativ)
- $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \perp \mathbf{u}$ und $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \perp \mathbf{v}$

Geometrische Bedeutung:

Der Betrag $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ entspricht dem **Flaecheninhalt** des von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin\theta$$



Das Kreuzprodukt existiert nur in $\mathbb{R}^3$ – es liefert Normalenvektoren und Flaecheninhalte.

Was ist eine Matrix?

Definition

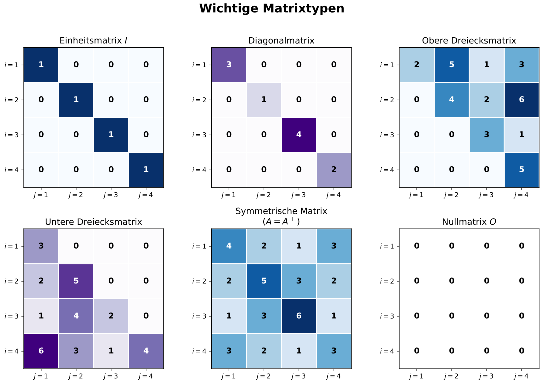
Eine **Matrix** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten. Eintrag in Zeile i, Spalte j: a_{ij}.

Allgemeine Form:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Typen:

- $m = n$: **quadratisch**
- $m = 1$: **Zeilenvektor**
- $n = 1$: **Spaltenvektor**
- $a_{ij} = 0$ fuer $i \neq j$: **Diagonalmatrix**
- $\mathbf{I}_n$: **Einheitsmatrix** (δ_{ij})



Uebersicht wichtiger Matrixtypen.

Matrizen codieren lineare Abbildungen, Gleichungssysteme und Daten – sie sind das Arbeitspferd der Linearen Algebra.

Matrizenoperationen

1. Addition (gleiche Dimension):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Skalarmultiplikation:

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

3. Matrixmultiplikation (Zeile $\times$ Spalte):
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times n} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell}\, b_{\ell j}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 2 \\ 39 & 4 \end{pmatrix}$$

Wichtige Rechenregeln

- $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (distributiv)
- $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (assoziativ)
- $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ im Allgemeinen (**nicht** kommutativ!)
- $\mathbf{A\,I} = \mathbf{I\,A} = \mathbf{A}$ (neutrales Element)

Merke: Zeile mal Spalte – die innere Dimension k muss uebereinstimmen.

Transponierte Matrix

Definition

Die **Transponierte** $\mathbf{A}^\top$ entsteht durch Vertauschung von Zeilen und Spalten:

$$(\mathbf{A}^\top)_{ij} = a_{ji}.$$

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Dimension: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow \mathbf{A}^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Symmetrische Matrix:
$\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$ (nur fuer quadratische Matrizen)

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^\top$$

Wichtige Rechenregeln:

1. $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$
3. $(\lambda \mathbf{A})^\top = \lambda \mathbf{A}^\top$
4. $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$ (Reihenfolge!)

Merke

Beim Transponieren eines Produktes dreht sich die Reihenfolge um:

$$(\mathbf{ABC})^\top = \mathbf{C}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$$

Transposition und Symmetrie spielen eine Schluesselrolle bei Kovarianzmatrizen und quadratischen Formen.

Determinante – Ueberblick

Definition (2×2)

Fuer eine quadratische Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt:

$$\det(\mathbf{A}) = ad - bc.$$

Rechenbeispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10$$

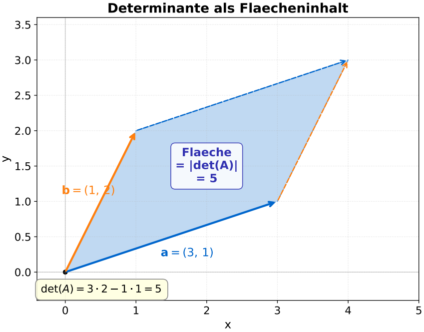
Fuer 3×3 (Sarrus-Regel):

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Wichtige Eigenschaften:

- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$
- $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$
- $\mathbf{A}$ invertierbar $\iff \det(\mathbf{A}) \neq 0$

Geometrische Bedeutung:



Wirtschaftliche Anwendung: Input-Output-Modell

Leontief-Modell (Kurzfassung)

Die Volkswirtschaft hat n Sektoren. Die **Technologiematrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$** beschreibt, wie viel jeder Sektor von den anderen bezieht.

Grundgleichung:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{d} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

- $\mathbf{x}$: Bruttoproduktion (Output)
- $\mathbf{Ax}$: Vorleistungen (Zwischenverbrauch)
- $\mathbf{d}$: Endnachfrage (Konsum, Export)

Loesung (falls $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ invertierbar):

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{d}$$

$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ heisst **Leontief-Inverse**.

Zahlenbeispiel (2 Sektoren):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \; \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0{,}48 - 0{,}03 = 0{,}45$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d} \approx \begin{pmatrix} 186{,}7 \\ 131{,}1 \end{pmatrix}$$

Sektor 1 muss $\approx$187 Einheiten produzieren, Sektor 2 $\approx$131 Einheiten.

Das Leontief-Modell zeigt, wie Matrizenrechnung reale Wirtschaftsverflechtungen quantifiziert.

Python-Beispiel: Vektoren und Matrizen mit NumPy

Vektoren:

```python
import numpy as np

# Vektoren definieren
u = np.array([1, 2, 3])
v = np.array([4, -1, 2])

# Operationen
print(u + v) # [5 1 5]
print(3 * u) # [3 6 9]
print(np.dot(u, v)) # 8 (Skalarprodukt)
print(np.cross(u, v)) # Kreuzprodukt
print(np.linalg.norm(u)) # Norm
```

Winkel zwischen Vektoren:

```python
cos_theta = np.dot(u, v) / (
    np.linalg.norm(u) * np.linalg.norm(v))
theta = np.arccos(cos_theta)
print(f"Winkel: {np.degrees(theta):.1f} Grad")
```

Matrizen:

```python
A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
B = np.array([[5, 0], [6, 1]])

# Operationen
print(A + B) # Addition
print(A @ B) # Multiplikation
print(A.T) # Transponierte
print(np.linalg.det(A)) # Determinante
print(np.linalg.inv(A)) # Inverse
```

Leontief-Modell:

```python
A_tech = np.array([[0.2, 0.3],
                   [0.1, 0.4]])
d = np.array([100, 80])
I = np.eye(2)

x = np.linalg.solve(I - A_tech, d)
print(f"Produktion: {x}")
# [186.67 131.11]
```

NumPy verwendet `@` fuer Matrixmultiplikation und `np.linalg` fuer Determinante, Inverse und Loesungen.

Zusammenfassung und Lernziele

Nach dieser Lektion koennen Sie ...

1. **Vektoren** in $\mathbb{R}^n$ definieren und geometrisch darstellen (Orts-, Spalten-, Zeilenvektor).
2. **Vektoroperationen** ausfuehren: Addition, Skalarmultiplikation, Linearkombination.
3. Das **Skalarprodukt** berechnen und fuer Winkel und Orthogonalitaet nutzen.
4. Das **Kreuzprodukt** in $\mathbb{R}^3$ bilden und als Flaecheninhalt interpretieren.
5. **Matrizen** klassifizieren ($\mathbf{I}$, Diagonal, symmetrisch) und operieren (Addition, Multiplikation).
6. Die **Transponierte** bilden und Regeln wie $(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ anwenden.
7. Die **Determinante** (2×2) berechnen und geometrisch deuten.
8. Das **Leontief-Modell** $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d}$ aufstellen und loesen.

Kernformeln:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum u_i v_i \qquad \text{(Skalarprodukt)}$$

$$\det(\mathbf{A}) = ad - bc \qquad \text{(Determinante)}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d} \qquad \text{(Leontief)}$$

Ausblick – Core-Version:

- Inverse Matrix und Gauss-Elimination
- Eigenwerte und Eigenvektoren
- Lineare Transformationen
- Markov-Ketten

Vertiefung: 02_vektoren_matrizen_core – Vollstaendige Lektion mit Eigenwerten, Gauss-Elimination und weiteren Anwendungen.