Vektoren und Matrizen

Vollstaendige Vorlesung

BSc Analysis

Inhaltsverzeichnis

Definition

Ein **Vektor** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist ein geordnetes n-Tupel reeller Zahlen:

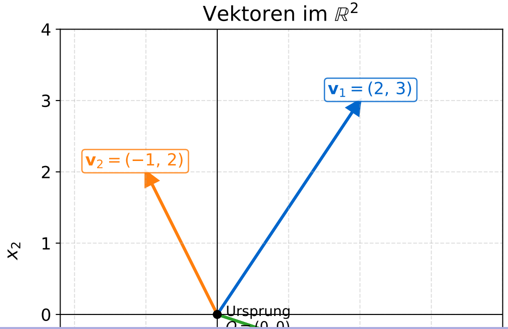
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Interpretationen:

- **Geometrisch:** Pfeil mit Richtung und Laenge
- **Physikalisch:** Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung
- **Algebraisch:** Element eines Vektorraums
- **Informatik:** Array von Zahlen

Spezielle Vektoren:

- Nullvektor: $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^T$
- Einheitsvektoren: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$



Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Im $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jeder Vektor ist Linearkombination: $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$.

Im $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel (Oekonomie): Portfolio-Vektor $\mathbf{w} = (0{,}4;\ 0{,}35;\ 0{,}25)^\mathsf{T}$ beschreibt die Gewichtung von drei Anlageklassen.

Beispiel (Physik): Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} = (3;\ -2;\ 5)^\mathsf{T}$ in m/s.

Die Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ erzeugt den gesamten $\mathbb{R}^n$.

Vektorraum – Axiome

Definition (Vektorraum)

Ein **Vektorraum** $(V, +, \cdot)$ ueber $\mathbb{R}$ ist eine Menge V mit zwei Operationen (Addition, Skalarmultiplikation), die folgende Axiome erfuellen:

Addition $(+)$:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (Kommutativ)
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (Assoziativ)
3. $\exists \mathbf{0} : \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ (Neutrales El.)
4. $\exists -\mathbf{v} : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ (Inverses)

Skalarmultiplikation $(\cdot)$:

5. $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$ (Assoziativ)
6. $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ (Neutrales El.)
7. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ (Distributiv I)
8. $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ (Distributiv II)

Standardbeispiel: $\mathbb{R}^n$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

Weitere Beispiele: Raum der Polynome vom Grad $\leq n$; Raum der stetigen Funktionen $C[a, b]$.

Diese 8 Axiome bilden das Fundament der gesamten linearen Algebra.

Vektoraddition und Subtraktion

Definition

Fuer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$:

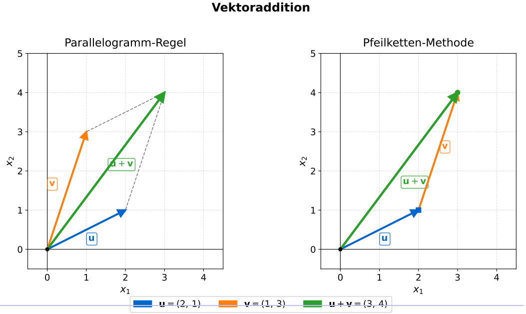
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ \vdots \\ u_n - v_n \end{pmatrix}$$

Zahlenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Geometrisch:

- Addition: Parallelogrammregel
- Subtraktion: Verbindungsvektor



Vektoraddition ist kommutativ und assoziativ – wie die Addition reeller Zahlen.

Skalarmultiplikation

Definition

Fuer $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$:

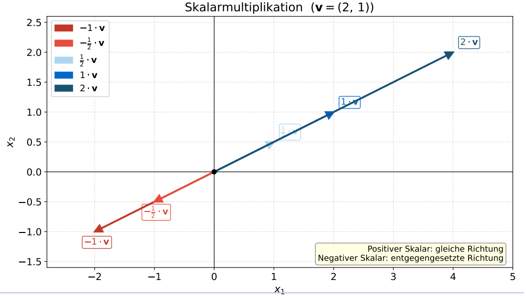
$$\alpha \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}$$

Wirkung:

- $|\alpha| > 1$: Streckung
- $0 < |\alpha| < 1$: Stauchung
- $\alpha < 0$: Richtungsumkehr
- $\alpha = 0$: Nullvektor

Beispiel:

$$3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$



Skalarmultiplikation aendert Laenge und ggf. Richtung, aber nicht die "Gerade" des Vektors.

Linearkombination und lineare Unabhaengigkeit

Definition (Linearkombination)

Ein Vektor $\mathbf{w}$ heisst **Linearkombination** von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, falls

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k \quad \text{mit } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Definition (Lineare Unabhaengigkeit)

Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sind **linear unabhaengig**, falls

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Andernfalls heissen sie **linear abhaengig**.

Beispiel: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhaengig (Standardbasis).

$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind linear abhaengig: $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$.

Kriterium: In $\mathbb{R}^n$ sind maximal n Vektoren linear unabhaengig.

Lineare Unabhaengigkeit bedeutet: Kein Vektor ist "ueberfluessig" – keiner folgt aus den anderen.

Basis und Dimension

Definition (Basis)

Eine Menge $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ heisst **Basis** von V, falls:

1. Die Vektoren sind **linear unabhaengig**.
2. Jeder Vektor in V ist Linearkombination von $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ (Erzeugendensystem).

Definition (Dimension)

Die **Dimension** von V ist die Anzahl der Basisvektoren: $\dim(V) = n$.

Beispiele:

- $\mathbb{R}^n$: Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
- Polynome $\leq$ Grad 2: Basis $\{1, x, x^2\}$, Dimension 3
- $\{(1,1)^\mathsf{T}, (1,-1)^\mathsf{T}\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$ (nicht die Standard-Basis!)

Wichtige Fakten:

- Jede Basis von V hat *gleich viele* Elemente (Basisaustauschsatz).
- Die Darstellung eines Vektors bzgl. einer Basis ist *eindeutig*.

Die Wahl der Basis ist frei – verschiedene Basen geben verschiedene Koordinaten fuer denselben Vektor.

Skalarprodukt (Dot Product)

Definition

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist

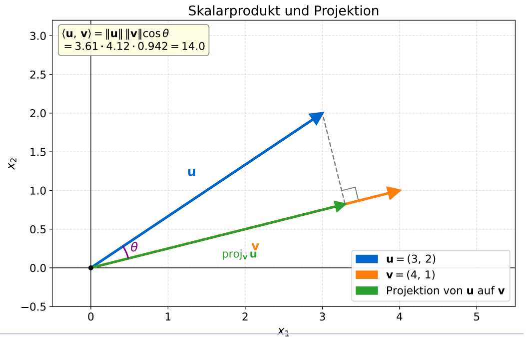
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\top \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \ \in \mathbb{R}.$$

Eigenschaften:

- Symmetrisch: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
- Bilinear: $\langle \alpha \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$
- Positiv definit: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0, = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Beispiel:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 8 - 3 - 5 = 0$$



Skalarprodukt $= 0$ bedeutet Orthogonalität – eines der wichtigsten Konzepte der linearen Algebra.

Winkelformel

Der Winkel θ zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ $(\neq \mathbf{0})$ ist

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}.$$

Spezialfaelle:

Skalarprodukt	Winkel	Bedeutung
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$	$0 < \theta < 90$	spitzer Winkel
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$	$\theta = 90$	**orthogonal** $(\mathbf{u} \perp \mathbf{v})$
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$	$90 < \theta < 180$	stumpfer Winkel

Beispiel: $\mathbf{u} = (1, 1)^\mathsf{T}$, $\mathbf{v} = (1, -1)^\mathsf{T}$:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{u} \perp \mathbf{v}.$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \quad$ (sichert $|\cos\theta| \leq 1$).

Orthogonale Zerlegungen sind zentral in Statistik (Regression), Signalverarbeitung und Quantenmechanik.

Norm (Laenge) eines Vektors

Definition (Euklidische Norm)

Die **Norm** (Laenge, Betrag) von $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Eigenschaften:

1. $\|\mathbf{v}\| \geq 0, \quad \|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (Definitheit)
2. $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$ (Homogenitaet)
3. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (Dreiecksungleichung)

Einheitsvektor: $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ hat Laenge 1 (Normierung).

Beispiel: $\mathbf{v} = (3, 4)^\mathsf{T}$: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$, $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{5}(3, 4)^\mathsf{T}$.

Abstand: $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ (euklidische Metrik).

Die Dreiecksungleichung verallgemeinert: "Der direkte Weg ist nie laenger als ein Umweg."

Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Definition

Das **Kreuzprodukt** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ fuer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ist

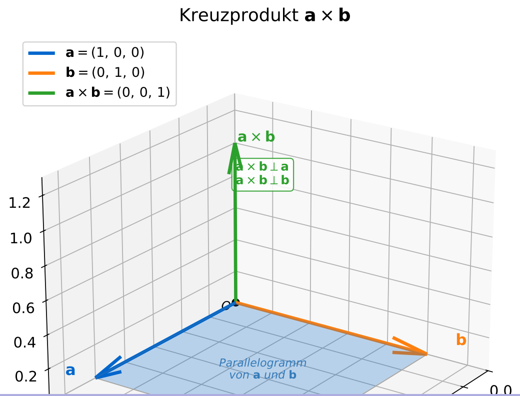
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften:

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ und $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$
- Antikommutativ: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
- $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin\theta$
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Kreuzprodukt – Anwendungen

1. Flaechenberechnung:
Flaeche des Dreiecks mit Ecken A, B, C:

$$F = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$$

Beispiel: $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

2. Volumenberechnung (Spatprodukt):

$$V = |\langle \mathbf{a}, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \rangle| = |\det\big((\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})\big)|$$

3. Normalenvektor einer Ebene:
Ebene durch P mit Richtungsvektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: Normalenvektor $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Das Kreuzprodukt existiert nur in $\mathbb{R}^3$ (und $\mathbb{R}^7$) – in anderen Dimensionen gibt es kein Analogon.

Matrixbegriff und Matrixtypen

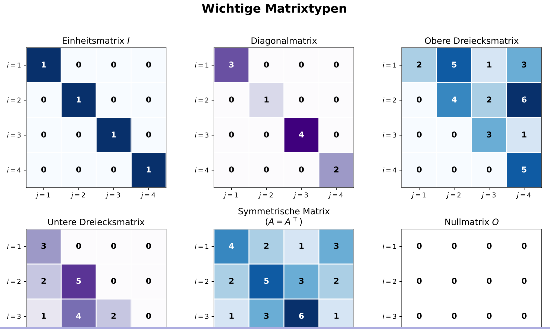
Definition

Eine **Matrix A** $\in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Wichtige Typen:

- **Quadratisch:** $m = n$
- **Einheitsmatrix:** $\mathbf{I}_n$ (1 auf Diagonale)
- **Nullmatrix:** $\mathbf{0}$ (alle Eintraege 0)
- **Diagonalmatrix:** $a_{ij} = 0$ fuer $i \neq j$



Spezielle Matrixtypen

Symmetrische Matrix:

$$\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Obere Dreiecksmatrix:

$$a_{ij} = 0 \text{ fuer } i > j$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Orthogonale Matrix:

$$\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\top$$

Schiefsymmetrische Matrix:

$$\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}, \quad a_{ii} = 0$$

Untere Dreiecksmatrix:

$$a_{ij} = 0 \text{ fuer } i < j$$

Duennbesetzte Matrix (Sparse):
Die meisten Eintraege sind 0. Wichtig in Anwendungen (Netzwerke, FEM).

Stochastische Matrix:
Alle Eintraege ≥ 0, Spaltensummen $= 1$.

Symmetrische Matrizen haben stets reelle Eigenwerte – ein fundamentales Resultat.

Transponierte

Die **Transponierte $\mathbf{A}^\top$** entsteht durch Vertauschen von Zeilen und Spalten: $(\mathbf{A}^\top)_{ij} = a_{ji}$.

Rechenregeln:

- $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$
- $(\alpha\mathbf{A})^\top = \alpha\mathbf{A}^\top$
- $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$ **(Reihenfolge umkehren!)**

Matrixaddition und Skalarmultiplikation (komponentenweise, wie bei Vektoren):

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad \alpha\mathbf{A} = (\alpha \cdot a_{ij})$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Merke: Transponieren eines Produkts kehrt die Reihenfolge um – wie beim Invertieren.

Matrixmultiplikation – Definition

Definition

Fuer $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ist das Produkt $\mathbf{C} = \mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

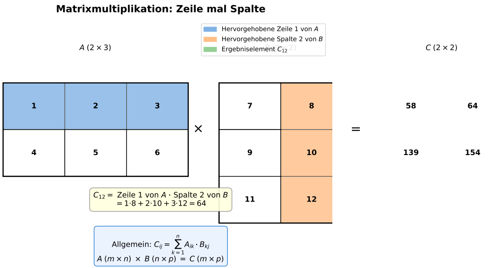
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj} = \text{“Zeile } i \text{ von } \mathbf{A}\text{”} \cdot \text{“Spalte } j \text{ von } \mathbf{B}\text{”}$$

Voraussetzung: Spaltenanzahl von $\mathbf{A}$ = Zeilenanzahl von $\mathbf{B}$.

Beispiel (2×2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

z.B. $c_{11} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 19.$



Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ: Im Allgemeinen gilt $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Matrixmultiplikation – Rechenregeln

Eigenschaften:

- **Assoziativ:** $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- **Distributiv:** $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- **Nicht kommutativ:** $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ im Allgemeinen
- **Neutrales Element:** $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$
- **Nullteiler moeglich:** $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ mit $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$

Gegenbeispiel zur Kommutativitaet:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Komplexitaet: Naive Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen: $\mathcal{O}(n^3)$.
Strassen-Algorithmus: $\mathcal{O}(n^{2{,}807})$. Aktueller Rekord: $\mathcal{O}(n^{2{,}373})$.

Die $\mathcal{O}(n^3)$-Komplexitaet macht Matrixmultiplikation zum Flaschenhals vieler numerischer Verfahren.

Matrix-Vektor-Produkt und lineare Gleichungssysteme

Matrix-Vektor-Produkt:

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **Ax** ist **Linearkombination der Spalten** von **A**.

Lineares Gleichungssystem:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Loesungsverhalten:

- **Eindeutig:** $\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$
- **Unendlich viele:** $\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$
- **Keine:** $\text{rk}(\mathbf{A}) < \text{rk}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$

Jedes lineare Gleichungssystem laesst sich kompakt als $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ schreiben.

Rang einer Matrix

Definition

Der **Rang** $\mathrm{rk}(\mathbf{A})$ ist die maximale Anzahl linear unabhaengiger Zeilen (= Spalten) von $\mathbf{A}$.

Aequivalente Charakterisierungen:

- Dimension des Spaltenraums (= Bildraum)
- Dimension des Zeilenraums
- Anzahl der Pivotelemente in Zeilenstufenform
- Groesse der groessten nicht-verschwindenden Unterdeterminante

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ZSF}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathrm{rk}(\mathbf{A}) = 2$$

Rechenregeln:

- $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$ fuer $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $\mathrm{rk}(\mathbf{AB}) \leq \min(\mathrm{rk}(\mathbf{A}), \mathrm{rk}(\mathbf{B}))$
- $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = \mathrm{rk}(\mathbf{A}^\top)$

Voller Rang ($\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = \min(m, n)$) bedeutet: Keine Zeile/Spalte ist "ueberfluessig".

Definition

Die **Determinante** ordnet jeder quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle Zahl $\det(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}$ zu.

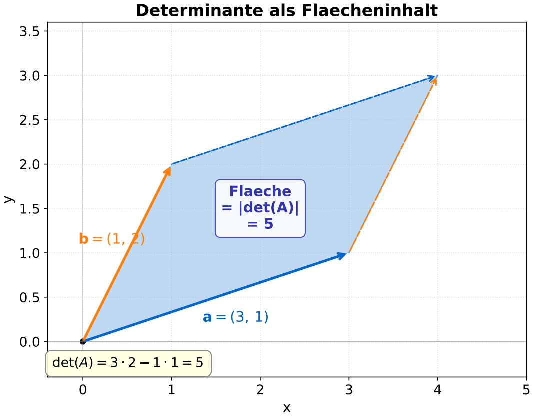
2×2-**Fall:**

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$$

3×3 **(Sarrus):**

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$



Allgemein (Laplace-Entwicklung):

n

Determinante – Eigenschaften

Fundamentale Eigenschaften:

1. $\det(\mathbf{I}) = 1$
2. Zeilenvertauschung aendert Vorzeichen: $\det(\ldots) \to -\det(\ldots)$
3. $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$ fuer $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
4. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \quad$ (Produktsatz)
5. $\det\left(\mathbf{A}^\top\right) = \det(\mathbf{A})$
6. $\mathbf{A}$ invertierbar $\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0$
7. $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \quad$ (falls $\mathbf{A}$ invertierbar)

Geometrische Interpretation:

- $|\det(\mathbf{A})|$ = Faktor der Volumenaenderung unter der Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$
- $\det(\mathbf{A}) > 0$: Orientierung bleibt erhalten
- $\det(\mathbf{A}) < 0$: Orientierung wird umgekehrt
- $\det(\mathbf{A}) = 0$: Dimension wird reduziert (Abbildung ist nicht injektiv)

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$: $\det(\mathbf{A}) = 6$ – Flaeche wird um Faktor 6 skaliert.

Der Produktsatz $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$ **ist eines der elegantesten Resultate der linearen Algebra.**

Determinante – Berechnung 3×3 Beispiel

Berechne:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Methode 1: Sarrus-Regel

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \cdot 2 \\ &\quad - 3 \cdot (-1) \cdot 5 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \\ &= -2 + 20 + 0 + 15 - 0 - 16 = 17 \end{aligned}$$

Methode 2: Laplace-Entwicklung nach 1. Spalte

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 2(-1 - 8) - 0 + 5(4 + 3) = 2 \cdot (-9) + 5 \cdot 7 = -18 + 35 = 17 \checkmark \end{aligned}$$

Tipp: Entwickle nach der Zeile/Spalte mit den meisten Nullen – das spart Rechenaufwand.

Inverse Matrix – Definition

Definition

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst **invertierbar** (regulaer), falls eine Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ existiert mit

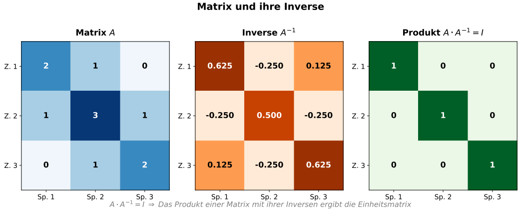
$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

Aequivalente Bedingungen:

- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- $\text{rk}(\mathbf{A}) = n$ (voller Rang)
- $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hat nur $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ als Loesung
- Spalten (Zeilen) sind linear unabhaengig
- 0 ist kein Eigenwert von $\mathbf{A}$

Rechenregeln:

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}}$



Die Inverse "macht die Transformation rueckgaengig": $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Inverse berechnen – 2×2

Formel fuer 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

falls $\det(\mathbf{A}) = ad - bc \neq 0$.

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}) = 6 - 5 = 1, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \checkmark$$

Anwendung – Loesung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -23 \end{pmatrix}$$

Fuer grosse Systeme ist die direkte Inversion ineffizient – Gauss-Elimination ist besser.

Inverse berechnen – Gauss-Jordan-Verfahren

Methode: Erweitere $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I})$ und bringe $\mathbf{A}$ durch Zeilenumformungen auf $\mathbf{I}$:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} (\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1})$$

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 - \frac{5}{2} Z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2 \cdot Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} Z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Das Gauss-Jordan-Verfahren berechnet gleichzeitig $\mathbf{A}^{-1}$ und prueft die Invertierbarkeit.

Ziel

Bringe die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ durch **elementare Zeilenumformungen** auf **Zeilenstufenform** (ZSF).

Erlaubte Zeilenumformungen:

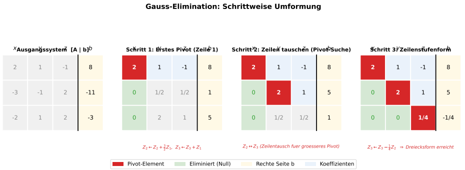
1. Vertausche Zeile i und Zeile j: $Z_i \leftrightarrow Z_j$
2. Multipliziere Zeile i mit $\alpha \neq 0$: $Z_i \to \alpha Z_i$
3. Addiere das α-fache von Zeile j zu Zeile i: $Z_i \to Z_i + \alpha Z_j$

Zeilenstufenform (ZSF):

- Nullzeilen stehen unten
- Das erste Nicht-Null-Element jeder Zeile (Pivot) steht rechts vom Pivot der Zeile darueber

Reduzierte ZSF (RZSF):

- Jedes Pivot ist 1
- Ueber jedem Pivot stehen nur Nullen



Gauss-Elimination hat Komplexitaet $\mathcal{O}(n^3)$ und ist der Standard-Algorithmus fuer LGS.

Gauss-Elimination – Beispiel

Loese:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 5y + z = 8 \\ 3x + 7y - 2z = 7 \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & -2 & 7 \end{array}\right)$$

Schritt 1: $Z_2 \to Z_2 - 2Z_1, \quad Z_3 \to Z_3 - 3Z_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Schritt 2: $Z_3 \to Z_3 - Z_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Rueckwaerts einsetzen: $z = 2, \quad y = 2 - 3 \cdot 2 = -4, \quad x = 3 - 2(-4) + 2 = 13.$

Probe: $13 + 2(-4) - 2 = 3 \checkmark, \quad 26 + 5(-4) + 2 = 8 \checkmark, \quad 39 + 7(-4) - 4 = 7 \checkmark.$

Systematisches Rueckwaertseinsetzen liefert die Loesung – Probe stets empfohlen!

Fall: Unendlich viele Loesungen

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + 4y + 3z = 9 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = 2 < 3 = n$, aber $\mathrm{rk}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 \Rightarrow \infty$ viele Loesungen.

Freie Variable: $y = t$ (Parameter). Aus ZSF: $z = 1$, $x = 4 - 2t - 1 = 3 - 2t$.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{partikulaer}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \ker(\mathbf{A})}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Fall: Keine Loesung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow 0 = 2 \text{ Widerspruch!}$$

Die Struktur der Loesungsmenge: Partikulaere Loesung + Kern (affiner Unterraum).

Zusammenfassung

Der Rang $\text{rk}(\mathbf{A})$ kann auf mehrere aequivalente Weisen bestimmt werden.

Methode 1: Zeilenstufenform (effizienteste Methode)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk}(\mathbf{A}) = 2$$

Methode 2: Unterdeterminanten
$\text{rk}(\mathbf{A}) = r \Leftrightarrow$ es gibt eine nicht-verschwindende $r \times r$-Unterdeterminante, aber keine $(r+1) \times (r+1)$-Unterdeterminante $\neq 0$.

Methode 3: Lineare Unabhaengigkeit der Spalten/Zeilen
Maximale Anzahl linear unabhaengiger Spalten- oder Zeilenvektoren.

Merke: Zeilenrang = Spaltenrang = $\text{rk}(\mathbf{A})$ (Rangsatz).

In der Praxis ist die Zeilenstufenform die effizienteste Methode zur Rangbestimmung.

Satz (Kronecker-Capelli)

Das System $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ist loesbar genau dann, wenn

$$\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

Vollstaendige Fallunterscheidung: Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Bedingung	Loesung	Loesungsraum
$\text{rk}(\mathbf{A}) < \text{rk}(\mathbf{A}\|\mathbf{b})$	keine	$\emptyset$
$\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{A}\|\mathbf{b}) = n$	eindeutig	$\{\mathbf{x}_0\}$
$\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{A}\|\mathbf{b}) = r < n$	∞ viele	$\mathbf{x}_0 + \ker(\mathbf{A})$

Loesung bei unendlich vielen:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{partikulaer}} + \sum_{i=1}^{n-r} c_i \mathbf{h}_i, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

wobei $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n-r}$ eine Basis von $\ker(\mathbf{A})$ bilden.

$n - r = n - \text{rk}(\mathbf{A}) =$ Anzahl der **freien Parameter** (Freiheitsgrade).

Der Rang entscheidet alles: Existenz, Eindeutigkeit und Dimension des Loesungsraums.

Rang – Wirtschaftliche Interpretation

Lineares Produktionsmodell:
m Gleichungen (Ressourcen), n Unbekannte (Produkte), System $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Interpretation der Faelle:

- $\text{rk}(\mathbf{A}) = n = m$ (quadratisch, voller Rang): Genau ein Produktionsplan moeglich
- $\text{rk}(\mathbf{A}) < n$: Ueberbestimmte Kapazitaeten – Freiheitsgrade in der Planung
- $\text{rk}(\mathbf{A}) < \text{rk}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$: Inkonsistente Anforderungen – Nachfrage nicht erfuellbar

Beispiel: 3 Maschinen, 4 Produkte:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Zeile 3 = Zeile 1 + Zeile 2, also $\text{rk}(\mathbf{A}) = 2$, $\text{rk}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$ (da $180 = 100 + 80$).
$\Rightarrow \infty$ viele Loesungen mit $4 - 2 = 2$ freien Parametern.

Bedeutung: Das Unternehmen hat Flexibilitaet bei der Wahl des Produktionsmixes.

Der Rang misst die "effektive Dimensionalitaet" eines Systems – redundante Gleichungen zaehlen nicht.

Definition

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) heisst **Eigenwert** von $\mathbf{A}$, falls ein Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ existiert mit

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Der Vektor $\mathbf{v}$ heisst **Eigenvektor** zum Eigenwert λ.

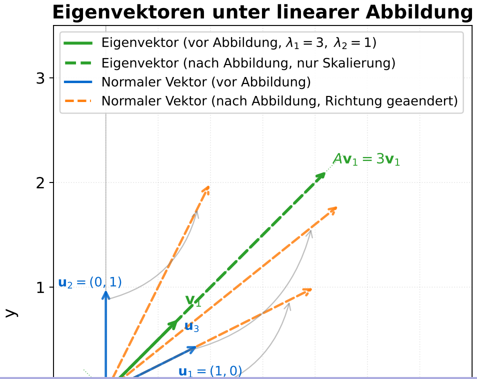
Interpretation:

- $\mathbf{A}$ streckt $\mathbf{v}$ um Faktor λ
- Richtung bleibt erhalten (oder kehrt um bei $\lambda < 0$)
- $\mathbf{v}$ liegt auf einer **invarianten Geraden**

Charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Die Nullstellen von $p(\lambda)$ sind die Eigenwerte.



Eigenwerte – Berechnung 2×2

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Charakteristisches Polynom:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

Schritt 2: Nullstellen: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5$$

Schritt 3: Eigenvektoren bestimmen:

- $\lambda_1 = 2$: $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2 = 5$: $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kontrolle: $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = 4 + 3 = 7 = \lambda_1 + \lambda_2 \checkmark$, $\det(\mathbf{A}) = 10 = \lambda_1 \lambda_2 \checkmark$.

Spur = Summe der Eigenwerte, Determinante = Produkt der Eigenwerte – stets pruefen!

Diagonalisierung

Satz

Falls $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau n linear unabhaengige Eigenvektoren besitzt, dann gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1},$$

wobei $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n)$.

Beispiel (Fortsetzung):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$$

Nutzen der Diagonalisierung:

- **Matrixpotenzen:** $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)\mathbf{P}^{-1}$
- **Exponential:** $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}\operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})\mathbf{P}^{-1}$
- **Stabilitaet:** $\mathbf{A}^k \to \mathbf{0} \Leftrightarrow$ alle $|\lambda_i| < 1$

Nicht diagonalisierbar: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\lambda = 1$ (doppelt), aber nur einen Eigenvektor.

Diagonalisierung reduziert Matrixoperationen auf skalare Operationen – ein maechtiges Werkzeug.

Spur, Spektrum und Spektralsatz

Spur (Trace)

Die **Spur** einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Eigenschaften der Spur:

- $\mathrm{Sp}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathrm{Sp}(\mathbf{A}) + \mathrm{Sp}(\mathbf{B})$
- $\mathrm{Sp}(\alpha \mathbf{A}) = \alpha \, \mathrm{Sp}(\mathbf{A})$
- $\mathrm{Sp}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Sp}(\mathbf{BA})$ (zyklische Vertauschung)
- $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}^\top) = \mathrm{Sp}(\mathbf{A})$

Spektralsatz (fuer symmetrische Matrizen)

Sei $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann:

1. Alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind **reell**.
2. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind **orthogonal**.
3. Es existiert eine orthogonale Matrix $\mathbf{Q}$ mit $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^\top$.

Der Spektralsatz ist fundamental fuer Hauptachsentransformation, PCA und Quantenmechanik.

Eigenwerte – Geometrische Interpretation

Was passiert geometrisch bei $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$?

Eigenwert λ	Wirkung auf Eigenvektor	Beispiel
$\lambda > 1$	Streckung in Eigenrichtung	Wachstumsmodus
$0 < \lambda < 1$	Stauchung in Eigenrichtung	Daempfungsmodus
$\lambda = 1$	Fixrichtung (invariant)	Stationaerer Zustand
$\lambda = 0$	Projektion (Richtung verschwindet)	Singulaerer Modus
$\lambda < 0$	Spiegelung + Skalierung	Oszillation
$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	Drehung + Skalierung	Spiralbewegung

Hauptachsentransformation:
Fuer symmetrisches $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$: Die Eigenvektoren bilden ein orthogonales Koordinatensystem, in dem $\mathbf{A}$ als reine Skalierung wirkt.

Anwendung – Hauptkomponentenanalyse (PCA):
Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ einer Datenwolke: Eigenvektoren = Hauptachsen der Streuung, Eigenwerte = Varianz in jeder Richtung.

Eigenwerte machen komplexe Transformationen verstaendlich – jede Richtung einzeln betrachtet.

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$$

$$= (2-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) = -(2-\lambda)^2(\lambda-4)\cdot(-1) = (2-\lambda)^2(\lambda-4)\cdot(-1)$$

Korrekt: $p(\lambda) = (2-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1] = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4) = -(2-\lambda)^2(\lambda-4)$
$\Rightarrow \lambda_1 = 2$ (algebraische Vielfachheit 2), $\lambda_2 = 4$ (Vielfachheit 1).

Eigenvektoren:

- $\lambda = 2$: $\ker(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ (geometrische Vielfachheit $= 2$)
- $\lambda = 4$: $\ker(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Da algebraische $=$ geometrische Vielfachheit fuer alle λ: $\mathbf{A}$ ist diagonalisierbar.

Bei symmetrischen Matrizen stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit stets ueberein.

Lineare Abbildungen als Matrizen

Definition

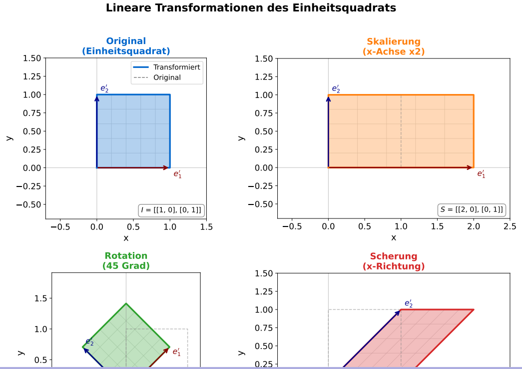
Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heisst **linear**, falls fuer alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \qquad T(\alpha \mathbf{v}) = \alpha\, T(\mathbf{v}).$$

Fundamentalsatz: Jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wird durch genau eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dargestellt: $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Wichtige Transformationen in $\mathbb{R}^2$:

- Drehung um θ: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- Spiegelung an x-Achse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Skalierung: $\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$
- Scherung: $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



Darstellungsmatrix bestimmen

Methode

Die **Darstellungsmatrix** einer linearen Abbildung $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bzgl. der Standardbasen ist

$$\mathbf{A} = \big(T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n)\big) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Die j-te Spalte von $\mathbf{A}$ ist das Bild des j-ten Standardbasisvektors.

Beispiel: Drehung um 60 in $\mathbb{R}^2$:

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos 60 \\ \sin 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin 60 \\ \cos 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften von Drehmatrizen:

- Orthogonal: $\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \mathbf{I}$ ($\Rightarrow$ Laengen und Winkel bleiben erhalten)
- $\det(\mathbf{A}) = 1$ (orientierungserhaltend)
- Eigenwerte: $\lambda = e^{\pm i\theta}$ (komplex fuer $\theta \neq 0, \pi$)

Basiswechsel: Bei anderer Basis $\mathcal{B}$: $\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ mit Basiswechselmatrix $\mathbf{S}$.

Dieselbe Abbildung hat verschiedene Matrixdarstellungen – abhaengig von der gewaehlten Basis.

Kern und Bild einer linearen Abbildung

Definitionen

Fuer $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

- **Kern:** $\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ (Nullraum)
- **Bild:** $\mathrm{im}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ (Spaltenraum)

Dimensionsformel (Rang-Nullitaets-Satz):

$$\dim(\ker(\mathbf{A})) + \dim(\mathrm{im}(\mathbf{A})) = n \quad \iff \quad \text{Nullitaet} + \mathrm{rk}(\mathbf{A}) = n$$

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} : \quad \mathrm{rk}(\mathbf{A}) = 1, \quad \dim(\ker(\mathbf{A})) = 3 - 1 = 2$$

Interpretation:

- $\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow T$ ist injektiv
- $\mathrm{im}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow T$ ist surjektiv
- Beides $\Leftrightarrow T$ ist bijektiv ($\mathbf{A}$ invertierbar, nur fuer $m = n$)

Die Dimensionsformel ist eines der zentralen Resultate der linearen Algebra.

Modell (Wassily Leontief, 1936)

Die Wirtschaft besteht aus n Sektoren. Sektor j benoetigt zur Produktion von einer Einheit Output den Anteil a_{ij} vom Output des Sektors i. Die **Technologiematrix** ist $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

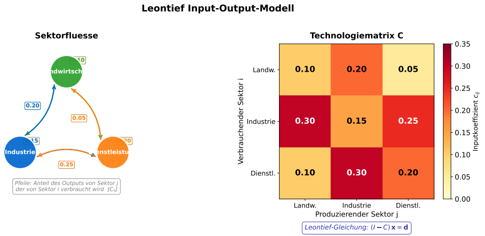
Gleichgewichtsbedingung:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{d} \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d}$$

wobei $\mathbf{x}$ = Gesamtproduktion, $\mathbf{d}$ = Endnachfrage.

$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ heisst **Leontief-Inverse**.



Bedingung: $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ muss invertierbar sein. Hinreichend: Alle Spaltensummen von $\mathbf{A}$ sind < 1 (produktive Wirtschaft).

Leontief erhielt 1973 den Nobelpreis fuer Wirtschaftswissenschaften fuer dieses Modell.

Leontief-Modell – Zahlenbeispiel

Drei-Sektoren-Wirtschaft: Landwirtschaft (L), Industrie (I), Dienstleistungen (D).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Berechnung:

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d} \approx \begin{pmatrix} 96{,}7 \\ 155{,}1 \\ 121{,}3 \end{pmatrix}$$

Interpretation: Um die Endnachfrage **d** zu befriedigen, muss Sektor L ca. 96,7, Sektor I ca. 155,1 und Sektor D ca. 121,3 Einheiten produzieren.

Spaltensummen von A: 0,6; 0,6; 0,4 – alle $< 1 \Rightarrow$ produktive Wirtschaft. ✓

Die Leontief-Inverse zeigt direkte und indirekte Verflechtungen zwischen den Sektoren.

Markov-Ketten – Grundlagen

Definition

Eine **Markov-Kette** ist ein stochastischer Prozess, bei dem der naechste Zustand nur vom aktuellen Zustand abhaengt (Gedaechtnislosigkeit). Die Uebergangswahrscheinlichkeiten bilden eine **stochastische Matrix P**.

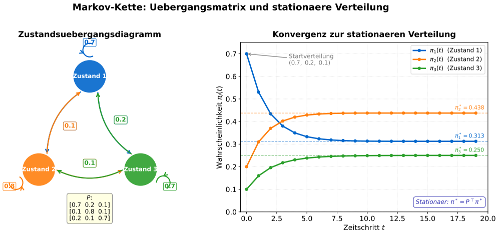
Uebergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = (p_{ij}), \quad p_{ij} \geq 0, \quad \sum_j p_{ij} = 1$$

p_{ij} = Wahrscheinlichkeit, von Zustand i nach j zu wechseln.

Zustandsvektor:

$$\pi^{(t+1)} = \pi^{(t)}\mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \pi^{(t)} = \pi^{(0)}\mathbf{P}^t$$



Stationaere Verteilung: $\pi = \pi\mathbf{P}$ mit $\sum_i \pi_i = 1$.
$\Rightarrow \pi$ ist Linkseigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Markov-Ketten modellieren Wetter, Finanzmaerkte, PageRank, Genetik und viele weitere Prozesse.

Markov-Ketten – Beispiel

Wettermodell: Zwei Zustaende: Sonnig (S) und Regnerisch (R).

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \quad \text{(Zeilen: von; Spalten: nach)}$$

Interpretation: Wenn heute sonnig, dann morgen zu 80% sonnig, zu 20% regnerisch.

Stationaere Verteilung: $\pi\mathbf{P} = \pi$, $\pi_S + \pi_R = 1$.

$$0{,}8\pi_S + 0{,}4\pi_R = \pi_S \quad \Rightarrow \quad 0{,}4\pi_R = 0{,}2\pi_S \quad \Rightarrow \quad \pi_S = 2\pi_R$$

$$\pi_S + \pi_R = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_S = \tfrac{2}{3}, \quad \pi_R = \tfrac{1}{3}$$

Langzeitverhalten: Unabhaengig vom Startzustand konvergiert die Verteilung gegen $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Numerisch: $\pi^{(0)} = (1, 0)$: Nach 5 Schritten: $(0{,}6671;\ 0{,}3329) \approx (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Ergodische Markov-Ketten konvergieren stets gegen eine eindeutige stationaere Verteilung.

Anwendung: Portfolio-Theorie (Markowitz)

Modell

Ein Portfolio mit n Anlagen hat den Renditevektor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ und die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (symmetrisch, positiv semidefinit).

Gewichtungsvektor: $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{w}^\top \mathbf{1} = 1$.

Portfolio-Rendite: $\mu_P = \mathbf{w}^\top \mathbf{r}$ (Skalarprodukt!)
Portfolio-Risiko: $\sigma_P^2 = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$ (quadratische Form!)

Minimum-Varianz-Portfolio:

$$\min_{\mathbf{w}} \ \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad \text{u.d.N.} \quad \mathbf{w}^\top \mathbf{1} = 1$$

Loesung (Lagrange):

$$\mathbf{w}^* = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}$$

Beispiel: 2 Anlagen mit $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}09 \end{pmatrix}$: $\mathbf{w}^* \approx (0{,}73;\ 0{,}27)^\top$.

Markowitz' Portfoliotheorie (1952) zeigt: Diversifikation reduziert Risiko – quantifiziert durch $\boldsymbol{\Sigma}$.

Input-Output-Analyse – Erweiterte Betrachtung

Multiplikatoreffekte:
Die Leontief-Inverse $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ laesst sich als geometrische Reihe entwickeln:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$$

falls alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ betragskleiner als 1 sind.

Interpretation der Terme:

- $\mathbf{Id}$: Direkte Nachfrage
- $\mathbf{Ad}$: Vorleistungsbedarf 1. Stufe
- $\mathbf{A}^2\mathbf{d}$: Vorleistungsbedarf 2. Stufe (indirekte Effekte)
- $\mathbf{A}^k\mathbf{d}$: Multiplikatoreffekte k-ter Ordnung

Output-Multiplikator fuer Sektor j:

$$m_j = \sum_{i=1}^{n} [(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]_{ij} = \text{Spaltensumme der Leontief-Inversen}$$

$m_j > 1$ bedeutet: Eine zusaetzliche Einheit Endnachfrage in Sektor j erzeugt mehr als eine Einheit Gesamtproduktion.

Die Multiplikatoranalyse zeigt, wie sich ein Nachfrageschock durch die gesamte Volkswirtschaft fortpflanzt.

Produktionsplanung mit linearer Algebra

Stuecklisten-Problem: Ein Unternehmen stellt m Endprodukte aus n Rohstoffen her.

Bedarfsmatrix: $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, wobei b_{ij} = Menge von Rohstoff i fuer eine Einheit von Produkt j.
Produktionsvektor: $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ (geplante Stueckzahlen).
Gesamtbedarf: $\mathbf{r} = \mathbf{Bp}$ (Rohstoffbedarf).

Beispiel: Moebelfabrik produziert Stuehle und Tische:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{Holz (Einheiten)} \\ \leftarrow \text{Schrauben (Packungen)}, \\ \leftarrow \text{Arbeitszeit (Stunden)} \end{array} \end{array} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{Bp} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 50 + 8 \cdot 30 \\ 2 \cdot 50 + 1 \cdot 30 \\ 6 \cdot 50 + 4 \cdot 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 130 \\ 420 \end{pmatrix}$$

Kostenvektor: Bei Rohstoffpreisen $\mathbf{c}$: Gesamtkosten $= \mathbf{c}^\top \mathbf{Bp}$.

Lineare Algebra ermoeglicht effiziente Planung in Produktion, Logistik und Supply-Chain-Management.

Kleinste-Quadrate-Methode

Gegeben: m Datenpunkte (x_i, y_i). Gesucht: Gerade $y = \beta_0 + \beta_1 x$, die den quadratischen Fehler minimiert.

Matrixformulierung: $\mathbf{X}\beta \approx \mathbf{y}$ mit

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Ueberbestimmtes System ($m > 2$): i. d. R. keine exakte Loesung.

Normalengleichung:

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X}\beta = \mathbf{X}^\top \mathbf{y} \quad \Longrightarrow \quad \hat{\beta} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\top \mathbf{y}$$

Geometrie: $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\beta}$ ist die **orthogonale Projektion** von $\mathbf{y}$ auf den Spaltenraum von $\mathbf{X}$.

Die gesamte Regressionsanalyse – von einfach bis multipel – ist lineare Algebra.

Adjazenzmatrix: Ein Graph mit n Knoten wird durch $\mathbf{A} \in \{0,1\}^{n \times n}$ dargestellt:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls Kante von } i \text{ nach } j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel (Handelsbeziehungen):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{4 Laender, 5 Handelsrouten}$$

Matrixpotenzen und Wege:

- $(\mathbf{A}^k)_{ij}$ = Anzahl der Wege der Laenge k von Knoten i nach j
- $(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^k)_{ij}$ = Erreichbarkeit in $\leq k$ Schritten

Zentralitaetsmasse:

- **Grad-Zentralitaet:** Zeilensumme von $\mathbf{A}$ (Anzahl Verbindungen)
- **Eigenvektorzentralitaet:** Eigenvektor zum groessten Eigenwert (Google PageRank!)

PageRank berechnet den dominanten Eigenvektor einer modifizierten Adjazenzmatrix des Internets.

NumPy – Vektoren und Matrizen

NumPy Grundlagen

NumPy ist die Standard-Bibliothek fuer numerische lineare Algebra in Python.

```
import numpy as np

# Vektoren
v = np.array([1, 2, 3])
w = np.array([4, -1, 2])

# Operationen
print("Summe:", v + w)                  # [5, 1, 5]
print("Skalarprodukt:", np.dot(v, w))  # 8
print("Norm:", np.linalg.norm(v))      # 3.742
print("Kreuzprodukt:", np.cross(v, w)) # [7, 10, -9]

# Matrizen
A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
B = np.array([[5, 6], [7, 8]])

print("Produkt:\n", A @ B)        # Matrixmultiplikation
print("Determinante:", np.linalg.det(A))  # -2.0
print("Inverse:\n", np.linalg.inv(A))
```

NumPy – Eigenwerte und LGS

```
import numpy as np

# Eigenwerte und Eigenvektoren
A = np.array([[4, 1], [2, 3]])
eigvals, eigvecs = np.linalg.eig(A)
print("Eigenwerte:", eigvals)    # [5. 2.]
print("Eigenvektoren:\n", eigvecs)

# Lineares Gleichungssystem Ax = b
A = np.array([[1, 2, -1], [2, 5, 1], [3, 7, -2]])
b = np.array([3, 8, 7])
x = np.linalg.solve(A, b)
print("Loesung:", x)             # [13. -4.  2.]

# Probe
print("Probe:", np.allclose(A @ x, b))  # True

# Symmetrische Matrix: reelle Eigenwerte garantiert
S = np.array([[2, 1], [1, 3]])
eigvals_s, _ = np.linalg.eigh(S)  # eigh fuer symmetrisch
print("Eigenwerte (sym.):", eigvals_s)
```

Hinweis: `np.linalg.solve()` ist numerisch stabiler und schneller als `np.linalg.inv(A) @ b`.

Markov-Ketten Simulation in Python

```
import numpy as np

# Uebergangsmatrix (Zeilen = von, Spalten = nach)
P = np.array([[0.8, 0.2],
              [0.4, 0.6]])

# Simulation: Zustandsvektor ueber 20 Schritte
pi = np.array([1.0, 0.0])  # Start: sicher sonnig
for t in range(20):
    pi = pi @ P
    if t < 5 or t == 19:
        print(f"t={t+1:2d}: pi = [{pi[0]:.4f}, {pi[1]:.4f}]")

# Stationaere Verteilung (Eigenvektor zu lambda=1)
eigvals, eigvecs = np.linalg.eig(P.T)
idx = np.argmin(np.abs(eigvals - 1.0))
pi_stat = np.real(eigvecs[:, idx])
pi_stat = pi_stat / pi_stat.sum()
print("Stationaer:", pi_stat)    # [0.6667, 0.3333]
```

Ausgabe (Auszug):

```
t= 1:  pi = [0.8000, 0.2000]
t= 5:  pi = [0.6671, 0.3329]
t=20:  pi = [0.6667, 0.3333]
```

Visualisierung linearer Transformationen

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Einheitskreis als Ausgangspunkte
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
circle = np.array([np.cos(theta), np.sin(theta)])

# Transformationsmatrix (Scherung + Streckung)
A = np.array([[2, 1], [0.5, 1.5]])
ellipse = A @ circle

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(10, 4))
ax1.plot(circle[0], circle[1], 'b-')
ax1.set_title('Original (Einheitskreis)')
ax1.set_aspect('equal'); ax1.grid(True)

ax2.plot(ellipse[0], ellipse[1], 'r-')
ax2.set_title(f'Transformiert (det={np.linalg.det(A):.1f})')
ax2.set_aspect('equal'); ax2.grid(True)
plt.tight_layout(); plt.show()
```

Beobachtung: Die Einheitskreis-zu-Ellipse-Transformation zeigt:

- Halbachsen der Ellipse = Singulaerwerte von **A**
- Flaechenverhaeltnis = $|\det(\mathbf{A})|$

Lineare Regression in Python

```python
import numpy as np

# Beispieldaten: Werbeausgaben vs. Umsatz
x = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8])
y = np.array([2.1, 3.8, 6.2, 7.9, 10.5, 12.1, 14.3, 15.8])

# Designmatrix X = [1, x]
X = np.column_stack([np.ones_like(x), x])

# Normalengleichung: beta = (X^T X)^{-1} X^T y
beta = np.linalg.solve(X.T @ X, X.T @ y)
print(f"y = {beta[0]:.2f} + {beta[1]:.2f} * x")
# y = 0.14 + 2.00 * x

# Bestimmtheitsmass R^2
y_hat = X @ beta
SS_res = np.sum((y - y_hat)**2)
SS_tot = np.sum((y - np.mean(y))**2)
R2 = 1 - SS_res / SS_tot
print(f"R^2 = {R2:.4f}")  # R^2 = 0.9975

# Alternativ: np.polyfit
beta_alt = np.polyfit(x, y, 1)  # [Steigung, Achsenabschnitt]
```

Beweis: Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Satz (Cauchy-Schwarz)

Fuer alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ linear abhaengig sind.

Beweis: Falls $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, gilt die Ungleichung trivial. Sei also $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
Betrachte fuer $t \in \mathbb{R}$ die Funktion $f(t) = \|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle \mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u} + t\mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2 \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t mit nicht-negativen Werten. Die Diskriminante muss ≤ 0 sein:

$$\Delta = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 - 4\,\|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2 \leq 0$$

$$\implies \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2 \quad \implies \quad |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \qquad \square$$

Cauchy-Schwarz ist die Grundlage der Winkelformel und der Dreiecksungleichung.

Beweis: Cramer'sche Regel

Satz (Gabriel Cramer, 1750)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ und $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Dann gilt:

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}_j)}{\det(\mathbf{A})}, \quad j = 1, \dots, n,$$

wobei $\mathbf{A}_j$ aus $\mathbf{A}$ durch Ersetzen der j-ten Spalte durch $\mathbf{b}$ entsteht.

Beispiel (2×2):

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = -5, \quad x = \frac{\det\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{-5} = \frac{-9}{-5} = 1{,}8, \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-5} = \frac{-4}{-5} = 0{,}8$$

Probe: $3(1{,}8) + 2(0{,}8) = 7$ ✓, $\quad 1{,}8 - 0{,}8 = 1$ ✓.

Komplexitaet: $\mathcal{O}((n+1)!\,)$ – daher nur fuer kleine n praktikabel. Fuer grosse Systeme: Gauss-Elimination.

Cramer's Regel ist theoretisch elegant, aber fuer $n > 3$ numerisch dem Gauss-Verfahren unterlegen.

Determinante und Volumen

Satz

Sei $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist $|\det(\mathbf{A})|$ das n-dimensionale Volumen des von den Spaltenvektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ aufgespannten **Parallelotops**.

Herleitung fuer $n = 2$:
Parallelogramm aufgespannt von $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^\mathsf{T}$:

$$\text{Flaeche} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot |\sin\theta|$$

Mit $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ und $\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}$:

$$\begin{aligned} \text{Flaeche}^2 &= \|\mathbf{a}\|^2\,\|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = \det(\mathbf{A})^2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Flaeche} = |\det(\mathbf{A})| \qquad \square$$

Fuer $n = 3$: $|\det(\mathbf{A})| = |\langle \mathbf{a}, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \rangle| =$ Volumen des Spats.

Diese geometrische Sicht erklaert, warum $\det(\mathbf{A}) = 0$ bedeutet: Die Vektoren sind "flach" – sie spannen kein Volumen auf.

Konditionierung von Matrizen

Definition (Konditionszahl)

Die **Konditionszahl** einer invertierbaren Matrix $\mathbf{A}$ ist

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|$$

Sie misst, wie empfindlich die Loesung $\mathbf{x}$ von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ auf Stoerungen in $\mathbf{b}$ oder $\mathbf{A}$ reagiert.

Fehlerabschaetzung:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Beispiel – Gut konditioniert:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \quad \kappa(\mathbf{A}) = 1 \quad \text{(optimal)}$$

Beispiel – Schlecht konditioniert (Hilbert-Matrix):

$$\mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}: \quad \kappa(\mathbf{H}_3) \approx 524$$

Kleine Aenderungen in $\mathbf{b}$ koennen die Loesung um den Faktor 524 verfaelschen!

Faustregel: Bei $\kappa \approx 10^k$ verliert man ca. k Dezimalstellen Genauigkeit.

Numerische Stabilitaet

Gleitkomma-Arithmetik: Computer rechnen mit endlicher Genauigkeit ($\approx$ 16 Dezimalstellen bei `double`).

Problem 1: Pivotierung
Ohne Pivotierung kann Gauss-Elimination instabil sein:

$$\begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Division durch 10^{-20} erzeugt riesige Zwischenwerte $\Rightarrow$ Ausloesung.
Loesung: Partielle Pivotierung – waehle stets das betragsgroesste Pivotelement.

Problem 2: Catastrophic Cancellation
$a - b$ fuer $a \approx b$ verliert relative Genauigkeit:

$$1{,}0000001 - 1{,}0000000 = 0{,}0000001 \quad \text{(nur 1 signifikante Stelle!)}$$

Best Practices:

- Verwende `np.linalg.solve()` statt $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$
- Pivotierung stets aktivieren (LAPACK Standard)
- Konditionszahl pruefen: $\kappa(\mathbf{A}) > 10^{10} \Rightarrow$ Vorsicht
- Iterative Verfeinerung bei schlecht konditionierten Systemen

Numerische Stabilitaet ist kein Luxus – sie entscheidet ueber Zuverlaessigkeit jeder Berechnung.

LU-Zerlegung und Cholesky

LU-Zerlegung

Jede invertierbare Matrix $\mathbf{A}$ laesst sich (ggf. mit Zeilenvertauschung) zerlegen in

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$

mit $\mathbf{L}$ = untere Dreiecksmatrix ($l_{ii} = 1$), $\mathbf{U}$ = obere Dreiecksmatrix, $\mathbf{P}$ = Permutationsmatrix.

Vorteil: Loese $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ in zwei Schritten:

1. $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$ (Vorwaertseinsetzen, $\mathcal{O}(n^2)$)
2. $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ (Rueckwaertseinsetzen, $\mathcal{O}(n^2)$)

Einmalige Zerlegung: $\mathcal{O}(n^3)$. Danach jedes neue $\mathbf{b}$ in $\mathcal{O}(n^2)$ loesbar!

Cholesky-Zerlegung (fuer $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$ positiv definit)

$$\mathbf{A} = \mathbf{LL}^\top$$

Halb so viel Aufwand wie LU. Anwendung: Kovarianzmatrizen, Optimierung.

Praxis: `np.linalg.solve()` verwendet intern LU mit partieller Pivotierung (LAPACK `dgesv`).

LU-Zerlegung ist der industrielle Standard fuer das Loesen linearer Systeme in Software.

Geschichte der Linearen Algebra

Antike und Mittelalter:

- **ca. 200 v. Chr.:** Chinesisches Buch *Jiuzhang Suanshu* – erste systematische Loesung linearer Gleichungssysteme (Gauss-Verfahren!)
- **ca. 300:** Indische Mathematiker loesen LGS mit Eliminationsmethoden

17.–18. Jahrhundert:

- **Leibniz (1693):** Erste Determinanten
- **Cramer (1750):** Cramer'sche Regel
- **Gauss (1809):** Systematische Elimination, Methode der kleinsten Quadrate

19. Jahrhundert – Geburt der LA:

- **Cayley (1858):** Matrizenalgebra
- **Hamilton (1843):** Quaternionen (4D-Algebra)
- **Grassmann (1844):** Ausdehnungslehre (allgemeine Vektorraeume)
- **Sylvester:** Praegte "Matrix" (lat. Gebaehmutter)

20. Jahrhundert:

- **von Neumann:** Hilbertraeume, Quantenmechanik
- **Turing/von Neumann:** Numerische LA auf Computern
- **Strang, Golub:** Moderne numerische Methoden

Die lineare Algebra ist eine der aeltesten und zugleich modernsten Disziplinen der Mathematik.

Cayley, Hamilton, Gauss – Wegbereiter

Carl Friedrich Gauss (1777–1855):

- "Princeps mathematicorum" (Fuerst der Mathematiker)
- Gauss-Elimination in *Disquisitiones Arithmeticae*
- Methode der kleinsten Quadrate (Astronomie)
- Fundamentalsatz der Algebra

Arthur Cayley (1821–1895):

- Begruender der Matrizentheorie
- Cayley-Hamilton-Satz: Jede Matrix erfuellt ihr charakteristisches Polynom
- Verknuepfte Matrizen mit linearen Transformationen

William Rowan Hamilton (1805–1865):

- Entdeckte Quaternionen (1843, Brougham Bridge)
- Hamiltonsche Mechanik (Physik)
- Cayley-Hamilton-Satz (mit Cayley)

Cayley-Hamilton-Satz

Sei $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$. Dann gilt:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$.

$$\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \checkmark$$

Der Cayley-Hamilton-Satz erlaubt die Berechnung von $\mathbf{A}^{-1}$ ohne direkte Inversion.

Uebungsaufgaben – Vektoren und Matrizen

Aufgabe 1 (Vektoren): Gegeben: $\mathbf{a} = (2, -1, 3)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{b} = (1, 4, -2)^{\mathsf{T}}$.

(a) Berechnen Sie $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ und den Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.
(b) Berechnen Sie $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ und verifizieren Sie die Orthogonalitaet.
(c) Bestimmen Sie die Flaeche des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Loesung 1:

(a) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2 - 4 - 6 = -8$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{21}$, $\cos\theta = \frac{-8}{\sqrt{14}\sqrt{21}} \approx -0{,}467$, $\theta \approx 117{,}8$
(b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ((-1)(-2) - 3 \cdot 4,\ 3 \cdot 1 - 2(-2),\ 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1)^{\mathsf{T}} = (-10, 7, 9)^{\mathsf{T}}$
(c) Flaeche $= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{100 + 49 + 81} = \sqrt{230} \approx 15{,}17$

Aufgabe 2 (Matrizen): Berechnen Sie $\mathbf{A}^2$ und $\det(\mathbf{A})$ fuer $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Loesung: $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$, $\det(\mathbf{A}) = 4 - 6 = -2$.

Tipp: Pruefen Sie Ihre Ergebnisse stets mit dem Skalarprodukt-Orthogonalitaetstest.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Loesung:
Charakteristisches Polynom:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (3-\lambda)(2-\lambda) - 0 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$
Eigenvektoren:

- $\lambda_1 = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2 = 3$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Ist **A** diagonalisierbar? Bestimmen Sie **P** und **D**.
Loesung: Ja, da 2 linear unabhaengige Eigenvektoren existieren.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$$

Kontrolle: $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = 5 = 2 + 3\ \checkmark$, $\det(\mathbf{A}) = 6 = 2 \cdot 3\ \checkmark$.

Obere Dreiecksmatrizen haben die Eigenwerte direkt auf der Diagonalen – das vereinfacht vieles.

Uebungsaufgaben – Anwendungen

Aufgabe 5 (Leontief): Zwei-Sektoren-Wirtschaft mit Technologiematrix und Endnachfrage:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Gesamtproduktion $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d}$.

Loesung:

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0{,}72 - 0{,}12 = 0{,}6$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{0{,}6} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}\overline{3} & 0{,}5 \\ 0{,}\overline{6} & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1{,}\overline{3} & 0{,}5 \\ 0{,}\overline{6} & 1{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 208{,}3 \\ 291{,}7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (Markov): Finden Sie die stationaere Verteilung von $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Loesung: $\pi_1 = \frac{5}{8} = 0{,}625$, $\pi_2 = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

Stets Spaltensummen von A pruefen (< 1?) und $\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$ **verifizieren.**

Formelsammlung – Die wichtigsten Resultate

Vektoren:

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum u_i v_i = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\theta$
- $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$
- $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ (Cauchy-Schwarz)
- $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, |\sin\theta|$

Matrizen:

- $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$
- $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = 1/\det(\mathbf{A})$
- $\mathbf{A}^{-1}_{2\times 2} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Eigenwerte:

- $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$
- $\sum \lambda_i = \mathrm{Sp}(\mathbf{A})$, $\prod \lambda_i = \det(\mathbf{A})$
- $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ (Diagonalisierung)
- $\mathbf{A}^k = \mathbf{PD}^k\mathbf{P}^{-1}$

LGS und Rang:

- $\dim(\ker \mathbf{A}) + \mathrm{rk}(\mathbf{A}) = n$
- Loesbar $\Leftrightarrow \mathrm{rk}(\mathbf{A}) = \mathrm{rk}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$
- Cramer: $x_j = \det\left(\mathbf{A}_j\right) / \det(\mathbf{A})$

Anwendungen:

- Leontief: $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d}$
- Markov: $\pi = \pi \mathbf{P}$
- Portfolio: $\sigma_P^2 = \mathbf{w}^\top \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}$
- Regression: $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\top \mathbf{y}$

Diese Formeln bilden das Handwerkszeug fuer alle weiterfuehrenden Kurse.

Kernkonzepte – Zusammenfassung

Vektoren:

- Vektorraeume und Basen
- Skalarprodukt $\rightarrow$ Winkel, Orthogonalitaet
- Norm $\rightarrow$ Laenge, Abstand
- Kreuzprodukt $\rightarrow$ Flaeche, Volumen
- Lineare (Un-)Abhaengigkeit

Matrizen:

- Matrix als lineare Abbildung
- Multiplikation, Transponierte, Inverse
- Determinante $\rightarrow$ Volumen, Invertierbarkeit
- Rang $\rightarrow$ Dimension des Bildes
- Gauss-Elimination $\rightarrow$ LGS loesen

Eigenwerte:

- $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$: invariante Richtungen
- Charakteristisches Polynom
- Diagonalisierung: $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$
- Spektralsatz fuer symmetrische Matrizen

Anwendungen:

- Leontief-Modell (Volkswirtschaft)
- Markov-Ketten (Stochastik)
- Portfolio-Theorie (Finanzmaerkte)
- Produktionsplanung (Operations Research)

Schluesselformel:

$$\dim(\ker \mathbf{A}) + \mathrm{rk}(\mathbf{A}) = n$$

Lineare Algebra ist die “Sprache” der angewandten Mathematik, Physik, Informatik und Wirtschaftswissenschaften.

Ausblick auf weitere Themen

Vertiefungen in der linearen Algebra:

- **Singulaerwertzerlegung (SVD): $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T$** – die "universelle" Matrixzerlegung
- **QR-Zerlegung:** Numerisch stabile Faktorisierung fuer LGS und Eigenwertprobleme
- **LU-Zerlegung:** Effiziente Gauss-Elimination mit Speicherung
- **Positiv definite Matrizen:** Cholesky-Zerlegung, Optimierung
- **Jordansche Normalform:** Verallgemeinerte Diagonalisierung

Anwendungsgebiete:

- **Machine Learning:** PCA (Hauptkomponentenanalyse), Regression, neuronale Netze
- **Bildverarbeitung:** SVD fuer Kompression, Faltungsmatrizen
- **Google PageRank:** Groesste Eigenwertberechnung einer riesigen Markov-Matrix
- **Quantenmechanik:** Hermitesche Operatoren, Zustandsvektoren im Hilbertraum
- **Kryptographie:** Matrizen ueber endlichen Koerpern, Gitterbasierte Verfahren
- **Optimierung:** Lineare Programmierung (Simplex), konvexe Optimierung

Naechstes Kapitel: Folgen, Reihen und Grenzwerte – die Grundlage der Analysis.

Lineare Algebra und Analysis bilden gemeinsam das Fundament der gesamten hoeheren Mathematik.