

# Vektoren und Matrizen

## Erweiterte Vorlesung

BSc Analysis

- 1 Grundlagen
- 2 Vektoren
- 3 Skalarprodukt und Kreuzprodukt
- 4 Matrizen
- 5 Transponierte Matrix
- 6 Determinante
- 7 Inverse Matrix
- 8 Lineare Gleichungssysteme
- 9 Rang einer Matrix
- 10 Eigenwerte und Eigenvektoren
- 11 Lineare Abbildungen
- 12 Wirtschaftliche Anwendungen
- 13 Python
- 14 Zusammenfassung

---

**Diese erweiterte Vorlesung umfasst Eigenwerte, lineare Abbildungen und vertiefte Anwendungen.**

## Definition

Ein **Vektor**  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  ist ein geordnetes  $n$ -Tupel reeller Zahlen:

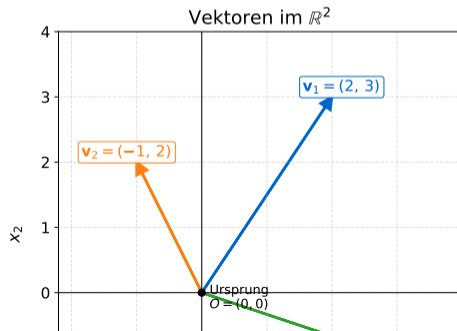
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

## Interpretation:

- **Geometrisch:** Pfeil mit Richtung und Laenge
- **Physikalisch:** Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung
- **Oekonomisch:** Gueterbündel, Preisvektor, Portfoliogewichte

## Betrag (Laenge):

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$



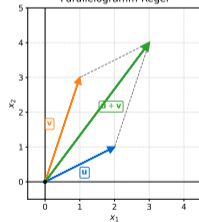
## Addition

Komponentenweise:

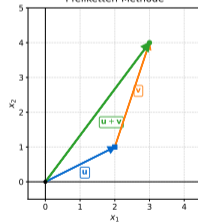
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

### Vektoraddition

Parallelogramm-Regel



Pfeilketten-Methode



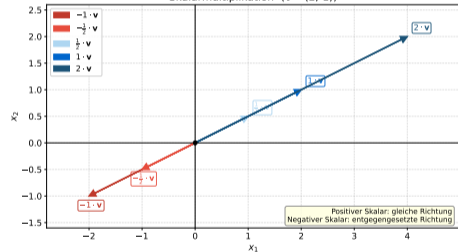
$\mathbf{u} = (2, 1)$     $\mathbf{v} = (1, 3)$     $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 4)$

## Skalarmultiplikation

$\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\lambda \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation ( $\mathbf{v} = (2, 1)$ )



**Rechenregeln:**  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ ,  $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ ,  $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$

**Parallelogramm-Regel:** Die Diagonale des Parallelogramms gibt die Summe.

## Definition

Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$  heissen **linear unabhaengig**, wenn aus

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

stets  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$  folgt.

**Linear unabhaengig:**

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Keiner ist Vielfaches des anderen.

**Faustregel:** In  $\mathbb{R}^n$  sind maximal  $n$  Vektoren linear unabhaengig.

**Linear abhaengig:**

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es gilt  $\mathbf{v}_2 = 2 \mathbf{v}_1$ .

---

Lineare Unabhaengigkeit bedeutet: Kein Vektor ist aus den anderen zusammensetzbar.

## Spezielle Vektoren

**Nullvektor:**  $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

**Einheitsvektoren** in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Normierung:** Der **Einheitsvektor** in Richtung  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ :

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{mit } \|\hat{\mathbf{v}}\| = 1$$

Einheitsvektoren bilden die Standardbasis – jeder Vektor ist daraus kombinierbar.

## Linearkombination

Jeder Vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  lässt sich schreiben als:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$$

**Beispiel:**

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \mathbf{e}_1 - 1 \mathbf{e}_2 + 2 \mathbf{e}_3$$

Operation	Formel	Ergebnis
<b>Addition</b>	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_i + v_i)$	Vektor
<b>Subtraktion</b>	$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_i - v_i)$	Vektor
<b>Skalarmultiplikation</b>	$\lambda \cdot \mathbf{v} = (\lambda v_i)$	Vektor
<b>Betrag</b>	$\ \mathbf{v}\  = \sqrt{\sum v_i^2}$	Skalar $\geq 0$
<b>Normierung</b>	$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} / \ \mathbf{v}\ $	Einheitsvektor
<b>Skalarprodukt</b>	$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum u_i v_i$	Skalar
<b>Kreuzprodukt</b>	$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$	Vektor ( $\mathbb{R}^3$ )

**Wichtige Eigenschaft:**  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$

Diese Tabelle ist die Referenz fuer alle Vektoroperationen – auswendig lernen!

## Definition

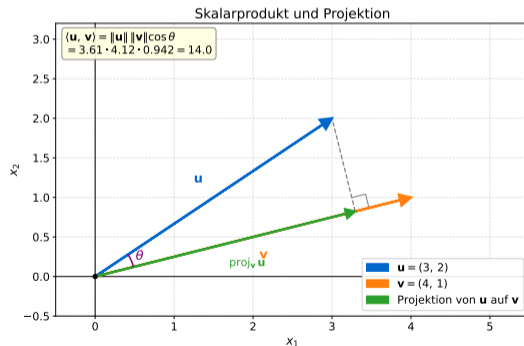
Für  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  ist das **Skalarprodukt**:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

**Geometrische Deutung:**

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

- $\theta = 0^\circ$ : parallele Vektoren  $\Rightarrow$  Maximum
- $\theta = 90^\circ$ :  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$  (senkrecht)
- $\theta = 180^\circ$ : antiparallel  $\Rightarrow$  Minimum



Winkelformel:  $\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$

**Rechenregeln** ( $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ ):

1. **Symmetrie:**  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2. **Linearität:**  $\langle \lambda \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$
3. **Positivität:**  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ , mit Gleichheit genau fuer  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
4. **Norm:**  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$

## Cauchy–Schwarz-Ungleichung

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  linear abhangig sind.

**Beispiel:**  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ :  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4 - 2 + 6 = 8, \quad \cos \theta = \frac{8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} \approx 0,467$

Die Cauchy–Schwarz-Ungleichung garantiert  $|\cos \theta| \leq 1$ .

Definition (nur in  $\mathbb{R}^3$ )

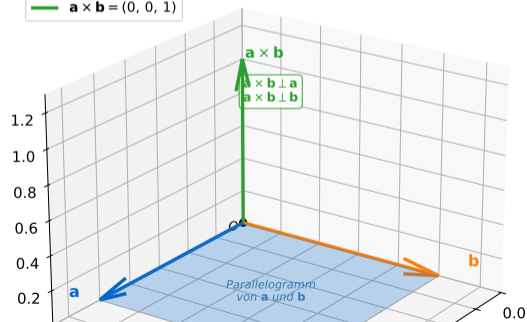
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$  und  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$  (antikommutativ)
- $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$
- $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \text{Flächeninhalt des Parallelogramms}$

Kreuzprodukt  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

- $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$
- $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, 1)$



## Definition

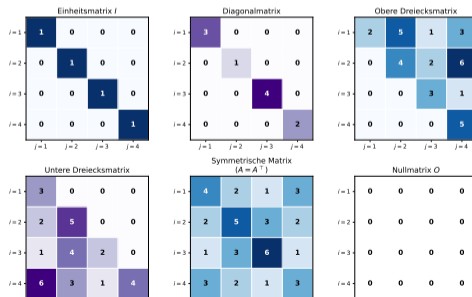
Eine **Matrix**  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist ein rechteckiges Zahlenschema mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

## Wichtige Matrixtypen:

- **Quadratisch:**  $m = n$
- **Einheitsmatrix:**  $\mathbf{I}_n$  mit  $\delta_{ij}$
- **Nullmatrix:**  $\mathbf{0}$  (alle Einträge 0)
- **Diagonalmatrix:**  $a_{ij} = 0$  fuer  $i \neq j$
- **Symmetrisch:**  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
- **Dreiecksmatrix:** obere oder untere

## Wichtige Matrixtypen



**Addition und Skalarmultiplikation** (elementweise, gleiche Dimension noetig):

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (\lambda \mathbf{A})_{ij} = \lambda a_{ij}$$

## Matrixmultiplikation

Fuer  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  und  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  gilt  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad (\text{Zeile } i \text{ von } \mathbf{A} \text{ mal Spalte } j \text{ von } \mathbf{B})$$

**Beispiel:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

**Achtung:**  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$  im Allgemeinen – Reihenfolge beachten!

# Rechenregeln der Matrixmultiplikation

Es gelten:

1.  $\mathbf{A(BC)} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$  (Assoziativitaet)
2.  $\mathbf{A(B + C)} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$  (Distributivitaet)
3.  $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$
4.  $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$
5.  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

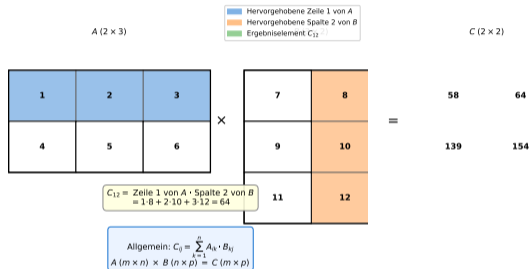
Es gilt nicht:

- $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$  (i. A. nicht kommutativ)
- $\mathbf{AB} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$  oder  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

**Dimension-Kompatibilitaet:**  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n} \Rightarrow \mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Die inneren Dimensionen muessen uebereinstimmen – das aeußere Paar bestimmt die Ergebnisgröße.

Matrixmultiplikation: Zeile mal Spalte



## Spezialfall

Ein Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ist eine Matrix aus  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ . Damit:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{mj} x_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

**Beispiel – Lineares Gleichungssystem als Matrixprodukt:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

**Interpretation:**  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  ist die kompakte Schreibweise eines LGS mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten.

---

Die Matrix-Vektor-Notation ist die Brücke zwischen Matrizenkalkuel und Gleichungssystemen.

## Definition

Fuer eine quadratische Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{k \text{ Faktoren}}$$

## Beispiel – Markov-Ketten:

Ein System wechselt mit Uebergangsmatrix  $\mathbf{P}$  den Zustand. Nach  $k$  Schritten ist die Verteilung:

$$\pi^{(k)} = \mathbf{P}^k \pi^{(0)}$$

**Beispiel:**  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ :  $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

Matrixpotenzen modellieren wiederholte Prozesse – z. B. Markov-Ketten oder Populationsdynamik.

## Definition

Die **Transponierte**  $\mathbf{A}^T$  entsteht durch Vertauschen von Zeilen und Spalten:

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = a_{ji}$$

**Beispiel:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \implies \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

**Rechenregeln:**

1.  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
2.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
3.  $(\lambda \mathbf{A})^T = \lambda \mathbf{A}^T$
4.  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$  (Reihenfolge dreht sich um!)

**Dimension:** Wenn  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , dann  $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

## Definition

**A** heisst **symmetrisch**, wenn  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ , d. h.  $a_{ij} = a_{ji}$  fuer alle  $i, j$ .

**Beispiel:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \quad \checkmark$$

**Wichtige Eigenschaften symmetrischer Matrizen:**

- Alle **Eigenwerte** sind reell
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind **orthogonal**
- Immer **diagonalisierbar**:  $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T$  mit orthogonaler Matrix **Q**
- Wichtig in der Statistik: **Kovarianzmatrizen** sind immer symmetrisch

**Skalarprodukt:**  $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^T \mathbf{y} \rangle \xrightarrow{\mathbf{A}=\mathbf{A}^T} \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ay} \rangle$

Symmetrische Matrizen haben besonders schoene Spektraleigenschaften – Grundlage der PCA.

## Definition ( $2 \times 2$ )

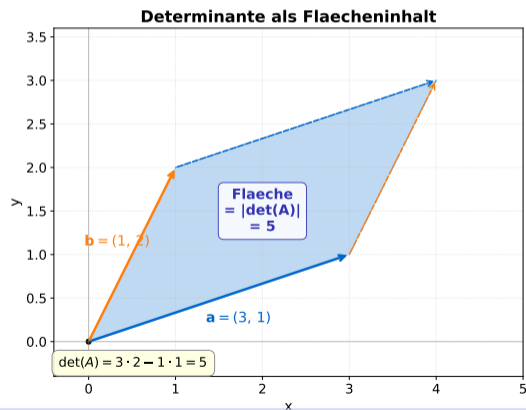
$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

## Fuer $3 \times 3$ (Sarrus):

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

## Geometrische Interpretation:

- $2 \times 2$ : Flaecheninhalte des Parallelogramms
- $3 \times 3$ : Volumen des Parallelepipeds
- Vorzeichen: Orientierung (Haendigkeit)



$\det(\mathbf{A}) = 0$  bedeutet: Die Spaltenvektoren sind linear abhaengig, die Matrix ist singulaer.

## Rechenregeln:

1.  $\det(\mathbf{I}_n) = 1$
2.  $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$
3.  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$
4.  $\det(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^n \cdot \det(\mathbf{A})$  (für  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ )
5.  $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$  (falls  $\mathbf{A}$  invertierbar)
6. Vertauschen zweier Zeilen ändert das Vorzeichen
7. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert  $\det(\mathbf{A})$  nicht

## Kriterium für Invertierbarkeit

$$\mathbf{A} \text{ ist invertierbar} \iff \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

**Beispiel:**  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ :  $\det(\mathbf{A}) = 6 - 6 = 0 \Rightarrow$  nicht invertierbar

---

Die Determinante ist der "Invertierbarkeitstest" einer Matrix.

Berechne  $\det(\mathbf{A})$  mit Sarrus:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Hauptdiagonalen** (von links oben nach rechts unten):

$$2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot (-1) = 0 + 2 + 3 = 5$$

**Nebendiagonalen** (von rechts oben nach links unten):

$$(-1) \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) = 0 + 3 - 4 = -1$$

$$\det(\mathbf{A}) = 5 - (-1) = \boxed{6}$$

$\det(\mathbf{A}) = 6 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}$  ist invertierbar, die Spaltenvektoren sind linear unabhängig.

---

Sarrus funktioniert nur fuer  $3 \times 3$ ! Fuer groessere Matrizen: Laplace-Entwicklung oder Gauss.

## Satz (Laplace-Entwicklung nach der $i$ -ten Zeile)

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

wobei  $M_{ij}$  die **Minor-Determinante** ist (Streichung von Zeile  $i$  und Spalte  $j$ ).

**Beispiel:** Entwicklung nach der 1. Zeile fuer  $3 \times 3$ :

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

**Praxistipp:** Entwickle nach der Zeile/Spalte mit den meisten Nullen!

**Beispiel:**  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2. Zeile}} \det(\mathbf{B}) = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 2(1 - 12) = -22$

Laplace-Entwicklung reduziert die Groesse Schritt fuer Schritt – funktioniert fuer jede  $n \times n$ -Matrix.

## Aequivalente Aussagen fuer $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Folgende Aussagen sind **aequivalent**:

1.  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
2.  $\mathbf{A}$  ist invertierbar
3. Die Spalten von  $\mathbf{A}$  sind linear unabhaengig
4. Die Zeilen von  $\mathbf{A}$  sind linear unabhaengig
5.  $\text{rk}(\mathbf{A}) = n$  (voller Rang)
6. Das LGS  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  hat fuer jedes  $\mathbf{b}$  eine *eindeutige* Loesung
7.  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  hat nur die triviale Loesung  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

**Gegenbeispiel:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} : \quad \det(\mathbf{A}) = 4 - 4 = 0, \quad \text{Spalte 2} = 2 \cdot \text{Spalte 1}$$

Diese sieben Aequivalenzen sind der "Invertierbarkeits-Satz" der linearen Algebra.

## Definition

Die **Inverse**  $\mathbf{A}^{-1}$  einer quadratischen Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  erfüllt:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$$

Sie existiert genau dann, wenn  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ .

**Formel fuer  $2 \times 2$ :**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Beispiel:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6 - 5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

---

Die Inverse "macht die Wirkung" einer Matrix rckgaengig:  $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

**Voraussetzung:**  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  invertierbar.

1.  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2.  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$  (Reihenfolge dreht sich um!)
3.  $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$
4.  $(\lambda \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{A}^{-1}$  ( $\lambda \neq 0$ )
5.  $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$

### Anwendung – LGS loesen

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \implies \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

**Beispiel:**  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \end{pmatrix} \implies \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Fuer grosse Systeme ist Gauss effizienter als die explizite Berechnung von  $\mathbf{A}^{-1}$ .

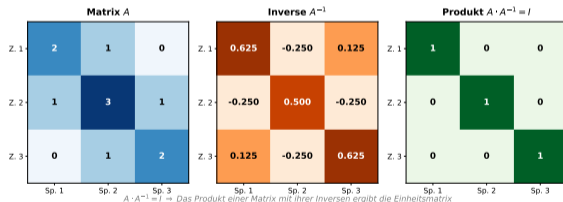
# Inverse berechnen mit dem Gauss-Jordan-Verfahren

**Idee:** Bringe  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I})$  durch Zeilenumformungen auf  $(\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1})$ .

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_2-3Z_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{Z_1-2Z_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrix und ihre Inverse



**Gauss-Jordan funktioniert fuer jede invertierbare  $n \times n$ -Matrix – systematisch und zuverlässig.**

## Allgemeine Form

Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{mit } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

Drei Faelle fuer die Loesungsmenge:

Fall	Bedingung	Beispiel
<b>Eindeutige Loesung</b>	$\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{A} \mathbf{b}) = n$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
<b>Unendlich viele</b>	$\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{A} \mathbf{b}) < n$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
<b>Keine Loesung</b>	$\text{rk}(\mathbf{A}) < \text{rk}(\mathbf{A} \mathbf{b})$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Der Rang entscheidet ueber Existenz und Eindeutigkeit der Loesung.

**Ziel:** Bringe die erweiterte Matrix  $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$  auf Zeilenstufenform.

**Erlaubte Zeilenumformungen:**

1. Vertauschen zweier Zeilen
2. Multiplikation einer Zeile mit  $\lambda \neq 0$
3. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

**Beispiel:**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 - Z_1 \end{array}]{Z_2 - 2Z_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_3 + Z_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\text{rk}(\mathbf{A}) = 2 < 3 = n \Rightarrow$  unendlich viele Lösungen (ein freier Parameter).

---

Gauss-Elimination ist DER Standard-Algorithmus fuer lineare Gleichungssysteme.

Aus der Stufenform:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Wähle  $x_3 = t$  als freien Parameter ( $t \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 = 1 &\implies x_2 = 1 + t \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 &\implies x_1 = 4 - 2(1 + t) - t = 2 - 3t \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Gauss-Elimination: Schrittweise Umformung

Ausgangssystem [A   b] <sup>2</sup>	Schritt 1: Erstes Pivó (Zelle <sup>1</sup> )	Schritt 2: Zeilen <sup>2</sup> tauschen (Pivó <sup>3</sup> Suche)	Schritt 3: Zeilenstufenform <sup>4</sup>																																																												
<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>-1</td><td> </td><td>8</td></tr> <tr><td>-3</td><td>-1</td><td>2</td><td> </td><td>-11</td></tr> <tr><td>-2</td><td>1</td><td>2</td><td> </td><td>-3</td></tr> </table>	2	1	-1		8	-3	-1	2		-11	-2	1	2		-3	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>-1</td><td> </td><td>8</td></tr> <tr><td>0</td><td>1/2</td><td>1/2</td><td> </td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td> </td><td>5</td></tr> </table>	2	1	-1		8	0	1/2	1/2		1	0	2	1		5	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>-1</td><td> </td><td>8</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td> </td><td>5</td></tr> <tr><td>0</td><td>1/2</td><td>1/2</td><td> </td><td>1</td></tr> </table>	2	1	-1		8	0	2	1		5	0	1/2	1/2		1	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>-1</td><td> </td><td>8</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td> </td><td>5</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1/4</td><td> </td><td>-3/4</td></tr> </table>	2	1	-1		8	0	2	1		5	0	0	1/4		-3/4
2	1	-1		8																																																											
-3	-1	2		-11																																																											
-2	1	2		-3																																																											
2	1	-1		8																																																											
0	1/2	1/2		1																																																											
0	2	1		5																																																											
2	1	-1		8																																																											
0	2	1		5																																																											
0	1/2	1/2		1																																																											
2	1	-1		8																																																											
0	2	1		5																																																											
0	0	1/4		-3/4																																																											
	$z_1 - z_2 + \frac{1}{2}z_3, z_1 - z_2 + z_3$	$z_1 = z_2$ (Zeilentausch fuer grosseres Pivó)	$z_1 - z_2 = \frac{1}{4}z_3 \rightarrow$ Dreieckssystem erreicht																																																												
	Pivó-Element	Eliminiert (Null)	Rechte Seite b	Koeffizienten																																																											

Die Loesung ist eine Gerade im  $\mathbb{R}^3$  – parametrisiert durch den freien Parameter  $t$ .

System:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

Gauss-Elimination:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 14 \\ 1 & 2 & 2 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{Z_2-2Z_1 \\ Z_3-Z_1}]{} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_3-Z_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

Rueckwaertseinsetzen:  $x_3 = \frac{5}{2}$ ,  $x_2 = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$ ,  $x_1 = 6 - \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = -1$ 

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

Eindeutige Loesung, da  $\text{rk}(\mathbf{A}) = 3 = n$  – voller Rang.

## Definition

Der **Rang**  $\text{rk}(\mathbf{A})$  einer Matrix  $\mathbf{A}$  ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen (oder äquivalent: Spalten) von  $\mathbf{A}$ .

**Berechnung:** Bringe  $\mathbf{A}$  auf Zeilenstufenform. Die Anzahl der Nicht-Null-Zeilen ist der Rang.

**Beispiel:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 - Z_1}]{Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk}(\mathbf{A}) = 2$$

**Eigenschaften:**

- $0 \leq \text{rk}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$  (für  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ )
- $\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{A}^T)$
- $\text{rk}(\mathbf{AB}) \leq \min(\text{rk}(\mathbf{A}), \text{rk}(\mathbf{B}))$

---

Der Rang misst die "Informationsdimension" einer Matrix.

## Satz (Kronecker–Capelli)

Das LGS  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  ist loesbar genau dann, wenn:

$$\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$$

Dimension des Loesungsraums:

$$\dim(\text{Loesungsraum}) = n - \text{rk}(\mathbf{A})$$

Situation	$\text{rk}(\mathbf{A})$ vs $\text{rk}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$	Freiheitsgrade	Loesung
Eindeutig	$\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = n$	0	Ein Punkt
$\infty$ viele	$\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) < n$	$n - \text{rk}(\mathbf{A}) > 0$	Unterraum
Keine	$\text{rk}(\mathbf{A}) < \text{rk}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$	–	Leere Menge

Der Rang ist der Schluessel zur Loesungstheorie linearer Gleichungssysteme.

## Definition

Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ein Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) heisst **Eigenwert** von  $\mathbf{A}$ , wenn es einen Vektor  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  gibt mit:

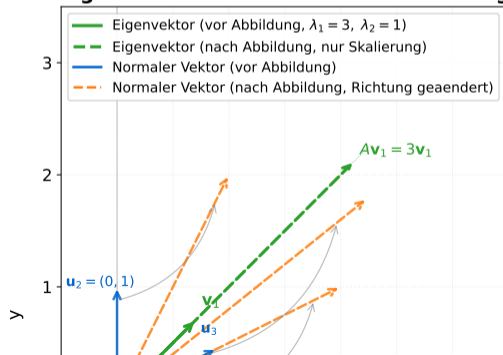
$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

$\mathbf{v}$  heisst **Eigenvektor** zum Eigenwert  $\lambda$ .

## Interpretation:

- $\mathbf{A}$  streckt/staucht  $\mathbf{v}$  um den Faktor  $\lambda$
- Die *Richtung* bleibt erhalten (oder dreht sich um bei  $\lambda < 0$ )
- $|\lambda| > 1$ : Streckung
- $|\lambda| < 1$ : Stauchung
- $\lambda = 0$ :  $\mathbf{v}$  wird auf  $\mathbf{0}$  abgebildet

## Eigenvektoren unter linearer Abbildung



## Herleitung

$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$  hat nicht-triviale Lösung  $\Leftrightarrow$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (\text{charakteristisches Polynom})$$

**Fuer**  $n \times n$ : Das char. Polynom hat Grad  $n$ , also maximal  $n$  Eigenwerte (mit Vielfachheit).

### Nuetzliche Beziehungen:

- **Spur:**  $\text{Sp}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$
- **Determinante:**  $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
- $\det(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow$  mindestens ein Eigenwert ist 0

**Notation:**  $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$  ist ein Polynom  $n$ -ten Grades in  $\lambda$ .

---

Die Spur ist die Summe, die Determinante das Produkt aller Eigenwerte.

## Eigenwerte berechnen – $2 \times 2$ Beispiel

**Gegeben:**  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

**Schritt 1:** Charakteristisches Polynom:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

**Schritt 2:** Nullstellen finden:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$$

**Schritt 3:** Eigenvektoren bestimmen:

- $\lambda_1 = 2$ :  $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ :  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2 = 5$ :  $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ :  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Probe:**  $\text{Sp}(\mathbf{A}) = 7 = 2 + 5 \checkmark$ ,  $\det(\mathbf{A}) = 10 = 2 \cdot 5 \checkmark$

---

Immer Probe machen: Spur = Summe der Eigenwerte, Determinante = Produkt.

## Eigenwerte berechnen – $3 \times 3$ Beispiel

**Gegeben:**  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (obere Dreiecksmatrix)

**Trick:** Bei Dreiecksmatrizen stehen die Eigenwerte auf der Diagonale!

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (2 - \lambda)(3 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

**Eigenvektoren:**

- $\lambda_1 = 1$ :  $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2 = 2$ :  $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\lambda_3 = 3$ :  $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

---

Dreiecksmatrizen sind besonders einfach – Eigenwerte direkt ablesbar.

## Satz

Hat  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  genau  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ , so ist  $\mathbf{A}$  diagonalisierbar:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$$

mit  $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1 \mid \dots \mid \mathbf{v}_n)$  und  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

**Nutzen:** Matrixpotenzen werden trivial:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P} \mathbf{D}^k \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \mathbf{P}^{-1}$$

**Beispiel (aus Folie 34):**

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{10} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

---

Diagonalisierung reduziert Matrixpotenzen auf Potenzen von Skalaren – extrem effizient.

## Definition

Eine Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heisst **linear**, wenn fuer alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

1.  $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$  (Additivitaet)
2.  $f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$  (Homogenitaet)

Aequivalent:  $f(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}) + \mu f(\mathbf{v})$ .

## Zentrale Erkenntnis:

Jede lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  wird durch eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  beschrieben:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

**Umgekehrt:** Jede Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  definiert eine lineare Abbildung.

**Beispiel:**  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

---

Lineare Abbildungen  $\equiv$  Matrizen – dieser Zusammenhang ist das Herzstueck der linearen Algebra.

## Rezept

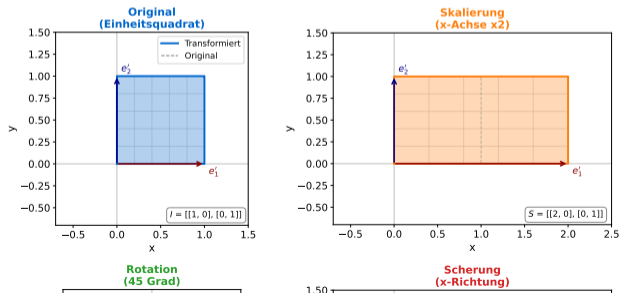
Die Spalten der Abbildungsmatrix sind die Bilder der Standardbasisvektoren:

$$\mathbf{A} = (f(\mathbf{e}_1) \mid f(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid f(\mathbf{e}_n))$$

**Beispiel:** Projektion auf die  $x$ -Achse in  $\mathbb{R}^2$ :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Lineare Transformationen des Einheitsquadrats



## Drehmatrix (Rotation um Winkel $\theta$ )

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

### Eigenschaften:

- $\det(\mathbf{R}(\theta)) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  (flächenerhaltend)
- $\mathbf{R}(\theta)^T = \mathbf{R}(-\theta) = \mathbf{R}(\theta)^{-1}$  (orthogonale Matrix)
- $\mathbf{R}(\alpha) \mathbf{R}(\beta) = \mathbf{R}(\alpha + \beta)$

**Beispiel:** Drehung um 90:

$$\mathbf{R}(90) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

**Eigenwerte:**  $\lambda = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}$  (komplex fuer  $\theta \neq 0, 180$ )

---

Drehmatrizen sind orthogonal mit  $\det = +1$ ; Spiegelungen haben  $\det = -1$ .

Abbildung	Matrix	det	Eigenwerte
Spiegelung an $x$ -Achse	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	-1	1, -1
Spiegelung an $y$ -Achse	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	-1	-1, 1
Spiegelung an $y = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	-1	1, -1
Skalierung $(s_x, s_y)$	$\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$	$s_x s_y$	$s_x, s_y$
Scherung	$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	1, 1

**Merkregel:**  $|\det| = 1 \Rightarrow$  flächenerhaltend,  $\det > 0 \Rightarrow$  orientierungserhaltend,  $\det < 0 \Rightarrow$  orientierungsumkehrend.

Jede geometrische Transformation der Ebene lässt sich als  $2 \times 2$ -Matrix beschreiben.

# Das Leontief Input-Output-Modell

## Idee (Wassily Leontief, Nobelpreis 1973)

Eine Volkswirtschaft mit  $n$  Sektoren: Jeder Sektor braucht Vorleistungen der anderen. Die **Technologiematrix  $A$**  beschreibt den Verbrauch.

**Offenes Modell:**

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{d}$$

- $\mathbf{x}$ : Gesamtproduktion
- $\mathbf{Ax}$ : interne Vorleistungen
- $\mathbf{d}$ : Endnachfrage (Konsum, Export)

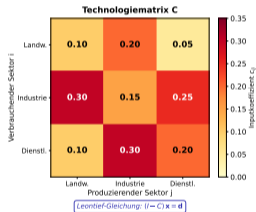
**Loesung:**  $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{d}$   
 $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  heisst **Leontief-Inverse**.

**Beispiel** (2 Sektoren):  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\mathbf{x} \approx \begin{pmatrix} 175 \\ 148 \end{pmatrix}$$

Das Leontief-Modell quantifiziert wirtschaftliche Verflechtungen – Grundlage der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung.

Leontief Input-Output-Modell



## Offenes Modell

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{d}$$

- Externe Endnachfrage  $\mathbf{d}$
- Loesung:  $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d}$
- Existiert, wenn alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  betragsmaessig  $< 1$
- “Produktiv”: Wirtschaft kann Nachfrage befriedigen

## Geschlossenes Modell

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

- Keine externe Nachfrage
- Sucht “Gleichgewicht” der Sektoren
- Loesung: Eigenvektor zum EW  $\lambda = 1$
- Nur Verhaeltnisse bestimmbar, nicht Niveau

**Hawkins-Simon-Bedingung:**  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  existiert mit nicht-negativen Eintraegen  $\Leftrightarrow$  alle fuehrenden Hauptminoren von  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$  sind positiv.

Das offene Modell ist praxisrelevanter – es beantwortet: “Wie viel produzieren, um Nachfrage zu decken?”

## Definition

Uebergangsmatrix  $\mathbf{P}$ :  $p_{ij} = P(j \rightarrow i)$ .

$$\pi^{(k)} = \mathbf{P}^k \pi^{(0)}$$

Stationaere Verteilung  $\pi^*$ :

$$\mathbf{P} \pi^* = \pi^*, \quad \sum_i \pi_i^* = 1$$

Beispiel:  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$

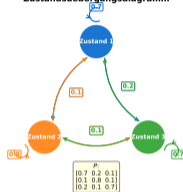
$$(\mathbf{P} - \mathbf{I})\pi^* = \mathbf{0} \Rightarrow \pi_1^* = 1,5 \pi_2^*$$

$$\pi_1^* + \pi_2^* = 1: \quad \pi^* = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

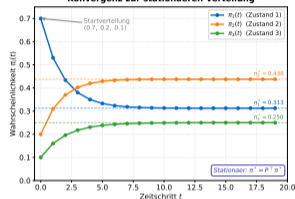
Markov-Ketten modellieren Marktanteile, Warteschlangen, Wettervorhersagen und Random Walks.

## Markov-Kette: Uebergangsmatrix und stationaere Verteilung

Zustandsuebergangsdiagramm



Konvergenz zur stationaeren Verteilung



## Kovarianzmatrix

Für  $n$  Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  (z. B. Aktienrenditen):

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$$

$\Sigma$  ist **symmetrisch** und **positiv semidefinit** ( $\lambda_i \geq 0$ ).

**Portfolio-Varianz:** Gewichtsvektor  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\sum w_i = 1$ :

$$\sigma_P^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$$

**Minimum-Varianz-Portfolio (ohne Constraints):**

$$\mathbf{w}^* = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}$$

Die Kovarianzmatrix ist das zentrale Werkzeug der modernen Portfoliotheorie (Markowitz).

## Vektoren:

```
import numpy as np

v = np.array([1, 2, 3])
w = np.array([4, -1, 2])

# Skalarprodukt
sp = np.dot(v, w)          # 8
sp = v @ w                 # 8

# Kreuzprodukt
kr = np.cross(v, w)

# Norm
n = np.linalg.norm(v)     # sqrt(14)
```

## Matrizen:

```
A = np.array([[1, 2],
              [3, 4]])
B = np.array([[5, 6],
              [7, 8]])

# Multiplikation
C = A @ B

# Transponierte
AT = A.T

# Determinante
d = np.linalg.det(A)      # -2.0

# Inverse
Ainv = np.linalg.inv(A)
```

---

NumPy ist der Standard fuer numerische lineare Algebra in Python – Basis von SciPy, pandas, scikit-learn.

## LGS loesen:

```
A = np.array([[2, 1], [5, 3]])
b = np.array([7, 19])

x = np.linalg.solve(A, b)
# array([2., 3.]
```

## Eigenwerte:

```
A = np.array([[4, 1], [2, 3]])

eigvals, eigvecs = np.linalg.eig(A)
# eigvals: [5., 2.]
# eigvecs: Spalten = Eigenvektoren
```

## Leontief-Modell:

```
A = np.array([[0.2, 0.3],
              [0.4, 0.1]])
d = np.array([100, 80])
I = np.eye(2)

x = np.linalg.solve(I - A, d)
# Gesamtproduktion je Sektor
```

## Rang:

```
r = np.linalg.matrix_rank(A)
```

---

`np.linalg.solve()` ist numerisch stabiler und schneller als die explizite Berechnung von  $A^{-1}$ .

## Python: Portfolio-Varianz berechnen

```
import numpy as np

# Kovarianzmatrix (3 Assets)
Sigma = np.array([
    [0.04, 0.006, 0.002],
    [0.006, 0.09, 0.009],
    [0.002, 0.009, 0.01 ]
])

# Gleichgewichtetes Portfolio
w = np.array([1/3, 1/3, 1/3])

# Portfolio-Varianz
var_p = w @ Sigma @ w          # 0.0207

# Minimum-Varianz-Portfolio
ones = np.ones(3)
Sinv = np.linalg.inv(Sigma)
w_min = Sinv @ ones / (ones @ Sinv @ ones)
var_min = w_min @ Sigma @ w_min
print(f"Min-Var Gewichte: {w_min.round(3)}")
print(f"Min-Var Varianz: {var_min:.4f}")
```

Thema	Kernformel
Skalarprodukt	$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \ \mathbf{u}\  \ \mathbf{v}\  \cos \theta$
Kreuzprodukt	$\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\  = \ \mathbf{u}\  \ \mathbf{v}\  \sin \theta$
Matrixprodukt	$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$
Transponierte	$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$
Determinante $2 \times 2$	$\det(\mathbf{A}) = ad - bc$
Inverse $2 \times 2$	$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
LGS-Loesung	$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$ (falls $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ )
Eigenwerte	$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$
Diagonalisierung	$\mathbf{A}^k = \mathbf{P} \operatorname{diag}(\lambda_j^k) \mathbf{P}^{-1}$
Leontief	$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{d}$
Markov	$\mathbf{P} \boldsymbol{\pi}^* = \boldsymbol{\pi}^*$
Portfolio-Varianz	$\sigma_P^2 = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$

Diese Formeln bilden das Kerninventar – sie kommen in Uebungen und Pruefungen immer wieder vor.

## Was Sie jetzt koennen:

1. Vektoren addieren, skalarmultiplizieren, Betrag berechnen
2. Skalar- und Kreuzprodukt berechnen und geometrisch interpretieren
3. Matrizen multiplizieren und Typen unterscheiden
4. Die Transponierte bilden und ihre Regeln anwenden
5. Determinanten berechnen (Sarrus, Laplace) und Invertierbarkeit pruefen
6. Die Inverse einer Matrix bestimmen (Formel, Gauss-Jordan)
7. LGS mit Gauss-Elimination systematisch loesen
8. Rang bestimmen und Loesbarkeit beurteilen
9. Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen, Diagonalisierung anwenden
10. Lineare Abbildungen als Matrizen darstellen
11. Leontief-Modell und Markov-Ketten anwenden
12. Kovarianzmatrix und Portfolio-Varianz berechnen

---

Mit diesen Werkzeugen sind Sie fuer alle weiteren quantitativen Faecher bestens geruestet.

## Wohin fuehrt die lineare Algebra weiter?

### Mathematik:

- Vektorraeume und Unterraume
- Orthogonalisierung (Gram-Schmidt)
- Singulaerwertzerlegung (SVD)
- Numerische Methoden

### Statistik / Data Science:

- Hauptkomponentenanalyse (PCA)
- Lineare Regression ( $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ )
- Dimensionsreduktion

### Finance:

- Portfolio-Optimierung (Markowitz)
- Faktormodelle (CAPM, APT)
- Risikomodellierung (VaR)

### Machine Learning:

- Neuronale Netze ( $\mathbf{y} = \sigma(\mathbf{W}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ )
- Empfehlungssysteme (Matrixfaktorisierung)
- Natural Language Processing (Embeddings)

---

Lineare Algebra ist die "Sprache" von Data Science, Machine Learning und quantitativer Finance.