Vektoren und Matrizen

Kernvorlesung

BSc Analysis

Inhaltsverzeichnis

Lernziele

Am Ende dieser Lektion koennen Sie:

1. **Vektoren** im $\mathbb{R}^n$ definieren, addieren, subtrahieren und mit Skalaren multiplizieren.
2. Das **Skalarprodukt** berechnen und zur Winkel- und Orthogonalitaetsbestimmung einsetzen.
3. **Matrizen** definieren, addieren und multiplizieren sowie Spezialmatrizen identifizieren.
4. Die **Transponierte** und die **Determinante** einer Matrix berechnen.
5. Die **inverse Matrix** bestimmen und ihre Existenzbedingung pruefen.
6. **Lineare Gleichungssysteme** in Matrixform formulieren und mit Gauss-Elimination loesen.
7. Vektoren und Matrizen in **wirtschaftlichen Anwendungen** (Leontief-Modell, Markov-Ketten) einsetzen.

Diese Lernziele bilden die Grundlage fuer die lineare Algebra innerhalb der Analysis.

Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Definition

Ein **Vektor** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist ein geordnetes n-Tupel reeller Zahlen:

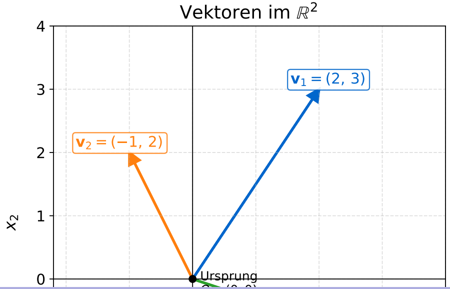
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Spaltenvektor (Standard):

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Zeilenvektor (transponiert):

$$\mathbf{a}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



Vektoraddition und Subtraktion

Komponentenweise Operationen

Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$:

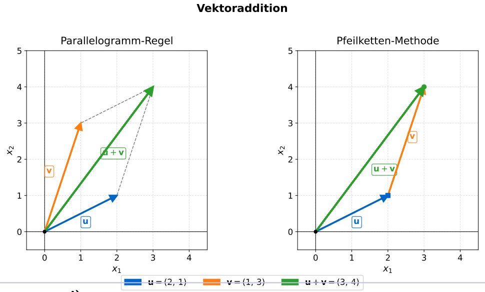
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

- Kommutativ: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- Assoziativ: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- Neutrales Element: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
- Inverses: $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$



Grafisch: Vektoraddition entspricht dem Aneinanderhaengen der Pfeile (Parallelogrammregel).

Skalarmultiplikation

Definition

Fuer $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$:

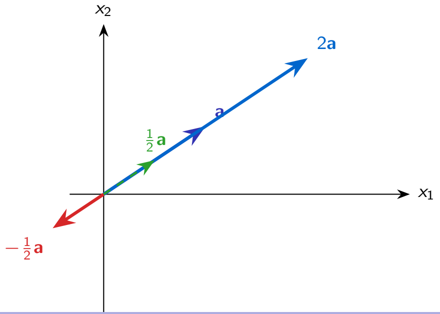
$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

- $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$
- $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$
- $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$
- $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$



Linearkombination und Norm

Linearkombination

Ein Vektor $\mathbf{v}$ ist **Linearkombination** von $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, wenn:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{a}_k$$

mit Skalaren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Lineare Unabhaengigkeit:

$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ sind **linear unabhaengig**, wenn

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$$

Euklidische Norm (Laenge)

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Beispiel: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Eigenschaften:

- $\|\mathbf{v}\| \geq 0, \quad \|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
- $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\|$
- Dreiecksungleichung: $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$

Einheitsvektor: $\hat{\mathbf{v}} = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ mit $\|\hat{\mathbf{v}}\| = 1$

Linearkombinationen und lineare Unabhaengigkeit sind Schluesselkonzepte der linearen Algebra.

Zusammenfassung: Vektoroperationen

Operation	Formel	Ergebnis
Addition	$\mathbf{a}+\mathbf{b}$	Vektor in $\mathbb{R}^n$
Subtraktion	$\mathbf{a}-\mathbf{b}$	Vektor in $\mathbb{R}^n$
Skalarmultiplikation	$\lambda\mathbf{a}$	Vektor in $\mathbb{R}^n$
Linearkombination	$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{a}_i$	Vektor in $\mathbb{R}^n$
Norm (Laenge)	$\lVert\mathbf{a}\rVert=\sqrt{\sum a_i^2}$	Skalar ≥ 0
Einheitsvektor	$\hat{\mathbf{a}}=\mathbf{a}/\lVert\mathbf{a}\rVert$	Vektor mit $\lVert\hat{\mathbf{a}}\rVert=1$

Praxisbezug:

- **Portfolio:** Gewichtungsvektor $\mathbf{w}=(w_1,\dots,w_n)^\top$ mit $\sum w_i=1$
- **Produktionsvektor:** $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)^\top$ = Mengen verschiedener Gueter
- **Preisvektor:** $\mathbf{p}=(p_1,\dots,p_n)^\top$ = Preise pro Einheit
- **Gesamtwert:** $\mathbf{p}^\top\mathbf{x}=\sum p_i x_i$ (Skalarprodukt!)

Vektoren sind die Grundbausteine – alle weiteren Konzepte (Matrizen, LGS, Optimierung) bauen darauf auf.

Skalarprodukt

Definition

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$:

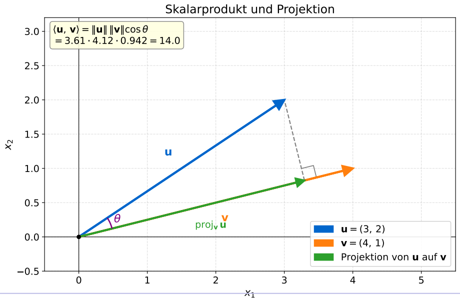
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^\top \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Beispiel:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 8 - 3 - 5 = 0$$

Rechenregeln:

- Kommutativ: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$
- Linear: $\langle \lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$
- Positiv definit: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0, = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- Zusammenhang: $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$



Das Skalarprodukt liefert eine reelle Zahl (Skalar) – nicht einen Vektor.

Winkel und Orthogonalitaet

Winkel zwischen Vektoren

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}\right)$$

Beispiel: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

$$\|\mathbf{a}\| = 1, \quad \|\mathbf{b}\| = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

Orthogonalitaet

$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ (senkrecht) $\iff \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$

Interpretation des Skalarprodukts:

- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0$: spitzer Winkel ($\theta < 90^\circ$)
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$: rechter Winkel ($\theta = 90^\circ$)
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle < 0$: stumpfer Winkel ($\theta > 90^\circ$)

Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$$

Orthogonalitaet ist fundamental: orthogonale Basen vereinfachen Berechnungen erheblich.

Kreuzprodukt (nur in $\mathbb{R}^3$)

Definition

Fuer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$:

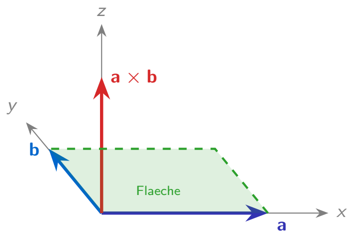
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ und $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$
- Antikommutativ: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \sin\theta$



Geometrische Bedeutung:
$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| =$ Flaecheninhalt des aufgespannten Parallelogramms.

Das Kreuzprodukt existiert nur in $\mathbb{R}^3$ und liefert einen Vektor, der auf beide Ausgangsvektoren senkrecht steht.

Matrizen: Definition

Definition

Eine **Matrix A** $\in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

Beispiele:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{2\times 3}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{3\times 1}$$

Notation:

- a_{ij} = Element in Zeile i, Spalte j
- $m \times n$ = "m Kreuz n" = Dimension
- Spaltenvektor $\in \mathbb{R}^{n\times 1}$, Zeilenvektor $\in \mathbb{R}^{1\times n}$

Quadratische Matrix $(m = n)$:

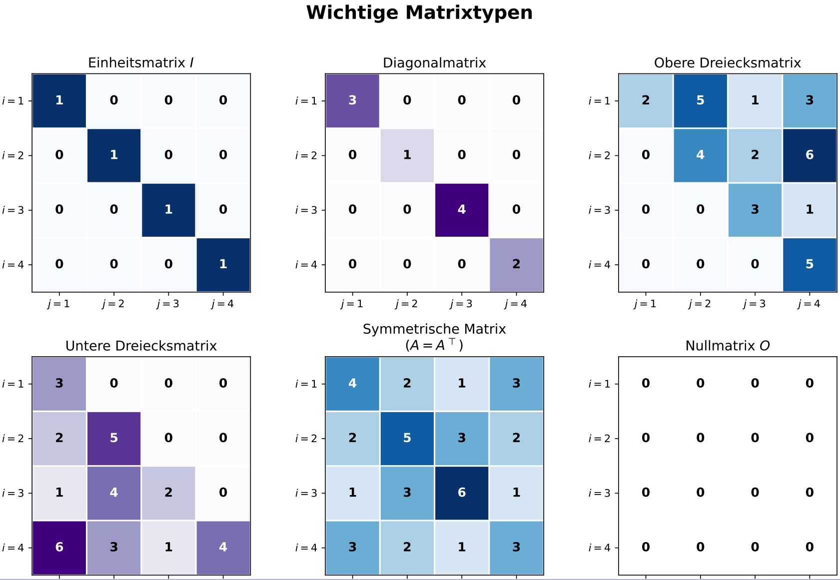
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Hauptdiagonale: Elemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$

Spur: $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Praxis: Tabellen, Datenmatrizen, Transformationen, Input-Output-Modelle.

Matrizen sind das zentrale Werkzeug der linearen Algebra – sie codieren lineare Abbildungen und Gleichungssysteme.


Wichtige Matrixtypen
Einheitsmatrix I
1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1
Diagonalmatrix
3 0 0 0
0 1 0 0
0 0 4 0
0 0 0 2
Obere Dreiecksmatrix
2 5 1 3
0 4 2 6
0 0 3 1
0 0 0 5
Untere Dreiecksmatrix
3 0 0 0
2 5 0 0
1 4 2 0
6 3 1 4
Symmetrische Matrix
(A = A^⊤)
4 2 1 3
2 5 3 2
1 3 6 1
3 2 1 3
Nullmatrix O
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
i = 1
i = 2
i = 3
i = 4
j = 1
j = 2
j = 3
j = 4

Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen

Addition ($\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$)

$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Voraussetzung: Gleiche Dimension!

Rechenregeln:

- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$

Skalarmultiplikation ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$(\lambda \mathbf{A})_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$

Beispiel:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

- $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$
- $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$
- $\lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}$
- $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$

Beachte: Matrixaddition und Skalarmultiplikation arbeiten **komponentenweise** – analog zu Vektoren.

Matrizen gleicher Dimension bilden mit Addition und Skalarmultiplikation einen Vektorraum.

Matrixmultiplikation

Definition

Fuer $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$:

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}$$

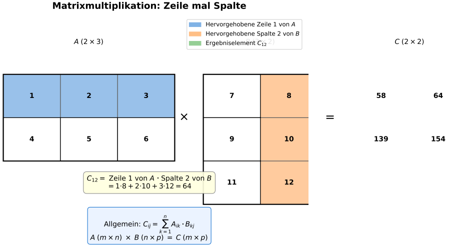
Ergebnis: $\mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. **Voraussetzung:** Spaltenanzahl von $\mathbf{A}$ = Zeilenanzahl von $\mathbf{B}$.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot5 + 2\cdot7 & 1\cdot6 + 2\cdot8 \\ 3\cdot5 + 4\cdot7 & 3\cdot6 + 4\cdot8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Merkhilfe: Zeile i · Spalte j = Element (i, j)
"Zeile mal Spalte"



Die Matrixmultiplikation ist nicht komponentenweise – sie codiert die Hintereinanderschaltung linearer Abbildungen.

Matrixmultiplikation: Regeln und Besonderheiten

Rechenregeln:

- Assoziativ: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- Distributiv: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$
- $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$

ACHTUNG – Nicht kommutativ!

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad \text{im Allgemeinen!}$$

Gegenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimensionsschema:

$$\underset{m \times p}{\boxed{\mathbf{A}}} \quad \underset{p \times n}{\boxed{\mathbf{B}}} \quad = \quad \underset{m \times n}{\boxed{\mathbf{C}}}$$

muessen gleich sein

Weitere Besonderheiten:

- $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ impliziert **nicht** $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{B} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ impliziert **nicht** $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ ("Kuerzen" verboten!)

Matrix-Vektor-Produkt:

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Die Nicht-Kommutativitaet ist der wichtigste Unterschied zum Rechnen mit Zahlen – immer die Reihenfolge beachten!

Transponierte Matrix

Definition

Die **Transponierte $\mathbf{A}^\top$** entsteht durch Vertauschen von Zeilen und Spalten:

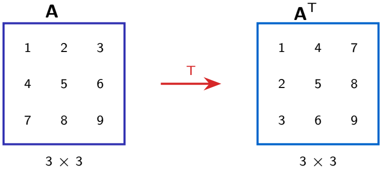
$$(\mathbf{A}^\top)_{ij} = a_{ji}$$

Aus $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ wird $\mathbf{A}^\top \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



Symmetrische Matrix:

$$\mathbf{A}^\top = \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = a_{ji} \; \forall\, i, j$$

Geometrisch: Spiegelung an der Hauptdiagonale.

Transponieren ist eine der haeufigsten Matrixoperationen – in Statistik, Oekonomie und Optimierung allgegenwaertig.

Rechenregeln fuer die Transponierte

Rechenregeln

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
3. $(\lambda \mathbf{A})^T = \lambda \mathbf{A}^T$
4. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ (Reihenfolge beachten!)
5. $(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

Verifikation von Regel 4:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{AB})^T = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}$$

Gegenpruefung:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix} \checkmark$$

Skalarprodukt via Transponierte:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$$

Merke: Beim Transponieren eines Produkts kehrt sich die Reihenfolge um – wie beim Anziehen der Socken.

Determinante: 2×2-Fall

Definition (2×2)

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

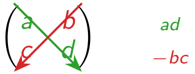
Beispiele:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

Merkhilfe: "Hauptdiagonale minus Nebendiagonale"



Geometrische Bedeutung:
$|\det(\mathbf{A})|$ = Flaecheninhalt des von den Spaltenvektoren aufgespannten **Parallelogramms**.

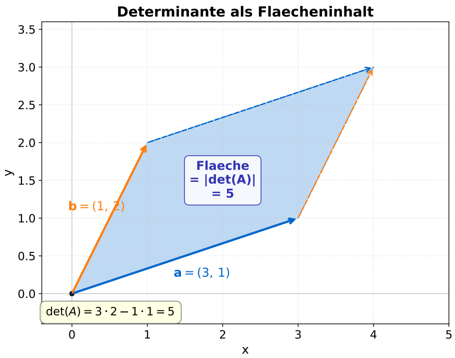
$\det(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow$ Spaltenvektoren sind **linear abhaengig** (Parallelogramm degeneriert).

Die Determinante ist eine zentrale Kenngroesse: $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ **bedeutet Invertierbarkeit.**

Determinante: 3×3 und Regel von Sarrus

Regel von Sarrus (nur 3×3!)

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$



Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1{\cdot}5{\cdot}0 + 2{\cdot}6{\cdot}7 + 3{\cdot}4{\cdot}8$$
$$- 3{\cdot}5{\cdot}7 - 1{\cdot}6{\cdot}8 - 2{\cdot}4{\cdot}0$$
$$= 0 + 84 + 96 - 105 - 48 - 0$$
$$= 27$$

Eigenschaften der Determinante

Wichtige Rechenregeln

1. $\det(\mathbf{I}) = 1$
2. $\det\left(\mathbf{A}^\top\right) = \det(\mathbf{A})$
3. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$
4. $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^n \det(\mathbf{A}) \quad (n \times n\text{-Matrix})$
5. $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})} \quad (\text{falls } \mathbf{A} \text{ invertierbar})$

Dreiecksmatrizen:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

Produkt der Diagonalelemente!

Zeilenoperationen und Determinante:

Operation	**Wirkung auf** det
Zeilen vertauschen	$\det \to -\det$
Zeile $\cdot\lambda$	$\det \to \lambda \cdot \det$
Zeile $+ \lambda\cdot$ andere	det unveraendert

Wann ist $\det(\mathbf{A}) = 0$**?**

- Eine Zeile/Spalte besteht nur aus Nullen
- Zwei Zeilen/Spalten sind identisch
- Eine Zeile ist Linearkombination anderer
- **A** ist **nicht invertierbar** (singulaer)

$\det(\mathbf{A}) \neq 0$ **ist DAS Kriterium fuer Invertierbarkeit und eindeutige Loesbarkeit von LGS.**

Inverse Matrix: Definition

Definition

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst **invertierbar** (regulaer), wenn eine Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ existiert mit:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Eigenschaften:

- Die Inverse ist **eindeutig** (falls existent)
- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ (Reihenfolge!)
- $(\mathbf{A}^{\top})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\top}$
- $(\lambda \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1} \quad (\lambda \neq 0)$

Wofuer?

Loesen von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Verifikation:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6-5 & -2+2 \\ 15-15 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Die Inverse ist das "Matrixpendant" des Kehrwerts bei Zahlen – aber nicht jede Matrix ist invertierbar!

2×2-Formel und Existenzbedingung

Explizite Formel (2×2)

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{fuer} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}) = 24 - 14 = 10$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}7 \\ -0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Existenzbedingung

$\mathbf{A}^{-1}$ existiert $\iff$ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

Aequivalente Aussagen:

- $\mathbf{A}$ ist invertierbar (regulaer)
- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- $\operatorname{rk}(\mathbf{A}) = n$ (voller Rang)
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ hat genau eine Loesung
- Die Spalten von $\mathbf{A}$ sind linear unabhaengig
- $\mathbf{A}$ hat keinen Eigenwert 0

Nicht invertierbar (singulaer): $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(\mathbf{B}) = 4 - 4 = 0 \ \Rightarrow \ \mathbf{B}^{-1}$ existiert **nicht**.

Merke: Hauptdiagonale vertauschen, Nebendiagonale negieren, durch Determinante teilen.

Inverse groesserer Matrizen

Gauss-Jordan-Verfahren

Schreibe $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I})$ und forme durch Zeilenoperationen in $(\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1})$ um.

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 - 3Z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 - 2Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifikation: $\det(\mathbf{A}) = 7 - 6 = 1$. 2×2-Formel: $\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Vorteil Gauss-Jordan: Funktioniert fuer **beliebig grosse** $n \times n$-Matrizen; die 2×2-Formel ist ein Spezialfall.

In der Praxis werden Inverse selten explizit berechnet – man loest stattdessen direkt $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ per Gauss.

Lineare Gleichungssysteme: Matrixform

LGS in Matrixschreibweise

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Matrixform:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Loesungsmoeglichkeiten:

1. **Genau eine Loesung:** $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
   $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$
2. **Keine Loesung:** System widerspruchsvoll (inkonsistent)
3. **Unendlich viele Loesungen:**
   System unterbestimmt (freie Parameter)

Erweiterte Matrix:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Die Matrixschreibweise komprimiert beliebig grosse Gleichungssysteme in eine einzige Gleichung.

Gauss-Elimination

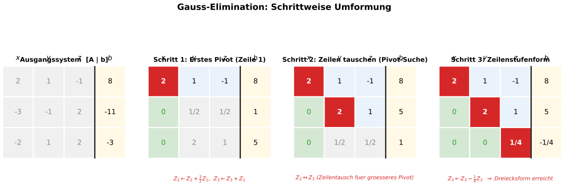
Erlaubte Zeilenoperationen (aendern Loesungsmenge nicht)

1. Zwei Zeilen **vertauschen**
2. Eine Zeile mit $\lambda \neq 0$ **multiplizieren**
3. Ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen **addieren**

Beispiel: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 - 2Z_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5} Z_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Rueckwaertseinsetzen: $x_2 = 1, \quad x_1 = 1 + x_2 = 2.$ Loesung: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$



Gauss-Elimination: 3×3-Beispiel

Gegeben: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 - Z_1]{Z_2 - 2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

Rueckwaertseinsetzen:

$$3x_3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{8}{3}$$

$$x_2 = 2 + x_3 = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

$$x_1 = 6 - x_2 - x_3 = 6 - \frac{14}{3} - \frac{8}{3} = 6 - \frac{22}{3} = -\frac{4}{3}$$

Probe: $-\frac{4}{3} + \frac{14}{3} + \frac{8}{3} = \frac{18}{3} = 6 \ \checkmark, \quad 2(-\frac{4}{3}) + 3(\frac{14}{3}) + \frac{8}{3} = \frac{-8+42+8}{3} = 14 \ \checkmark$

Systematik: Vorwaertselimination zu Dreiecksform, dann Rueckwaertseinsetzen.

Loesungsmengen linearer Gleichungssysteme

Genau eine Loesung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$

Geometrisch:
Zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt.

$\text{rk}(\mathbf{A}) = n$

Keine Loesung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$0 = 5$ Widerspruch!

Geometrisch:
Zwei parallele Geraden (kein Schnitt).

$\text{rk}(\mathbf{A}) < \text{rk}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$

Unendlich viele

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = 3 - t$, $x_2 = t$

Geometrisch:
Zwei identische Geraden (Deckungsgleichheit).

$\text{rk}(\mathbf{A}) < n$, konsistent

Rang-Kriterium (Satz von Kronecker-Capelli)

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ist loesbar $\iff$ $\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.
Falls loesbar: Anzahl freier Parameter $= n - \text{rk}(\mathbf{A})$.

Die drei Faelle sind vollstaendig: Ein LGS hat genau eine, keine oder unendlich viele Loesungen.

Leontief Input-Output-Modell

Modell

n Sektoren, jeder produziert ein Gut. Sektor j benoetigt a_{ij} Einheiten von Gut i fuer eine Einheit Output.

Input-Output-Gleichung:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{d} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

$\mathbf{x}$ = Gesamtproduktion, $\mathbf{A}$ = Technologiematrix, $\mathbf{d}$ = Endnachfrage.

Beispiel (2 Sektoren):

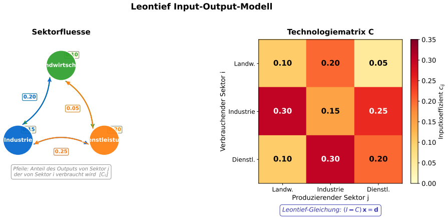
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0{,}72 - 0{,}12 = 0{,}6$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{d} = \frac{1}{0{,}6}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 250 \\ 333{,}3 \end{pmatrix}$$

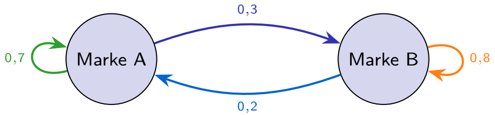


Wassily Leontief erhielt 1973 den Wirtschaftsnobelpreis fuer dieses Modell – lineare Algebra in Reinform.

Uebergangsmatrix

$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $p_{ij} \geq 0$ und $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ (Zeilensumme $= 1$).
p_{ij} = Wahrscheinlichkeit, von Zustand i nach Zustand j zu wechseln.

Beispiel: Kundenverhalten



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Zustandsverteilung nach k Schritten:

$$\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{q}^{(0)}\mathbf{P}^k$$

Start: $\mathbf{q}^{(0)} = (0{,}6 \;\; 0{,}4)$

$$\mathbf{q}^{(1)} = (0{,}6 \;\; 0{,}4)\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = (0{,}50 \;\; 0{,}50)$$

Stationaere Verteilung: $\pi\mathbf{P} = \pi$

$\Rightarrow \pi = (\frac{2}{5} \;\; \frac{3}{5}) = (0{,}4 \;\; 0{,}6)$
Langfristig 40 % Marke A, 60 % Marke B.

Markov-Ketten modellieren zustandsabhaengige Uebergaenge – zentral in Finance, Marketing und Risikomanagement.

Produktionsplanung mit Matrizen

Szenario

Ein Unternehmen stellt 3 Produkte (P_1, P_2, P_3) aus 3 Rohstoffen (R_1, R_2, R_3) her.

Bedarfsmatrix (Rohstoff pro Produkt):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Spalte j = Rohstoffbedarf fuer Produkt j.

Produktionsvektor: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$

Gesamter Rohstoffbedarf:

$$\mathbf{r} = \mathbf{B}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2\cdot 100 + 1\cdot 200 + 3\cdot 150 \\ 1\cdot 100 + 3\cdot 200 + 2\cdot 150 \\ 4\cdot 100 + 2\cdot 200 + 1\cdot 150 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 200 + 200 + 450 \\ 100 + 600 + 300 \\ 400 + 400 + 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 850 \\ 1000 \\ 950 \end{pmatrix}$$

Kostenberechnung:

Rohstoffpreise: $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ CHF/Einheit

$$\text{Gesamtkosten} = \mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{r} = 5\cdot 850 + 8\cdot 1000 + 3\cdot 950$$

$$= 4250 + 8000 + 2850 = 15\,100 \text{ CHF}$$

Kostenmatrix pro Produkt:

$$\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 30 & 35 & 34 \end{pmatrix}$$

P_1 kostet 30, P_2 kostet 35, P_3 kostet 34 CHF.

Matrixkalkuel vereinfacht Produktionsplanung: Ressourcenbedarf, Kosten und Optimierung in kompakter Form.

Python: numpy-Grundlagen

Vektoren und Matrizen

```
import numpy as np

# Vektor
v = np.array([3, -1, 2])
w = np.array([1, 4, -2])

# Addition, Skalarmultiplikation
print(v + w)        # [ 4  3  0]
print(3 * v)        # [ 9 -3  6]

# Skalarprodukt, Norm
print(np.dot(v, w)) # -5
print(np.linalg.norm(v))  # 3.742

# Matrix
A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
B = np.array([[5, 6], [7, 8]])

# Matrixmultiplikation
print(A @ B)  # [[19 22]
              #  [43 50]]
```

Determinante und Inverse

```
# Determinante
print(np.linalg.det(A))  # -2.0

# Inverse
A_inv = np.linalg.inv(A)
print(A_inv)
# [[-2.   1. ]
#  [ 1.5 -0.5]]

# Verifikation
print(A @ A_inv)  # [[1 0]
                   #  [0 1]]

# Transponierte
print(A.T)  # [[1 3]
             #  [2 4]]

# LGS loesen: Ax = b
b = np.array([5, 11])
x = np.linalg.solve(A, b)
print(x)     # [1. 2.]
```

Python: Leontief-Modell Anwendung

Leontief-Modell

```
import numpy as np

# Technologiematrix
A = np.array([[0.2, 0.3],
              [0.4, 0.1]])

# Endnachfrage
d = np.array([100, 200])

# (I - A)
I = np.eye(2)
I_minus_A = I - A
print(I_minus_A)
# [[ 0.8 -0.3]
#  [-0.4  0.9]]

# Loesung
x = np.linalg.solve(I_minus_A, d)
print(f"Produktion: {x}")
# Produktion: [250.  333.3]
```

Markov-Kette

```
# Uebergangsmatrix
P = np.array([[0.7, 0.3],
              [0.2, 0.8]])

# Startverteilung
q = np.array([0.6, 0.4])

# Simulation ueber 10 Perioden
for k in range(1, 11):
    q = q @ P
    print(f"k={k}: {q.round(4)}")
# k=1:  [0.5  0.5 ]
# k=2:  [0.45 0.55]
# ...
# k=10: [0.4  0.6 ]

# Stationaere Verteilung analytisch
# pi * P = pi  und  sum(pi) = 1
# => pi = [2/5, 3/5] = [0.4, 0.6]
print("Stationaer:", [2/5, 3/5])
```

Formelueberblick

Konzept	Formel	Bedingung
Skalarprodukt	$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum a_i b_i$	$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
Winkel	$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$	$\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$
Norm	$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$	
Kreuzprodukt	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$	nur $\mathbb{R}^3$
Matrixprodukt	$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$	innere Dim. gleich
Transponierte	$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$	Reihenfolge!
$\det(2 \times 2)$	$ad - bc$	
2×2 Inverse	$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$	$\det(\mathbf{A}) \neq 0$
LGS	$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	Gauss-Elimination
Leontief	$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d}$	$\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$

Diese Formeln bilden das Fundament der linearen Algebra – sie erscheinen in fast jedem Anwendungsgebiet.

Zusammenfassung: Lektion 2 – Vektoren und Matrizen

Erreichte Lernziele

1. ✓ **Vektoren:** Definition in $\mathbb{R}^n$, Addition, Subtraktion, Skalarmultiplikation, Linearkombination, Norm.
2. ✓ **Skalarprodukt:** Berechnung, Winkelbestimmung, Orthogonalitaet, Cauchy-Schwarz.
3. ✓ **Matrizen:** Definition, Spezialmatrizen, Addition, Skalarmultiplikation, Matrixmultiplikation.
4. ✓ **Transponierte:** Definition, Rechenregeln, Produktregel $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$.
5. ✓ **Determinante:** 2×2, 3×3 (Sarrus), Eigenschaften, geometrische Bedeutung.
6. ✓ **Inverse:** Definition, 2×2-Formel, Gauss-Jordan, Existenzbedingung $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
7. ✓ **LGS:** Matrixform, Gauss-Elimination, Loesungsmengen, Rang-Kriterium.
8. ✓ **Anwendungen:** Leontief-Modell, Markov-Ketten, Produktionsplanung.

Naechste Lektion: L03 – Differentialrechnung

Ableitungsbegriff • Ableitungsregeln • Kurvendiskussion • Optimierung

---

Vektoren und Matrizen sind das Fundament der linearen Algebra – sie verbinden Theorie mit wirtschaftlicher Praxis.