Funktionen – Quiz

Lektion 01 – Selbsttest

BSc Analysis

Frage 1

Welche der folgenden Zuordnungen ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

A. Jedem x wird $\pm\sqrt{x}$ zugeordnet
B. Jedem x werden alle y mit $x^2 + y^2 = 1$ zugeordnet
C. Einem x wird kein Wert zugeordnet, wenn $x < 0$
D. Jedem x wird x^2 zugeordnet

Frage 1

Welche der folgenden Zuordnungen ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

A. Jedem x wird $\pm\sqrt{x}$ zugeordnet

B. Jedem x werden alle y mit $x^2 + y^2 = 1$ zugeordnet

C. Einem x wird kein Wert zugeordnet, wenn $x < 0$

D. Jedem x wird x^2 zugeordnet

Antwort: D

Eine Funktion ordnet jedem Element des Definitionsbereichs genau einen Wert zu. Bei $f(x) = x^2$ ist dies erfuellt. Bei A und B werden mehrere Werte zugeordnet, bei C ist die Zuordnung nicht ueberall definiert.

Frage 2

Was ist der Definitionsbereich von $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$?

A. Alle reellen Zahlen

B. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

D. Nur positive reelle Zahlen

Frage 2

Was ist der Definitionsbereich von $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$?

A. Alle reellen Zahlen

B. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

D. Nur positive reelle Zahlen

Antwort: B

Der Nenner $x - 2$ darf nicht Null werden, daher muss $x \neq 2$ gelten. Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Frage 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 4$. Was ist die Bildmenge $f(\mathbb{R})$?

A. $\mathbb{R}$

B. $[0, \infty)$

C. $(-\infty, -4]$

D. $[-4, \infty)$

Frage 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 4$. Was ist die Bildmenge $f(\mathbb{R})$?

A. $\mathbb{R}$

B. $[0,\ \infty)$

C. $(-\infty,\ -4]$

D. $[-4,\ \infty)$

Antwort: D

Das Minimum von $x^2 - 4$ wird bei $x = 0$ erreicht mit $f(0) = -4$. Da $x^2 \geq 0$ fuer alle x, ist $f(x) \geq -4$. Jeder Wert ≥ -4 wird angenommen, also ist die Bildmenge $[-4,\ \infty)$.

Frage 4

Wie lautet die korrekte Notation fuer eine Funktion f mit Definitionsbereich D und Wertebereich W?

A. $f: D \to W,\ x \mapsto f(x)$
B. $f(D) = W$
C. $D \mapsto W: f(x)$
D. $f = D \times W$

Frage 4

Wie lautet die korrekte Notation fuer eine Funktion f mit Definitionsbereich D und Wertebereich W?

A. $f : D \to W,\ x \mapsto f(x)$
B. $f(D) = W$
C. $D \mapsto W : f(x)$
D. $f = D \times W$

Antwort: A
Die Standardnotation ist $f : D \to W,\ x \mapsto f(x)$. Dabei gibt $f : D \to W$ die Mengen an und $x \mapsto f(x)$ die Zuordnungsvorschrift.

Frage 5

Was ist der Definitionsbereich von $f(x) = \sqrt{x-3} + \ln(x)$?

A. $[3, \infty)$
B. $(0, \infty)$
C. $(3, \infty)$
D. $\mathbb{R}$

Frage 5

Was ist der Definitionsbereich von $f(x) = \sqrt{x-3} + \ln(x)$?

A. $[3, \infty)$
B. $(0, \infty)$
C. $(3, \infty)$
D. $\mathbb{R}$

Antwort: A
Fuer $\sqrt{x-3}$ brauchen wir $x \geq 3$. Fuer $\ln(x)$ brauchen wir $x > 0$. Der Durchschnitt ist $[3, \infty)$, da $x \geq 3$ bereits $x > 0$ impliziert.

Frage 6

Was besagt der vertikale Linientest?

A. Jede vertikale Linie schneidet den Graphen in hoechstens einem Punkt, dann ist es eine Funktion
B. Jede vertikale Linie schneidet den Graphen in mindestens zwei Punkten
C. Der Graph muss symmetrisch zur y-Achse sein
D. Der Graph darf keine Luecken haben

Frage 6

Was besagt der vertikale Linientest?

A. Jede vertikale Linie schneidet den Graphen in hoechstens einem Punkt, dann ist es eine Funktion
B. Jede vertikale Linie schneidet den Graphen in mindestens zwei Punkten
C. Der Graph muss symmetrisch zur y-Achse sein
D. Der Graph darf keine Luecken haben

Antwort: A
Der vertikale Linientest prueft, ob eine Kurve der Graph einer Funktion ist: Jede senkrechte Gerade $x = a$ darf den Graphen in hoechstens einem Punkt schneiden, da jedem x genau ein y-Wert zugeordnet sein muss.

Frage 7

Welche Darstellungsform einer Funktion ordnet explizit einzelnen x-Werten ihre y-Werte zu?

A. Graph
B. Zuordnungsvorschrift
C. Definitionsbereich
D. Wertetabelle

Frage 7

Welche Darstellungsform einer Funktion ordnet explizit einzelnen x-Werten ihre y-Werte zu?

A. Graph
B. Zuordnungsvorschrift
C. Definitionsbereich
D. Wertetabelle

Antwort: D

Eine Wertetabelle listet fuer ausgewaehlte x-Werte die zugehoerigen $f(x)$-Werte auf. Sie ist besonders nuetzlich, wenn keine geschlossene Formel vorliegt.

Frage 8

Welcher Graph besteht den vertikalen Linientest NICHT?

A. Ein Kreis $x^2 + y^2 = 1$

B. Der Graph von $f(x) = x^3$

C. Der Graph von $f(x) = |x|$

D. Der Graph von $f(x) = e^x$

Frage 8

Welcher Graph besteht den vertikalen Linientest NICHT?

A. Ein Kreis $x^2 + y^2 = 1$

B. Der Graph von $f(x) = x^3$

C. Der Graph von $f(x) = |x|$

D. Der Graph von $f(x) = e^x$

Antwort: A

Der Kreis $x^2 + y^2 = 1$ besteht den vertikalen Linientest nicht, da z. B. fuer $x = 0$ sowohl $y = 1$ als auch $y = -1$ auf dem Kreis liegen. Ein Kreis ist daher kein Funktionsgraph.

Frage 9

Was ist die Nullstelle der linearen Funktion $f(x) = 3x - 6$?

A. $x = -2$
B. $x = 6$
C. $x = -6$
D. $x = 2$

Frage 9

Was ist die Nullstelle der linearen Funktion $f(x) = 3x - 6$?

A. $x = -2$

B. $x = 6$

C. $x = -6$

D. $x = 2$

Antwort: D

Nullstelle: $3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$.

Frage 10

Welche Steigung hat eine Gerade, die senkrecht auf $g(x) = 2x + 1$ steht?

A. 2

B. -2

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

Frage 10

Welche Steigung hat eine Gerade, die senkrecht auf $g(x) = 2x + 1$ steht?

A. 2

B. -2

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

Antwort: C

Zwei Geraden stehen senkrecht aufeinander, wenn das Produkt ihrer Steigungen -1 ergibt. Die Steigung von g ist $m_1 = 2$, also ist $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$.

Frage 11

Zwei lineare Funktionen $f(x) = 3x + 1$ **und** $g(x) = 3x - 5$ **sind zueinander:**

A. Senkrecht

B. Identisch

C. Parallel

D. Weder parallel noch senkrecht

Frage 11

Zwei lineare Funktionen $f(x) = 3x + 1$ und $g(x) = 3x - 5$ sind zueinander:

A. Senkrecht
B. Identisch
C. Parallel
D. Weder parallel noch senkrecht

Antwort: C
Zwei Geraden sind parallel, wenn sie dieselbe Steigung haben. Hier ist $m_f = m_g = 3$, aber $b_f \neq b_g$, also sind die Geraden parallel (und nicht identisch).

Frage 12

Welche Scheitelform hat die Parabel $f(x) = x^2 - 6x + 5$?

A. $f(x) = (x-3)^2 - 4$
B. $f(x) = (x+3)^2 - 4$
C. $f(x) = (x-3)^2 + 5$
D. $f(x) = (x-6)^2 - 31$

Frage 12

Welche Scheitelform hat die Parabel $f(x) = x^2 - 6x + 5$?

A. $f(x) = (x-3)^2 - 4$
B. $f(x) = (x+3)^2 - 4$
C. $f(x) = (x-3)^2 + 5$
D. $f(x) = (x-6)^2 - 31$

Antwort: A
Quadratische Ergaenzung: $x^2 - 6x + 5 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$. Der Scheitel liegt bei $(3, -4)$.

Frage 13

Was sagt die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ aus, wenn $D < 0$?

A. Es gibt genau zwei reelle Nullstellen
B. Es gibt genau eine doppelte reelle Nullstelle
C. Es gibt keine reellen Nullstellen
D. Die Parabel ist nach unten geoeffnet

Frage 13

Was sagt die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ aus, wenn $D < 0$?

A. Es gibt genau zwei reelle Nullstellen

B. Es gibt genau eine doppelte reelle Nullstelle

C. Es gibt keine reellen Nullstellen

D. Die Parabel ist nach unten geoeffnet

Antwort: C

Ist $D = b^2 - 4ac < 0$, so hat die quadratische Gleichung keine reellen Loesungen, da man aus einer negativen Zahl keine reelle Wurzel ziehen kann.

Frage 14

Wie viele Nullstellen hat $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$?

A. Genau eine (doppelte)
B. Keine
C. Genau zwei verschiedene
D. Unendlich viele

Frage 14

Wie viele Nullstellen hat $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$?

A. Genau eine (doppelte)
B. Keine
C. Genau zwei verschiedene
D. Unendlich viele

Antwort: A
Die Diskriminante ist $D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 16 = 0$. Bei $D = 0$ gibt es genau eine doppelte Nullstelle: $x = -\frac{b}{2a} = -1$. Alternativ: $2x^2 + 4x + 2 = 2(x+1)^2$.

Frage 15

Was ist der Grad des Polynoms $p(x) = 5x^4 - 3x^2 + 7x - 1$?

A. 3

B. 5

C. 7

D. 4

Frage 15

Was ist der Grad des Polynoms $p(x) = 5x^4 - 3x^2 + 7x - 1$?

A. 3

B. 5

C. 7

D. 4

Antwort: D

Der Grad eines Polynoms ist die hoechste vorkommende Potenz von x. Hier ist der fuehrende Term $5x^4$, also ist der Grad 4.

Frage 16

Was ist das Verhalten von $p(x) = -2x^3 + x$ fuer $x \to +\infty$?

A. $p(x) \to +\infty$

B. $p(x) \to 0$

C. $p(x)$ oszilliert

D. $p(x) \to -\infty$

Frage 16

Was ist das Verhalten von $p(x) = -2x^3 + x$ fuer $x \to +\infty$?

A. $p(x) \to +\infty$
B. $p(x) \to 0$
C. $p(x)$ oszilliert
D. $p(x) \to -\infty$

Antwort: D

Fuer $x \to +\infty$ dominiert der fuehrende Term $-2x^3$. Da der Koeffizient negativ und der Grad ungerade ist, gilt $p(x) \to -\infty$.

Frage 17

Was ist der Definitionsbereich von $f(x) = \ln(x)$?

A. $\mathbb{R}$
B. $(0, \infty)$
C. $[0, \infty)$
D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Frage 17

Was ist der Definitionsbereich von $f(x) = \ln(x)$?

A. $\mathbb{R}$

B. $(0, \infty)$

C. $[0, \infty)$

D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Antwort: B

Der natuerliche Logarithmus ist nur fuer strikt positive Argumente definiert: $\ln(x)$ existiert genau dann, wenn $x > 0$. Daher ist der Definitionsbereich $(0, \infty)$.

Frage 18

Welchen Wert hat $\ln(e^3)$ **?**

A. e^3

B. $3e$

C. 3

D. $\frac{1}{3}$

Frage 18

Welchen Wert hat $\ln(e^3)$?

A. e^3

B. $3e$

C. 3

D. $\frac{1}{3}$

Antwort: C

Es gilt $\ln(e^3) = 3$, da ln und exp Umkehrfunktionen sind: $\ln(e^a) = a$ fuer alle $a \in \mathbb{R}$.

Frage 19

Welche Rechenregel fuer Logarithmen ist korrekt?

A. $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$

B. $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

C. $\ln(a \cdot b) = \ln(a) \cdot \ln(b)$

D. $\ln(a^b) = a \cdot \ln(b)$

Frage 19

Welche Rechenregel fuer Logarithmen ist korrekt?

A. $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$

B. $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

C. $\ln(a \cdot b) = \ln(a) \cdot \ln(b)$

D. $\ln(a^b) = a \cdot \ln(b)$

Antwort: B

Die Produktregel des Logarithmus lautet $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ fuer $a, b > 0$. Achtung: $\ln(a + b) \neq \ln(a) + \ln(b)$ – das ist ein haeufiger Fehler.

Frage 20

Welcher Funktionstyp beschreibt Zinseszins am besten?

A. Lineare Funktion

B. Quadratische Funktion

C. Exponentialfunktion

D. Logarithmusfunktion

Frage 20

Welcher Funktionstyp beschreibt Zinseszins am besten?

A. Lineare Funktion
B. Quadratische Funktion
C. Exponentialfunktion
D. Logarithmusfunktion

Antwort: C
Zinseszins folgt dem Modell $K(t) = K_0 \cdot e^{rt}$ (stetig) oder $K(t) = K_0 \cdot (1 + r)^t$ (diskret) – beides Exponentialfunktionen.

Frage 21

Was ist der Wertebereich von $f(x) = \sin(x)$?

A. Alle reellen Zahlen

B. $[0, 1]$

C. $(-\pi, \pi)$

D. $[-1, 1]$

Frage 21

Was ist der Wertebereich von $f(x) = \sin(x)$?

A. Alle reellen Zahlen
B. $[0, 1]$
C. $(-\pi, \pi)$
D. $[-1, 1]$

Antwort: D
Die Sinusfunktion nimmt alle Werte zwischen -1 und 1 an, einschliesslich der Randwerte. Der Wertebereich ist $[-1, 1]$.

Frage 22

Welche Periode hat die Funktion $f(x) = \cos(2x)$?

A. 2π

B. π

C. $\frac{\pi}{2}$

D. 4π

Frage 22

Welche Periode hat die Funktion $f(x) = \cos(2x)$?

A. 2π

B. π

C. $\frac{\pi}{2}$

D. 4π

Antwort: B
Die Periode von $\cos(bx)$ ist $\frac{2\pi}{|b|}$. Hier ist $b = 2$, also Periode $= \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Frage 23

Welche Funktion ist streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$?

A. $f(x) = x^2$
B. $f(x) = \sin(x)$
C. $f(x) = e^x$
D. $f(x) = |x|$

Frage 23

Welche Funktion ist streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$?

A. $f(x) = x^2$

B. $f(x) = \sin(x)$

C. $f(x) = e^x$

D. $f(x) = |x|$

Antwort: C

Die Exponentialfunktion e^x ist streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$: Fuer $x_1 < x_2$ gilt stets $e^{x_1} < e^{x_2}$. Die anderen Funktionen sind nicht auf ganz $\mathbb{R}$ monoton.

Frage 24

Welche Funktion ist gerade (d. h. $f(-x) = f(x)$ fuer alle x)?

A. $f(x) = x^3$

B. $f(x) = x^2 + 1$

C. $f(x) = e^x$

D. $f(x) = \sin(x)$

Frage 24

Welche Funktion ist gerade (d. h. $f(-x) = f(x)$ fuer alle x)?

A. $f(x) = x^3$

B. $f(x) = x^2 + 1$

C. $f(x) = e^x$

D. $f(x) = \sin(x)$

Antwort: B

Es gilt $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$, also ist f gerade. Dagegen ist x^3 ungerade und $\sin(x)$ ungerade. e^x ist weder gerade noch ungerade.

Frage 25

Welche Eigenschaft hat $f(x) = \frac{1}{x}$ bezueglich Symmetrie?

A. Gerade Funktion

B. Weder gerade noch ungerade

C. Periodisch

D. Ungerade Funktion

Frage 25

Welche Eigenschaft hat $f(x) = \dfrac{1}{x}$ bezueglich Symmetrie?

A. Gerade Funktion

B. Weder gerade noch ungerade

C. Periodisch

D. Ungerade Funktion

Antwort: D

Es gilt $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$, also ist f ungerade. Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Frage 26

Was ist $(f \circ g)(x)$ **fuer** $f(x) = x^2$ **und** $g(x) = x + 1$ **?**

A. $x^2 + 1$

B. $x^2 + x + 1$

C. $x^2 \cdot (x + 1)$

D. $(x + 1)^2$

Frage 26

Was ist $(f \circ g)(x)$ **fuer** $f(x) = x^2$ **und** $g(x) = x + 1$ **?**

A. $x^2 + 1$

B. $x^2 + x + 1$

C. $x^2 \cdot (x + 1)$

D. $(x + 1)^2$

Antwort: D

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$. Man setzt $g(x) = x + 1$ in f ein.

Frage 27

Was ist der Definitionsbereich von $h = \frac{f}{g}$ fuer $f(x) = x^2$ und $g(x) = x - 1$?

A. $\mathbb{R}$

B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

D. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Frage 27

Was ist der Definitionsbereich von $h = \frac{f}{g}$ fuer $f(x) = x^2$ und $g(x) = x - 1$?

A. $\mathbb{R}$

B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

D. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Antwort: C

Der Quotient $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ist ueberall definiert, wo $g(x) \neq 0$, also $x \neq 1$. Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Frage 28

Ist $f(x) = x^2$ injektiv auf ganz $\mathbb{R}$?

A. Ja, da jeder y-Wert genau ein x hat
B. Nein, da z. B. $f(-2) = f(2) = 4$
C. Ja, da die Funktion stetig ist
D. Nein, da die Funktion nicht definiert ist fuer $x < 0$

Frage 28

Ist $f(x) = x^2$ injektiv auf ganz $\mathbb{R}$?

A. Ja, da jeder y-Wert genau ein x hat
B. Nein, da z. B. $f(-2) = f(2) = 4$
C. Ja, da die Funktion stetig ist
D. Nein, da die Funktion nicht definiert ist fuer $x < 0$

Antwort: B

$f(x) = x^2$ ist nicht injektiv auf $\mathbb{R}$, da verschiedene x-Werte denselben Funktionswert liefern koennen: $f(-2) = f(2) = 4$.

Frage 29

Wann ist eine Funktion bijektiv?

A. Wenn sie stetig ist

B. Wenn sie monoton ist

C. Wenn sie injektiv und surjektiv ist

D. Wenn sie differenzierbar ist

Frage 29

Wann ist eine Funktion bijektiv?

A. Wenn sie stetig ist
B. Wenn sie monoton ist
C. Wenn sie injektiv und surjektiv ist
D. Wenn sie differenzierbar ist

Antwort: C
Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie sowohl injektiv (verschiedene $x \rightarrow$ verschiedene y) als auch surjektiv (jedes y im Zielbereich wird getroffen) ist. Dann existiert eine Umkehrfunktion.

Frage 30

Welche Funktion ist die Umkehrfunktion von $f(x) = e^x$?

A. $f^{-1}(x) = \frac{1}{e^x}$

B. $f^{-1}(x) = \ln(x)$

C. $f^{-1}(x) = \frac{x}{e}$

D. $f^{-1}(x) = \log_{10}(x)$

Frage 30

Welche Funktion ist die Umkehrfunktion von $f(x) = e^x$?

A. $f^{-1}(x) = \frac{1}{e^x}$

B. $f^{-1}(x) = \ln(x)$

C. $f^{-1}(x) = \frac{x}{e}$

D. $f^{-1}(x) = \log_{10}(x)$

Antwort: B

Die Umkehrfunktion von e^x ist der natuerliche Logarithmus $\ln(x)$, da $e^{\ln(x)} = x$ und $\ln(e^x) = x$. Die Umkehrfunktion existiert, da e^x streng monoton wachsend und damit bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $(0, \infty)$ ist.