

Funktionen

Ueerblick in 5 Minuten

BSc Analysis

Definition

Eine **Funktion** $f: D \rightarrow W$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ *genau ein* Element $y = f(x) \in W$ zuordnet.

Bestandteile:

- $D = \text{dom}(f)$ – **Definitionsbereich**
- W – **Wertebereich** (Zielmenge)
- $f(D) = \text{ran}(f) \subseteq W$ – **Bildmenge**

Notation:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

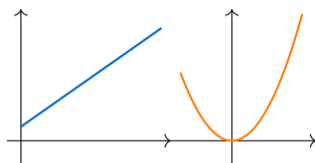
- f – Name der Funktion
- $x \mapsto x^2$ – Zuordnungsvorschrift

Beispiel: Kostenfunktion $C: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $C(x) = 2x^2 + 3x + 100$.

Bei $x = 10$ Einheiten: $C(10) = 200 + 30 + 100 = 330$.

Merke: Jedes x hat *genau ein* $f(x)$ – das ist der Unterschied zu einer Relation.

Die wichtigsten Funktionstypen

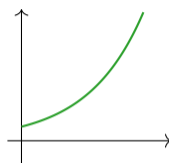


Linear

$$f(x) = mx + b$$

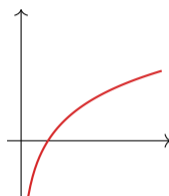
Quadratisch

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



Exponentiell

$$f(x) = a \cdot e^{kx}$$



Logarithmisch

$$f(x) = \ln(x)$$

- **Linear:** konstante Steigung, proportionale Zusammenhänge
- **Quadratisch:** Parabel, Optimierungsprobleme

- **Exponentiell:** Wachstum, Zinseszins
- **Logarithmisch:** Umkehrung der e-Funktion, Skalen

Diese vier Typen bilden das Fundament – alle weiteren Funktionen bauen darauf auf.

Eigenschaft	Bedeutung	Beispiel
Definitionsbereich	Menge aller zulaessigen x -Werte	$f(x) = \frac{1}{x}$: $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Nullstellen	x -Werte mit $f(x) = 0$	$f(x) = x^2 - 4$: $x = \pm 2$
Monotonie	Wachstum / Abnahme auf Intervallen	e^x streng monoton wachsend auf \mathbb{R}
Stetigkeit	Kein "Sprung" im Graphen	Polynome sind stetig auf ganz \mathbb{R}

Monotonie – formal

f heisst **streng monoton wachsend** auf I , wenn

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

Stetigkeit – Intuition

f ist stetig in a , wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Man kann den Graphen "ohne Absetzen" zeichnen.

Diese Eigenschaften werden in der Differentialrechnung mit exakten Werkzeugen untersucht.

Warum Funktionen wichtig sind

Anwendungen in Oekonomie und Technik:

1. **Zinseszins:** Kapital waechst gemaess

$$K(t) = K_0 \cdot e^{r t},$$

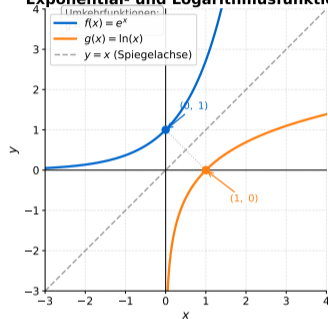
wobei K_0 das Anfangskapital, r der Zinssatz und t die Zeit ist.

2. **Kostenfunktion:** $C(x) = 2x^2 + 3x + 100$ modelliert Fixkosten und variable Kosten.
3. **Nachfragekurve:** $D(p) = \frac{a}{p^b}$ – Potenzfunktion in der Preistheorie.

Warum gerade diese Mathematik?

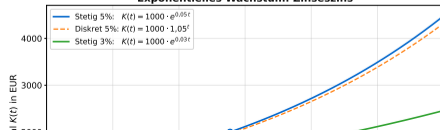
- Funktionen formalisieren *Ursache* → *Wirkung*.
- Ableitungen (Lektion 2) messen *Veraenderungsraten*.
- Integrale (Lektion 3) berechnen *Gesamtwirkungen*.

Exponential- und Logarithmusfunktion



Exponential- und Logarithmusfunktion im Vergleich.

Exponentielles Wachstum: Zinseszins



Was Sie jetzt wissen sollten

1. Eine Funktion $f: D \rightarrow W$ ordnet jedem $x \in D$ genau ein $f(x) \in W$ zu.
2. Die vier Grundtypen (linear, quadratisch, exponentiell, logarithmisch) und ihre Graphen.
3. Zentrale Eigenschaften: Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonie, Stetigkeit.
4. Funktionen modellieren reale Zusammenhaenge – z. B. Zinseszins $K(t) = K_0 e^{rt}$.

Naechste Schritte:

- Differentialrechnung – Wie schnell aendert sich f ?
- Integralrechnung – Welche Flaechen liegt unter f ?
- Reihen und Folgen – Was passiert fuer $n \rightarrow \infty$?

Zentrale Formel-Uebersicht:

$f(x) = mx + b$	(linear)
$f(x) = ax^2 + bx + c$	(quadratisch)
$f(x) = a \cdot e^{kx}$	(exponentiell)
$f(x) = \ln(x)$	(logarithmisch)

Vertiefung: 01_funktionen_mini10 – Kompakter Einstieg mit Funktionsoperationen und weiteren Beispielen.