Funktionen

Kompakter Einstieg

BSc Analysis

Gliederung

Was ist eine Funktion?

Definition

Eine **Funktion** (Abbildung) $f: D \to W$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ *genau ein* Element $y = f(x) \in W$ zuordnet.

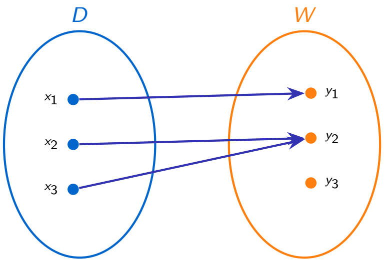
Bestandteile:

- $D = \mathrm{dom}(f)$ – **Definitionsbereich**
- W – **Wertebereich** (Zielmenge)
- $f(D) = \mathrm{ran}(f) \subseteq W$ – **Bildmenge**

Schreibweisen:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

- f – Name der Funktion
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – Definitions- und Wertebereich
- $x \mapsto x^2$ – Zuordnungsvorschrift



Jedem x wird genau ein y zugeordnet

Beachte: Verschiedene x-Werte duerfen denselben y-Wert haben ($x_2, x_3 \mapsto y_2$).

Beispiel: Quadratische Kostenfunktion $C(x) = 2x^2 + 3x + 100$

1. Formel (analytisch)

$$C(x) = 2x^2 + 3x + 100$$

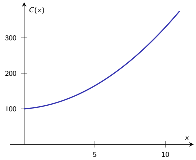
- Kompakt und exakt
- Erlaubt Ableitungen
- Meist bevorzugt

2. Wertetabelle (numerisch)

x	$C(x)$
0	100
5	165
10	330
20	960

- Anschaulich
- Nur Stichproben

3. Graph (geometrisch)



- Globaler Ueberblick
- Qualitatives Verhalten

Alle drei Darstellungen beschreiben dieselbe Funktion – waehlen Sie je nach Kontext.

Polynomfunktionen

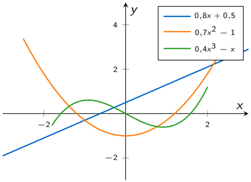
Definition

Ein **Polynom** vom Grad n hat die Form

$$p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0, \qquad a_n \neq 0.$$

Wichtige Spezialfaelle:

- $n = 1$: **linear** $\;f(x) = mx + b$
- $n = 2$: **quadratisch** $\;f(x) = ax^2 + bx + c$
- $n = 3$: **kubisch** $\;f(x) = ax^3 + \dots$



Eigenschaften:

- $\mathrm{dom}(p) = \mathbb{R}$ (immer ganz $\mathbb{R}$)
- Stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}$
- Hoechstens n Nullstellen

Nullstellen quadratischer Polynome ($ax^2 + bx + c = 0$):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} > 0: & \text{zwei reelle Nullstellen} \\ = 0: & \text{eine doppelte} \\ < 0: & \text{keine reelle} \end{cases}$$

Die Diskriminante Δ entscheidet ueber die Anzahl reeller Loesungen.

Exponentialfunktion

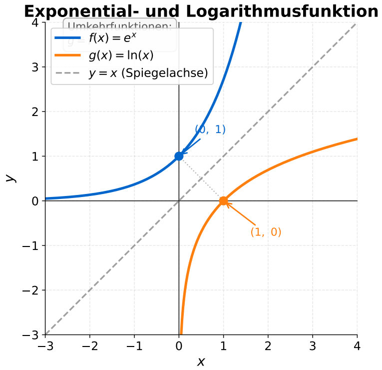
$$f(x) = e^x, \quad \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}, \; \mathrm{ran}(f) = \mathbb{R}_{>0}$$

- Streng monoton wachsend
- $e^0 = 1, \quad e^x > 0$ fuer alle x
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ (Ableitung = Funktion)

Logarithmusfunktion

$$g(x) = \ln(x), \quad \mathrm{dom}(g) = \mathbb{R}_{>0}, \; \mathrm{ran}(g) = \mathbb{R}$$

- **Umkehrfunktion** von e^x
- $\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ (Produktregel)



e^x und $\ln(x)$ sind spiegelbildlich an der Geraden $y = x$.

Zusammenhang:

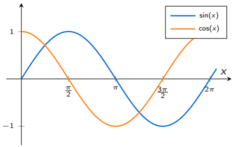
$$e^{\ln(x)} = x \;\; (x > 0), \qquad \ln(e^x) = x \;\; (x \in \mathbb{R})$$

Spiegelung an $y = x$: Graphisch erkennt man Umkehrfunktionen an dieser Symmetrie.

Trigonometrische Funktionen – Kurzueberblick

Die drei Grundfunktionen

Funktion	Periode	Wertebereich
$\sin(x)$	2π	$[-1, 1]$
$\cos(x)$	2π	$[-1, 1]$
$\tan(x)$	π	$\mathbb{R}$



Wichtige Identitaeten:

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (Pythagoras)
- $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (Phasenverschiebung)
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Werte an Standardwinkeln:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Trigonometrische Funktionen modellieren periodische Vorgaenge (Schwingungen, Wellen, Saisonalitaet).

Definitionsbereich und Nullstellen

Definitionsbereich dom(f)

Menge aller x, fuer die $f(x)$ definiert ist.

Typische Einschraenkungen:

- **Division durch Null:**
  $f(x) = \frac{1}{x-2}$: $\quad \text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- **Wurzel aus negativer Zahl:**
  $f(x) = \sqrt{x}$: $\quad \text{dom}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$
- **Logarithmus:**
  $f(x) = \ln(x-1)$: $\quad \text{dom}(f) = (1, \infty)$

Nullstellen

x_0 heisst **Nullstelle** von f, wenn $f(x_0) = 0$.

Beispiele:

- $f(x) = x^2 - 4$:
  $x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2$
- $f(x) = e^x - 1$:
  $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$
- $f(x) = \sin(x)$:
  $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Beachte: Nicht jede Funktion hat Nullstellen.
Beispiel: $f(x) = e^x$ hat *keine* ($e^x > 0$ immer).

Tipp: Definitionsbereich zuerst bestimmen – er ist Voraussetzung fuer alle weiteren Analysen.

Monotonie und Stetigkeit

Monotonie

f heisst auf einem Intervall I:

- **streng monoton wachsend**, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **streng monoton fallend**, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Beispiele:

- e^x: streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$
- e^{-x}: streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$
- x^2: fallend auf $(-\infty, 0]$, wachsend auf $[0, \infty)$

Stetigkeit

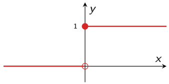
f ist **stetig in** a, wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Stetig: Polynome, e^x, sin, cos, ln (auf dom)

Gegenbeispiel (unstetig):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Heaviside-Funktion: Sprung bei $x = 0$.

Streng monotone Funktionen sind injektiv – sie besitzen eine Umkehrfunktion.

Verkettung (Komposition) von Funktionen

Definition

Die **Verkettung** von f und g ist definiert als

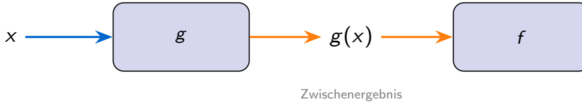
$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

Man wertet *zuerst* g, dann f aus. Lies: “f nach g”.

Konkretes Beispiel:

$$g(x) = x^2 + 1, \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{x^2 + 1}$$

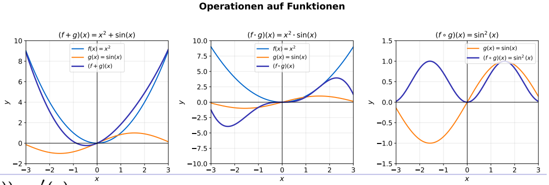


Auswertung bei $x = 2$:

1. $g(2) = 4 + 1 = 5$
2. $f(5) = \sqrt{5} \approx 2{,}236$

Achtung: $f \circ g \neq g \circ f$ im Allgemeinen!

$$(g \circ f)(x) = g\big(\sqrt{x}\big) = x + 1 \quad (x \geq 0)$$



Die Kettenregel (Lektion 2) gibt die Ableitung von $f \circ g$: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

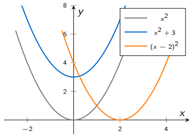
Grafische Transformationen

Ausgehend vom Graphen von $f(x)$ erzeugt man neue Funktionen:

Transformation	Formel	Wirkung auf den Graphen
Vertikale Verschiebung	$f(x) + c$	$c > 0$: nach oben; $c < 0$: nach unten
Horizontale Verschiebung	$f(x - c)$	$c > 0$: nach rechts; $c < 0$: nach links
Vertikale Streckung	$a \cdot f(x)$	$\lvert a\rvert > 1$: strecken; $\lvert a\rvert < 1$: stauchen
Spiegelung an x-Achse	$-f(x)$	Alle y-Werte negiert
Spiegelung an y-Achse	$f(-x)$	Graph horizontal gespiegelt

Beispiel: $f(x) = x^2$

- $f(x) + 3 = x^2 + 3$ (3 nach oben)
- $f(x - 2) = (x - 2)^2$ (2 nach rechts)
- $2\,f(x) = 2x^2$ (vertikal gestreckt)



Diese Transformationen gelten fuer jede Funktion – nicht nur fuer Polynome.

Anwendung: Exponentielles Wachstum in der Oekonomie

Zinseszinsformel (stetig)

$$K(t) = K_0 \cdot e^{r\,t}$$

- K_0: Anfangskapital
- r: jaehrlicher Zinssatz (als Dezimalzahl)
- t: Zeit in Jahren

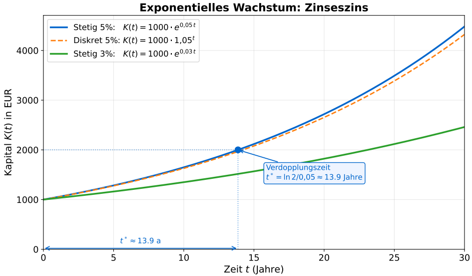
Zahlenbeispiel:
$K_0 = 10\,000$ CHF, $r = 0{,}05$ (5 %), $t = 10$ Jahre:

$$K(10) = 10\,000 \cdot e^{0{,}5} \approx 10\,000 \cdot 1{,}6487 = 16\,487 \text{ CHF}$$

Verdoppelungszeit: $K(t^*) = 2K_0$

$$e^{r\,t^*} = 2 \implies t^* = \frac{\ln 2}{r} \approx \frac{0{,}693}{r}$$

Bei $r = 0{,}05$: $t^* \approx 13{,}86$ Jahre.



Kapitalentwicklung bei verschiedenen Zinssaetzen.

Diskrete vs. stetige Verzinsung:

$$K_{\text{diskret}}(t) = K_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \xrightarrow{n\to\infty} K_0\, e^{rt}$$

Fuer grosse n konvergiert die diskrete gegen die stetige Formel.

Die Euler'sche Zahl e entsteht aus dem Grenzwert $e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n \approx 2{,}71828$.

Zusammenfassung – Lernziele Lektion 1

Nach dieser Lektion koennen Sie ...

1. den **Funktionsbegriff** formal definieren ($f : D \to W$, Zuordnungsvorschrift),
2. Funktionen in drei **Darstellungsformen** angeben (Formel, Tabelle, Graph),
3. die elementaren **Funktionstypen** unterscheiden und skizzieren:
   - Polynome (linear, quadratisch, kubisch),
   - Exponential- und Logarithmusfunktion,
   - trigonometrische Funktionen (sin, cos, tan),
4. zentrale **Eigenschaften** bestimmen: Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonie, Stetigkeit,
5. die **Verkettung** $f \circ g$ berechnen und grafisch interpretieren,
6. grafische **Transformationen** (Verschiebung, Streckung, Spiegelung) anwenden,
7. die Zinseszinsformel $K(t) = K_0\, e^{rt}$ als **Anwendung** einsetzen.

Kernformeln:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(Quadr. Formel)}$$

$$e^{\ln x} = x, \quad \ln(e^x) = x \qquad \text{(Umkehrung)}$$

$$K(t) = K_0\, e^{rt} \qquad \text{(Zinseszins)}$$

Ausblick – naechste Lektionen:

- **Lektion 2:** Differentialrechnung
  $\to$ Wie schnell aendert sich f?
- **Lektion 3:** Integralrechnung
  $\to$ Welche Flaeche liegt unter f?
- **Lektion 4:** Reihen und Folgen
  $\to$ Konvergenz und Grenzwerte

Ueben Sie: Bestimmen Sie $\mathrm{dom}(f)$**, Nullstellen und Monotonie fuer** $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.