

# L01: Funktionen – Vollstaendige Vorlesung

BSc Analysis

Digital Finance

- 1 Grundbegriffe
- 2 Elementare Funktionen
- 3 Funktionseigenschaften
- 4 Operationen auf Funktionen
- 5 Injektivitaet, Surjektivitaet, Bijektivitaet
- 6 Anwendungen
- 7 Funktionen mehrerer Variablen

- 8 Vertiefung Elementare Funktionen
- 9 Grenzwerte und Stetigkeit vertieft
- 10 Weitere Anwendungen
- 11 Historischer Kontext
- 12 Beweistechniken fuer Funktionen
- 13 Fortgeschrittene Konzepte
- 14 Uebungsaufgaben

## Definition (Funktion)

Eine **Funktion**  $f: A \rightarrow B$  ist eine Vorschrift, die *jedem* Element  $x \in A$  **genau ein** Element  $y = f(x) \in B$  zuordnet.

### Begriffe:

- $A = \text{dom}(f)$ : **Definitionsbereich** (Menge aller zulaessigen Eingaben)
- $B$ : **Zielmenge** (Menge, in der die Funktionswerte liegen)
- $\text{ran}(f) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$ : **Wertebereich** (tatsaechlich angenommene Werte)
- $x$ : **Argument** (unabhaengige Variable)
- $y = f(x)$ : **Funktionswert** (abhaengige Variable)

**Beispiel:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

- $\text{dom}(f) = \mathbb{R}, \text{ran}(f) = [0, \infty)$
- $f(3) = 9, f(-2) = 4$

---

**Zentral:** Jedem  $x$  wird genau ein  $y$  zugeordnet – nicht mehrere!



1. **Explizit:**  $y = f(x) = 2x + 3$
2. **Implizit:**  $x^2 + y^2 = 1$  (definiert  $y$  *implizit* als Funktion von  $x$ )
3. **Parametrisch:**  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$
4. **Tabellarisch:**

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	3	5	7	9
5. **Graphisch:** Plot von  $(x, f(x))$

Analytisch

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2$$

Definiionsbereich:

$$D = \mathbb{R}$$

Wertebereich:

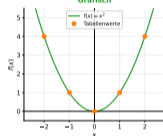
$$W = [0, \infty)$$

Darstellungsformen einer Funktion:  $f(x) = x^2$

Tabellarisch

$x$	$f(x) = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Graphisch



In der Analysis arbeiten wir meist mit der expliziten Darstellung.

## Regel

Der **maximale (natuerliche) Definitionsbereich** umfasst alle  $x \in \mathbb{R}$ , fuer die der Funktionsausdruck definiert ist.

Funktion	Einschraenkung	dom( $f$ )
$f(x) = \frac{1}{x-2}$	Nenner $\neq 0$	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$
$g(x) = \sqrt{x-1}$	Radikand $\geq 0$	$[1, \infty)$
$h(x) = \ln(x)$	Argument $> 0$	$(0, \infty)$
$k(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-4}$	$x \geq 0$ und $x \neq 4$	$[0, 4) \cup (4, \infty)$
$m(x) = \frac{1}{\ln(x)}$	$x > 0$ und $\ln(x) \neq 0$	$(0, 1) \cup (1, \infty)$

**Strategie:** Alle Einschraenkungen einzeln identifizieren, dann schneiden.

## Definition

Eine Funktion heisst **abschnittsweise definiert**, wenn sie auf verschiedenen Teilintervallen durch unterschiedliche Vorschriften gegeben ist.

**Beispiel – Betragsfunktion:**

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

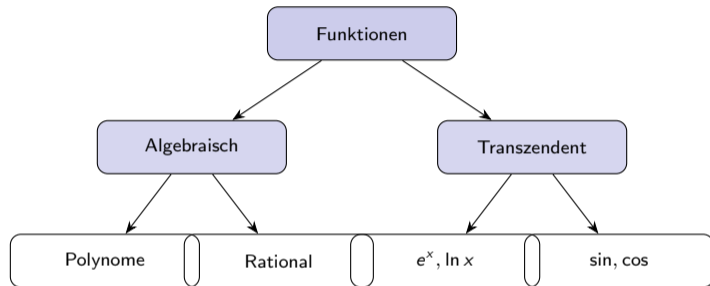
**Beispiel – Treppenfunktion (Gauss-Klammer):**

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

**Beispiel – Signumfunktion:**

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Uebergangsstellen sorgfaeltig pruefen – stimmen die Werte ueberein?



**Algebraisch:** Loesung einer Polynomgleichung (Polynome, rationale, Wurzelfkt.)

**Transzendent:** Nicht algebraisch (Exponential-, Logarithmus-, Trigonometrische Fkt.)

---

Die folgenden Abschnitte behandeln alle diese Typen im Detail.

## Definition

Ein **Polynom** vom Grad  $n$  ist eine Funktion der Form

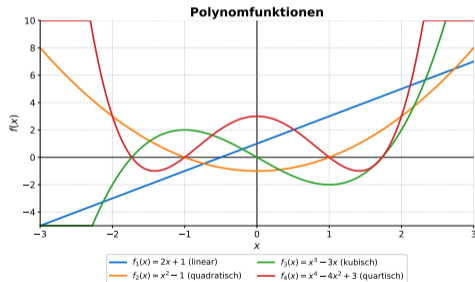
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

## Wichtige Spezialfaelle:

- $n = 0$ : Konstante Funktion  $f(x) = c$
- $n = 1$ : Lineare Funktion  $f(x) = mx + b$
- $n = 2$ : Quadratische Funktion  $f(x) = ax^2 + bx + c$
- $n = 3$ : Kubische Funktion

## Eigenschaften:

- $\text{dom}(p) = \mathbb{R}$  (immer!)
- Höchstens  $n$  reelle Nullstellen
- Endverhalten:  $a_n > 0, n$  gerade  $\Rightarrow p(x) \rightarrow +\infty$  fuer  $x \rightarrow \pm\infty$



Polynome sind die "Bausteine" der Analysis – stetig, beliebig oft differenzierbar.

## Normalform und Scheitelpunktform

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_s)^2 + y_s$$

mit Scheitelpunkt  $S = (x_s, y_s)$ , wobei  $x_s = -\frac{b}{2a}$ ,  $y_s = c - \frac{b^2}{4a}$ .

**Nullstellen** (Loesungsformel):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Diskriminante**  $D = b^2 - 4ac$ :

- $D > 0$ : Zwei verschiedene reelle Nullstellen
- $D = 0$ : Eine doppelte reelle Nullstelle
- $D < 0$ : Keine reelle Nullstelle (zwei komplexe)

**Beispiel:**  $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

- $x_s = \frac{8}{4} = 2$ ,  $y_s = 6 - \frac{64}{8} = -2$ , also  $S = (2, -2)$
- $D = 64 - 48 = 16 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{4}$ , also  $x_1 = 1, x_2 = 3$

## Exponentialfunktion

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, a \neq 1$$

Spezialfall:  $\exp(x) = e^x$  mit  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718$

## Logarithmus (Umkehrfunktion)

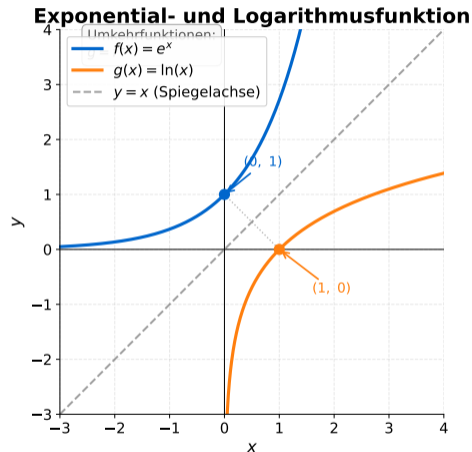
$$\log_a(x) = y \iff a^y = x$$

Spezialfall:  $\ln(x) = \log_e(x)$

### Rechenregeln:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln(x^r) = r \ln x$
- $a^x = e^{x \ln a}$

$e^x$  und  $\ln x$  sind zueinander invers:  $\ln(e^x) = x$  und  $e^{\ln x} = x$ .



## Exponentialfunktion $e^x$ :

- $\text{dom} = \mathbb{R}$ ,  $\text{ran} = (0, \infty)$
- Streng monoton steigend
- $e^0 = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- Stetig und differenzierbar
- $(e^x)' = e^x$  (einzigartig!)

## Basiswechsel:

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

---

Der Basiswechsel erlaubt es, jeden Logarithmus durch  $\ln$  auszudrücken.

## Natuerlicher Logarithmus $\ln x$ :

- $\text{dom} = (0, \infty)$ ,  $\text{ran} = \mathbb{R}$
- Streng monoton steigend
- $\ln 1 = 0$ ,  $\ln e = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$  (langsam!)
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
- Stetig und differenzierbar
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

## Definition am Einheitskreis

Für einen Winkel  $\alpha$  (im Bogenmass) auf dem Einheitskreis:

$$\cos \alpha = x\text{-Koordinate}, \quad \sin \alpha = y\text{-Koordinate}$$

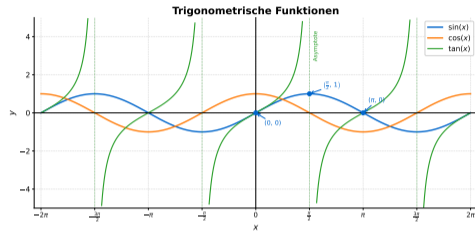
## Grundeigenschaften:

- Periode:  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ,  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- Wertebereich:  $[-1, 1]$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  (Pythagoras)
- $\sin$  ungerade,  $\cos$  gerade

## Weitere trigonometrische Funktionen:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

**Bogenmass:**  $\pi \hat{=} 180$ . In der Analysis immer Bogenmass verwenden!



## Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

### Spezialfälle:

- $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

### Wichtige Werte:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

## Definition

Eine **gebrochen-rationale Funktion** hat die Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei  $p$  und  $q$  Polynome sind und  $q$  nicht das Nullpolynom.

**Definitionsbereich:**

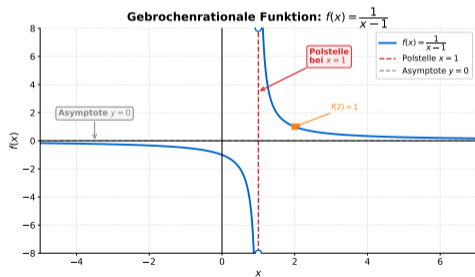
$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$$

**Asymptoten:**

- *Vertikal:* bei Nullstellen des Nenners (Polstellen)
- *Horizontal:*  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  (Grad  $p \leq$  Grad  $q$ )
- *Schraeg:* bei Grad  $p =$  Grad  $q + 1$

**Beispiel:**  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$  fuer  $x \neq 1$   
(Hebbare Luecke bei  $x = 1$ )

Immer zuerst kuerzen – hebbare Luecken von echten Polstellen unterscheiden!



## Potenzfunktionen:

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

### Fuer $n \geq 1$ :

- $n$  gerade:  $f(-x) = f(x)$  (gerade),  $\text{ran} = [0, \infty)$
- $n$  ungerade:  $f(-x) = -f(x)$  (ungerade),  $\text{ran} = \mathbb{R}$

### Fuer $n \leq -1$ :

- $\text{dom} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Polstelle bei  $x = 0$

## Wurzelfunktionen:

$$f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

- $n$  gerade:  $\text{dom} = [0, \infty)$ ,  $\text{ran} = [0, \infty)$
- $n$  ungerade:  $\text{dom} = \mathbb{R}$ ,  $\text{ran} = \mathbb{R}$

**Allgemein:**  $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$   
mit  $\text{dom} \supseteq [0, \infty)$

---

Potenz- und Wurzelfunktionen sind Spezialfaelle der allgemeinen Potenz  $x^\alpha$ .

Typ	Form	dom	ran
Konstant	$f(x) = c$	$\mathbb{R}$	$\{c\}$
Linear	$f(x) = mx + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ (fuer $m \neq 0$ )
Quadratisch	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$	abh. von $a$
Polynom (Grad $n$ )	$\sum a_k x^k$	$\mathbb{R}$	abh. von $n, a_n$
Rational	$p(x)/q(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{q = 0\}$	verschieden
Exponential	$a^x$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
Logarithmus	$\log_a x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
Sinus/Cosinus	$\sin x, \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
Tangens	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\mathbb{R}$
Wurzel	$\sqrt[n]{x}$	$[0, \infty)$ ( $n$ ger.)	$[0, \infty)$

Diese Tabelle als Nachschlagewerk nutzen – Definitions- und Wertebereiche pruefen.

## Definitionen

$f$  heisst **gerade**, falls  $f(-x) = f(x)$  fuer alle  $x \in \text{dom}(f)$ .  
 $f$  heisst **ungerade**, falls  $f(-x) = -f(x)$  fuer alle  $x \in \text{dom}(f)$ .

### Gerade Funktionen:

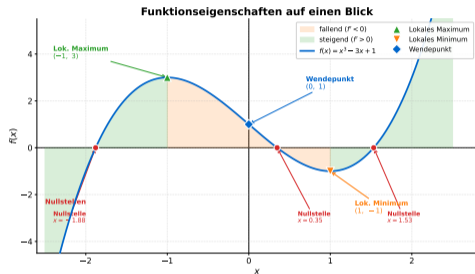
- Symmetrisch zur  $y$ -Achse
- Beispiele:  $x^2$ ,  $x^4$ ,  $|x|$ ,  $\cos x$

### Ungerade Funktionen:

- Symmetrisch zum Ursprung
- Beispiele:  $x^3$ ,  $x$ ,  $\sin x$ ,  $\tan x$

**Weder noch:**  $e^x$ ,  $x^2 + x$ ,  $\ln x$

Symmetrie erleichtert das Zeichnen und vereinfacht Integralberechnungen.



## Definition

$f$  heißt auf  $I \subseteq \text{dom}(f)$

- **(streng) monoton steigend**, falls fuer alle  $x_1 < x_2$  in  $I$ :  $f(x_1) \leq f(x_2)$  (bzw.  $<$ )
- **(streng) monoton fallend**, falls fuer alle  $x_1 < x_2$  in  $I$ :  $f(x_1) \geq f(x_2)$  (bzw.  $>$ )

## Beispiele:

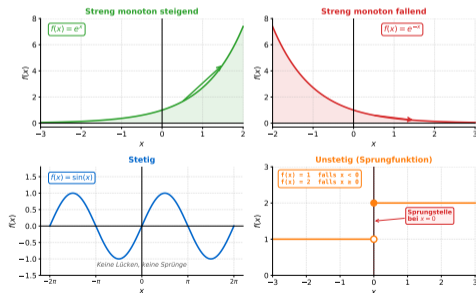
- $e^x$ : streng monoton steigend auf  $\mathbb{R}$
- $e^{-x}$ : streng monoton fallend auf  $\mathbb{R}$
- $x^2$ : fallend auf  $(-\infty, 0]$ , steigend auf  $[0, \infty)$
- $\sin x$ : steigend auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

## Zusammenhang mit Ableitung (Vorausschau):

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$  streng monoton steigend

$f'(x) < 0 \Rightarrow f$  streng monoton fallend

### Monotonie und Stetigkeit



**Streng monotone Funktionen sind injektiv – daher umkehrbar!**

## Definitionen

- $f$  ist **nach oben beschränkt**, falls ein  $M \in \mathbb{R}$  existiert mit  $f(x) \leq M$  fuer alle  $x \in \text{dom}(f)$ .
- $f$  ist **nach unten beschränkt**, falls ein  $m \in \mathbb{R}$  existiert mit  $f(x) \geq m$  fuer alle  $x \in \text{dom}(f)$ .
- $f$  ist **beschränkt**, falls nach oben und unten beschränkt.

## Extrema:

- **Globales Maximum:**  $f(x_0) \geq f(x)$  fuer alle  $x \in \text{dom}(f)$
- **Lokales Maximum:**  $f(x_0) \geq f(x)$  fuer alle  $x$  in einer Umgebung von  $x_0$

## Beispiele:

- $\sin x$ : beschränkt, globales Max. = 1, globales Min. = -1
- $e^x$ : nach unten beschränkt (durch 0), nach oben unbeschränkt
- $x^3$ : unbeschränkt (in beide Richtungen)

## Intuitive Beschreibung

Eine Funktion ist **stetig**, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, *ohne den Stift abzusetzen*.

## Formale Definition (Folgenstetigkeit)

$f$  ist stetig in  $x_0$ , falls fuer jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

## Stetige Funktionen:

- Alle Polynome,  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln x$  (auf dom)
- Summe, Produkt, Quotient (Nenner  $\neq 0$ ) stetiger Funktionen
- Verkettung stetiger Funktionen

**Unstetiges Beispiel:**  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$  (Sprung bei  $x = 0$ )

Stetigkeit ist zentral fuer den Zwischenwertsatz und Extremwertsatz.

## Definition

$f$  heisst **periodisch** mit Periode  $T > 0$ , falls

$$f(x + T) = f(x) \quad \text{fuer alle } x \in \text{dom}(f).$$

Die **kleinste** solche Periode heisst *Grundperiode*.

	<b>Funktion</b>	<b>Grundperiode</b>
<b>Beispiele:</b>	$\sin x, \cos x$	$2\pi$
	$\tan x, \cot x$	$\pi$
	$\sin(2x)$	$\pi$
	$\sin(\omega x)$	$\frac{2\pi}{\omega}$
	$ \sin x $	$\pi$

**Amplitude und Phase:**  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  mit Amplitude  $|A|$ , Kreisfrequenz  $\omega$ , Phase  $\varphi$ .

Periodische Funktionen modellieren Schwingungen, Wellen, saisonale Effekte.

## Definition

$x_0$  heisst **Nullstelle** von  $f$ , falls  $f(x_0) = 0$ .

### Methoden zur Nullstellenbestimmung:

1. **Algebraisch:** Lösungsformel (quadratisch), Faktorisierung
2. **Graphisch:** Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse
3. **Numerisch:** Bisektionsverfahren, Newton-Verfahren

### Vielfachheit:

- $p(x) = (x - x_0)^k \cdot q(x)$  mit  $q(x_0) \neq 0$ :  $x_0$  ist Nullstelle der Vielfachheit  $k$
- $k$  ungerade: Vorzeichenwechsel;  $k$  gerade: kein Vorzeichenwechsel

**Beispiel:**  $p(x) = x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$

- Nullstellen:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = -2$  (alle einfach)

Seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $D = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ .

Operation	Definition	Definitionsbereich
Summe	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$D$
Differenz	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$D$
Produkt	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D$
Quotient	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D \setminus \{x : g(x) = 0\}$
Skalar	$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$	$D$

**Beispiel:**  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \sin x$

- $(f + g)(x) = x^2 + \sin x$
- $(f \cdot g)(x) = x^2 \sin x$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{\sin x}$ ,  $\text{dom} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

## Definition

Die **Verkettung** von  $f$  und  $g$  ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

$g$  wird *zuerst* ausgewertet, dann  $f$ .

## Definitionsbereich:

$$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \text{dom}(g) \mid g(x) \in \text{dom}(f)\}$$

**Beispiel:**  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = 1 - x^2$

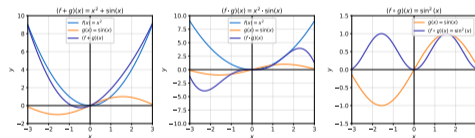
- $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\text{dom} = \{x : 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$

**Achtung:**  $f \circ g \neq g \circ f$  im Allgemeinen!

$(g \circ f)(x) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x$ ,  $\text{dom} = [0, \infty)$

Die Kettenregel (Differentialrechnung) betrifft genau diese Operation.

Operationen auf Funktionen



# Transformationen von Funktionsgraphen

Ausgehend von  $y = f(x)$ :

Transformation	Ausdruck	Wirkung
Verschiebung nach oben	$f(x) + c$	Graph um $c$ nach oben
Verschiebung nach rechts	$f(x - c)$	Graph um $c$ nach rechts
Vertikale Streckung	$c \cdot f(x)$	Faktor $c$ in $y$ -Richtung
Horizontale Stauchung	$f(c \cdot x)$	Faktor $\frac{1}{c}$ in $x$ -Richtung
Spiegelung an $x$ -Achse	$-f(x)$	$y$ -Werte negieren
Spiegelung an $y$ -Achse	$f(-x)$	$x$ -Werte negieren

**Beispiel:** Von  $y = x^2$  zu  $y = 2(x - 3)^2 + 1$ :

1. Verschiebung um 3 nach rechts:  $y = (x - 3)^2$
2. Vertikale Streckung um Faktor 2:  $y = 2(x - 3)^2$
3. Verschiebung um 1 nach oben:  $y = 2(x - 3)^2 + 1$

**Merke:** Aenderungen "am  $x$ " wirken horizontal und gegenlauffig!

## Definitionen

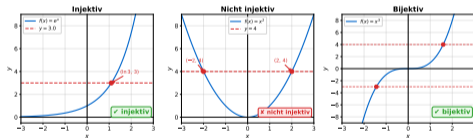
Sei  $f: A \rightarrow B$  eine Funktion.

- $f$  ist **injektiv**, falls  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .
- $f$  ist **surjektiv**, falls  $\text{ran}(f) = B$  (jedes  $b \in B$  wird getroffen).
- $f$  ist **bijektiv**, falls injektiv und surjektiv.

$f$	inj.	surj.	bij.
$x^2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	×	×	×
$x^2: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$	✓	✓	✓
$e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	✓	×	×
$e^x: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$	✓	✓	✓
$\sin x: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$	×	✓	×

Beispiele:

Injektivitaet und Bijektivitaet



Bijektivitaet ist Voraussetzung fuer die Existenz einer Umkehrfunktion.

## Satz

Ist  $f: A \rightarrow B$  bijektiv, so existiert die **Umkehrfunktion**

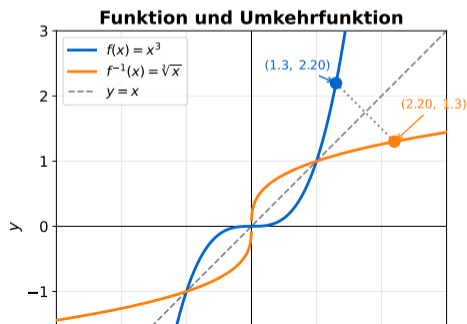
$$f^{-1}: B \rightarrow A \quad \text{mit} \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

### Eigenschaften:

- $f^{-1}(f(x)) = x$  und  $f(f^{-1}(y)) = y$
- Graph von  $f^{-1}$  entsteht durch Spiegelung an  $y = x$
- $\text{dom}(f^{-1}) = \text{ran}(f)$ ,  $\text{ran}(f^{-1}) = \text{dom}(f)$

### Wichtige Umkehrfunktionen:

$f$	$f^{-1}$
$e^x$	$\ln x$
$x^2$ ( $x \geq 0$ )	$\sqrt{x}$
$\sin x$ ( $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ )	$\arcsin x$
$\cos x$ ( $[0, \pi]$ )	$\arccos x$
$\tan x$ ( $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ )	$\arctan x$



**Problem:** Viele Funktionen sind nicht injektiv auf ganz  $\mathbb{R}$ .

**Loesung:** Definitionsbereich einschraenken, um Bijektivitaet herzustellen.

**Beispiel**  $f(x) = x^2$ :

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist *nicht* injektiv ( $f(2) = f(-2) = 4$ )
- $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  ist bijektiv, Umkehrfunktion  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
- $f: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$  ist ebenfalls bijektiv, Umkehrfunktion  $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

**Beispiel**  $f(x) = \sin x$ :

- $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  ist surjektiv aber nicht injektiv
- $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  ist bijektiv
- Umkehrfunktion:  $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

---

Die Wahl der Einschraenkung ist konventionsabhaengig – Hauptzweig beachten.

## Modell

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$$

$k > 0$ : exponentielles Wachstum,  $k < 0$ : exponentieller Zerfall.

### Beispiel – Zinseszins:

Kapital  $K(t) = K_0 \cdot (1 + r)^t$  mit Zinssatz  $r$ .

Stetige Verzinsung:  $K(t) = K_0 \cdot e^{rt}$ .

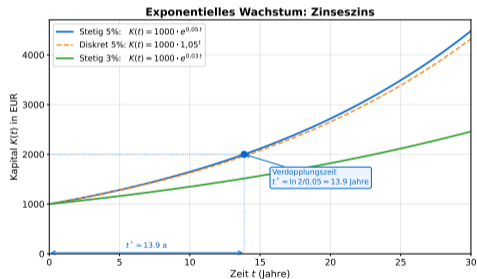
### Beispiel – Radioaktiver Zerfall:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\text{Halbwertszeit: } t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

### Verdopplungszeit:

$$t_d = \frac{\ln 2}{k}$$



Exponentielles Wachstum ist auf Dauer unrealistisch – begrenzte Ressourcen!

## Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen:

- **Kostenfunktion:**  $K(x) = K_f + K_v(x)$  (fixe + variable Kosten)
- **Erlösfunktion:**  $E(x) = p(x) \cdot x$  (Preis mal Menge)
- **Gewinnfunktion:**  $G(x) = E(x) - K(x)$

**Beispiel:**  $K(x) = 100 + 5x + 0,01x^2$ ,  $p = 15$  (Festpreis)

- $E(x) = 15x$
- $G(x) = 15x - 100 - 5x - 0,01x^2 = -0,01x^2 + 10x - 100$
- Break-Even:  $G(x) = 0 \Rightarrow x \approx 10,1$  oder  $x \approx 989,9$

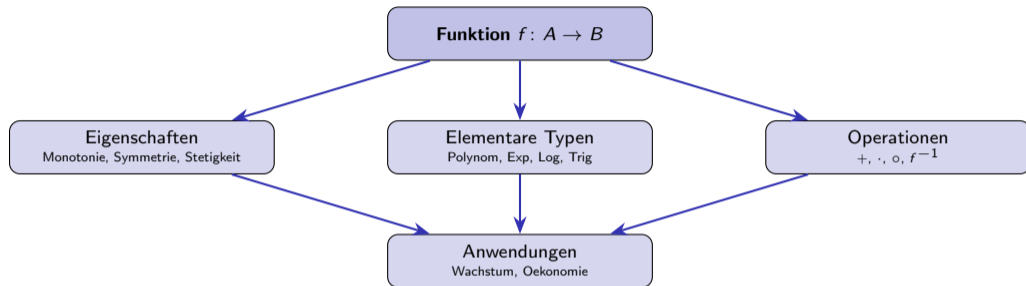
**Nachfragefunktion:**  $D(p) = a - bp$  (linear, fallend)

**Angebotsfunktion:**  $S(p) = c + dp$  (linear, steigend)

Gleichgewicht:  $D(p^*) = S(p^*) \Rightarrow p^* = \frac{a-c}{b+d}$

---

**Verkettung:** Gewinn =  $E(x(t)) - K(x(t))$  – Funktionskomposition in der Praxis.



## Kernkompetenzen nach Abschnitt 1–6:

1. Definitionsbereich und Wertebereich bestimmen
2. Elementare Funktionen erkennen und anwenden
3. Eigenschaften (Symmetrie, Monotonie, Stetigkeit) prüfen
4. Funktionen verknüpfen und transformieren
5. Umkehrfunktionen bestimmen

## Definition

Eine **Funktion mehrerer Variablen** ist eine Abbildung

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

**Spezialfall**  $n = 2$ :  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y)$

**Beispiele:**

- Temperatur auf einer Platte:  $T(x, y)$  – jedem Punkt  $(x, y)$  wird eine Temperatur zugeordnet
- Kosten abhaengig von zwei Inputfaktoren:  $K(x_1, x_2)$
- Nutzenfunktion:  $U(x_1, x_2) = x_1^{0.4} \cdot x_2^{0.6}$

**Definitionsbereich:**

- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ :  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  (Einheitskreisscheibe)
- $f(x, y) = \ln(x) + \ln(y)$ :  $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$  (1. Quadrant)

---

Von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{R}^n$ : Definitionsbereich wird zur Teilmenge der Ebene (oder des Raums).

# Hoehenlinien (Contour Plots)

## Definition

Die **Hoehenlinie** (Niveaulinie) zum Wert  $c$  von  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$N_c = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}.$$

## Interpretation:

- Punkte gleicher "Hoehe" (gleicher Funktionswert)
- Analog zu Hoehenlinien auf Landkarten
- Enge Linien = steiler Anstieg, weite Linien = flach

**Beispiel:**  $f(x, y) = x^2 + y^2$

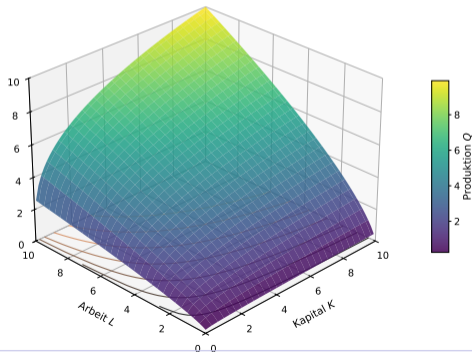
- $N_c$ : Kreise mit Radius  $\sqrt{c}$
- $c = 1$ : Einheitskreis
- $c = 4$ : Kreis mit Radius 2

**Beispiel:**  $f(x, y) = x \cdot y$

- $N_c$ : Hyperbeln  $y = c/x$

**Cobb-Douglas Produktionsfunktion**

$$Q(K, L) = K^{0.3} \cdot L^{0.7}$$



Hoehenlinien sind Isoquanten (Oekonomie), Isobaren (Meteorologie), Aequipotentiallinien (Physik).

## Definition

Die **Cobb-Douglas-Produktionsfunktion** ist

$$Q(K, L) = A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha},$$

mit  $A > 0$  (Technologieparameter),  $0 < \alpha < 1$ ,  $K = \text{Kapital}$ ,  $L = \text{Arbeit}$ .

## Eigenschaften:

- **Konstante Skalenerträge:**  $Q(\lambda K, \lambda L) = \lambda \cdot Q(K, L)$  fuer  $\lambda > 0$
- **Positive, abnehmende Grenzerträge:**
  - $\frac{\partial Q}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} > 0$  (mehr Kapital  $\rightarrow$  mehr Output)
  - $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0$  (abnehmender Grenzertrag)
- **Isoquanten:**  $K = \left(\frac{Q_0}{AL^{1-\alpha}}\right)^{1/\alpha}$  – konvex, fallend

**Zahlenbeispiel:**  $Q(K, L) = 10K^{0,3}L^{0,7}$ ,  $K = 100$ ,  $L = 200$ :

$$Q = 10 \cdot 100^{0,3} \cdot 200^{0,7} \approx 10 \cdot 7,94 \cdot 52,78 \approx 4191$$

$\alpha$  misst den Anteil des Kapitals am Gesamtertrag,  $(1 - \alpha)$  den Arbeitsanteil.

**Visualisierung von  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :**

1. **3D-Graph:** Flaechе im  $\mathbb{R}^3$  mit Punkten  $(x, y, f(x, y))$
2. **Hoehenlinien:** 2D-Projektion (Contour Plot)
3. **Schnitte:**
  - $x = c$  fixiert: Schnittkurve  $g(y) = f(c, y)$  (Funktion einer Variablen)
  - $y = c$  fixiert: Schnittkurve  $h(x) = f(x, c)$  (Funktion einer Variablen)

**Beispiel:**  $f(x, y) = x^2 + y^2$  (Paraboloid)

- Schnitt  $y = 0$ :  $f(x, 0) = x^2$  (Parabel)
- Schnitt  $x = 1$ :  $f(1, y) = 1 + y^2$  (nach oben verschobene Parabel)
- Hoehenlinien: konzentrische Kreise

**Beispiel:**  $f(x, y) = x^2 - y^2$  (Sattelpunkt bei Ursprung)

- Schnitt  $y = 0$ : Parabel nach oben; Schnitt  $x = 0$ : Parabel nach unten

---

Schnitte reduzieren mehrdimensionale Probleme auf bekannte 1D-Funktionen.

### Definition (Vorausschau auf Differentialrechnung)

Die **partielle Ableitung** von  $f(x, y)$  nach  $x$  ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Man leitet nach  $x$  ab und behandelt  $y$  als *Konstante* (und umgekehrt).

**Beispiel:**  $f(x, y) = 3x^2y + y^3$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy$  ( $y^3$  faellt weg, da bezueglich  $x$  konstant)
- $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2$

**Gradient:**

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs.

---

Partielle Ableitungen werden in Lektion 2 (Differentialrechnung) vertieft.

## Ziel

Jede echt gebrochen-rationale Funktion  $\frac{p(x)}{q(x)}$  (mit  $\deg p < \deg q$ ) lässt sich als **Summe einfacher Brüche** schreiben – die sogenannte **Partialbruchzerlegung**.

## Wozu?

- Integration gebrochen-rationaler Funktionen (Lektion 3)
- Laplace-Ruecktransformation (Ingenieurwissenschaften)
- Vereinfachung algebraischer Ausdruecke

## Grundansatz fuer reelle, einfache Nullstellen:

Falls  $q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ , dann:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Die Konstanten  $A_1, \dots, A_n$  werden durch Koeffizientenvergleich oder Einsetzen bestimmt.

**Voraussetzung:** Zaehlergrad < Nennergrad. Sonst zuerst Polynomdivision!

**Aufgabe:** Zerlege  $\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)}$ .

**Ansatz:**

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

**Schritt 1:** Beide Seiten mit  $(x-1)(x+2)$  multiplizieren:

$$3x+5 = A(x+2) + B(x-1)$$

**Schritt 2:** Einsetzen spezieller Werte:

- $x = 1: 8 = 3A \Rightarrow A = \frac{8}{3}$
- $x = -2: -1 = -3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

**Ergebnis:**

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{8/3}{x-1} + \frac{1/3}{x+2}$$

**Probe:**  $\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{8(x+2)+(x-1)}{3(x-1)(x+2)} = \frac{9x+15}{3(x-1)(x+2)} = \frac{3x+5}{(x-1)(x+2)} \checkmark$

## Definitionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

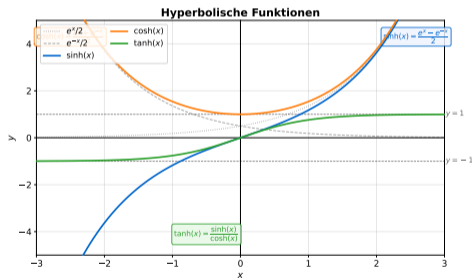
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

## Eigenschaften:

- $\sinh$ : ungerade, streng monoton steigend,  $\text{ran} = \mathbb{R}$
- $\cosh$ : gerade, Minimum bei  $\cosh(0) = 1$ ,  $\text{ran} = [1, \infty)$
- $\tanh$ : ungerade, streng monoton steigend,  $\text{ran} = (-1, 1)$

## Ableitungen:

- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$



Der Name "hyperbolisch" kommt daher, dass  $(\cosh t, \sinh t)$  auf der Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1$  liegt.

## Fundamentale Identität

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

**Beweis:**

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

**Weitere Identitäten:**

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
- $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$
- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1$

**Vergleich mit Trigonometrie:**

$$\begin{array}{ll} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 & \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \\ \sin(2x) = 2 \sin x \cos x & \sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x \end{array}$$

## Einschraenkung und Umkehrung:

Funktion	Einschraenkung	Umkehrung	dom(Umk.)
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$	$\arcsin x$	$[-1, 1]$
$\cos x$	$[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$	$\arccos x$	$[-1, 1]$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

## Wichtige Werte:

- $\arcsin(0) = 0$ ,  $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$
- $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\arccos(1) = 0$
- $\arctan(0) = 0$ ,  $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

**Beziehung:**  $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$  fuer alle  $x \in [-1, 1]$ .

**Ableitungen:**  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Die Arcusfunktionen geben den Winkel zu einem gegebenen Funktionswert zurueck.

## Satz

Die Funktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist der **natuerliche Logarithmus**  $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Beweis der Bijektivitaet von $\exp$ :

*Injektivitaet:* Sei  $e^a = e^b$ . Da  $\exp$  streng monoton steigend ( $(\exp)' = \exp > 0$ ), folgt  $a = b$ .

*Surjektivitaet:* Fuer jedes  $y > 0$  muessen wir  $x \in \mathbb{R}$  mit  $e^x = y$  finden.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$
- $e^x$  ist stetig
- Zwischenwertsatz: Jedes  $y \in (0, \infty)$  wird angenommen. ✓

### Zusammenfassung:

$$\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{\ln y} = y \quad \forall y > 0.$$

### Konsequenz fuer die Ableitung:

Aus  $e^{\ln y} = y$  folgt mit der Kettenregel:  $e^{\ln y} \cdot (\ln y)' = 1$ , also  $(\ln y)' = \frac{1}{y}$ .

---

Dieser Nachweis nutzt Stetigkeit und den Zwischenwertsatz – beides wird in Abschnitt 9 vertieft.

Fuer beliebige Basis  $a > 0, a \neq 1$ :

$$a^x = e^{x \ln a}, \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

	Basis	Name	Verwendung
Wichtige Basen:	$e \approx 2,718$	Natuerlicher Log. (ln)	Analysis, stetige Modelle
	10	Dekadischer Log. (lg)	Naturwissenschaften, dB-Skala
	2	Binaerer Log. (ld)	Informatik

Ableitung:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Beispiel – pH-Wert:  $\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+] = -\frac{\ln[\text{H}^+]}{\ln 10}$

In der Analysis bevorzugen wir  $e$  und  $\ln$  – Ableitungen werden einfacher.

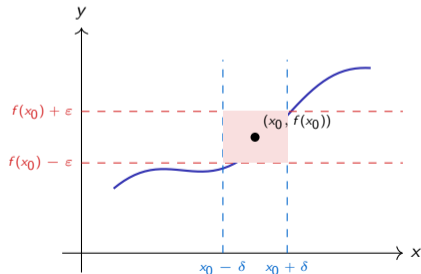
## Definition ( $\varepsilon$ - $\delta$ -Stetigkeit)

$f$  ist **stetig** in  $x_0$ , falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom}(f) : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

**Anschaulich:**

- Egal wie eng das "Toleranzband"  $\varepsilon$  um  $f(x_0)$  ist ...
- ... es gibt immer eine Umgebung  $\delta$  um  $x_0$ , sodass alle Funktionswerte innerhalb des Toleranzbands liegen.



## Beispiel: Beweis der Stetigkeit von $f(x) = 2x + 1$

### Behauptung

$f(x) = 2x + 1$  ist stetig in jedem  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wir müssen  $\delta > 0$  finden mit

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

**Abschaetzung:**

$$|f(x) - f(x_0)| = |(2x + 1) - (2x_0 + 1)| = |2x - 2x_0| = 2|x - x_0|.$$

**Wahl von  $\delta$ :** Setze  $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ .

**Dann gilt:** Falls  $|x - x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ :

$$|f(x) - f(x_0)| = 2|x - x_0| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

**Schema fuer  $\varepsilon$ - $\delta$ -Beweise:**

1.  $|f(x) - f(x_0)|$  vereinfachen (Terme mit  $|x - x_0|$  isolieren)
2.  $\delta$  in Abhaengigkeit von  $\varepsilon$  waehlen
3. Verifizieren, dass  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Lineare Funktionen sind "einfach" stetig – bei nichtlinearen ist die  $\delta$ -Wahl trickreicher.

## Satz (Zwischenwertsatz von Bolzano)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(a) \neq f(b)$ . Dann nimmt  $f$  jeden Wert  $c$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an, d.h. es existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f(\xi) = c$ .

### Spezialfall (Nullstellensatz):

Ist  $f$  stetig auf  $[a, b]$  mit  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (Vorzeichenwechsel), so existiert mindestens eine Nullstelle  $\xi \in (a, b)$ .

**Beispiel:**  $f(x) = x^3 - x - 1$  auf  $[1, 2]$ :

- $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$
- $f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0$
- $\Rightarrow$  Es existiert  $\xi \in (1, 2)$  mit  $f(\xi) = 0$ .

### Anwendung – Bisektionsverfahren:

1. Intervallmitte  $m = \frac{a+b}{2}$  berechnen
2. Vorzeichenwechsel in  $[a, m]$  oder  $[m, b]$ ?
3. Intervall halbieren und wiederholen

---

Der ZWS garantiert Existenz, sagt aber nichts ueber Eindeutigkeit der Nullstelle.

## Klassifikation

Sei  $f$  unstetig in  $x_0$ . Man unterscheidet:

### 1. Hebbare Unstetigkeit:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existiert, aber } \neq f(x_0)$$

Beispiel:  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  bei  $x_0 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , aber  $f(1)$  undefiniert.

### 2. Sprungstelle:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Beide einseitige Grenzwerte existieren.

Beispiel:  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$  bei  $x_0 = 0$

### 3. Wesentliche Unstetigkeit:

Mindestens ein einseitiger Grenzwert existiert *nicht* (auch nicht als  $\pm\infty$ ).

Beispiel:  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  bei  $x_0 = 0$

- Für  $x \rightarrow 0$  oszilliert  $\sin(1/x)$  unendlich schnell zwischen  $-1$  und  $1$
- Kein Grenzwert vorhanden
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$  existiert nicht

**Vergleich:**  $g(x) = x \sin(1/x)$  bei  $x_0 = 0$ :

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$  (hebbar!)

Hebbare Unstetigkeiten kann man "reparieren", Sprung- und wesentliche nicht.

## Extremwertsatz (Weierstrass)

Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf einem abgeschlossenen Intervall, so nimmt  $f$  auf  $[a, b]$  ein **Maximum** und ein **Minimum** an.

**Voraussetzungen sind wichtig:**

- $f(x) = \frac{1}{x}$  auf  $(0, 1]$ : stetig, aber kein Maximum (unbeschränkt)
- $f(x) = x$  auf  $(0, 1)$ : stetig, aber weder Max noch Min werden angenommen
- $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ : unstetig,  $\sup = 1$  wird nicht angenommen

## Satz über Verkettung

Sind  $f$  und  $g$  stetig, so ist auch  $f \circ g$  stetig.

**Konsequenz:**  $e^{\sin x}$ ,  $\ln(x^2 + 1)$ ,  $\sin(\cos(x))$  – alle stetig auf ihrem Definitionsbereich.

---

Stetig + abgeschlossenes Intervall = garantierte Existenz von Extrema.

## Modell

$$f(t) = \frac{L}{1 + e^{-k(t-t_0)}}$$

$L$ : Sättigungsgrenze (Kapazität),  $k > 0$ : Wachstumsrate,  $t_0$ : Wendepunkt.

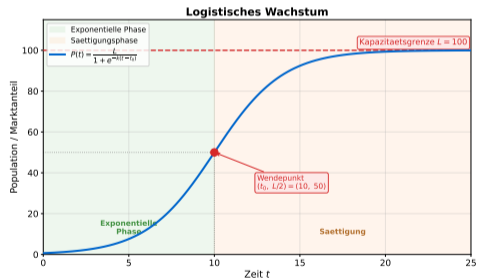
### Eigenschaften:

- $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$  (Anfang)
- $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L$  (Sättigung)
- $f(t_0) = L/2$  (Wendepunkt)
- S-förmiger (sigmoider) Verlauf

### Anwendungen:

- **Epidemiologie:** Ausbreitung von Infektionskrankheiten
- **Marketing:** Marktdurchdringung neuer Produkte
- **Biologie:** Populationswachstum mit Kapazitätsgrenze
- **Machine Learning:** Sigmoid-Aktivierungsfunktion

Logistisch = exponentielles Wachstum mit "Bremsen" – realistischer als rein exponentiell.



**Szenario:** Marktdurchdringung eines neuen Smartphones.

Parameter:  $L = 1\,000\,000$  (potenzielle Käufer),  $k = 0,5$ ,  $t_0 = 10$  (Monate).

$$N(t) = \frac{1\,000\,000}{1 + e^{-0,5(t-10)}}$$

$t$ (Monate)	$N(t)$	Phase
0	$\approx 6\,693$	Frühe Adoptierer
5	$\approx 75\,858$	Wachstumsphase
10	500 000	Wendepunkt
15	$\approx 924\,142$	Sättigungsphase
20	$\approx 993\,307$	Fast gesättigt

**Vergleich mit exponentiellem Wachstum:**

Exponentiell:  $N(t) = 6\,693 \cdot e^{0,5t}$  – bei  $t = 20$  wäre  $N \approx 145\,000\,000$  (unrealistisch!).

Die logistische Funktion modelliert das “Abbremsen” bei Annäherung an die Kapazitätsgrenze.

## Allgemeine harmonische Schwingung

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

A: Amplitude,  $\omega$ : Kreisfrequenz,  $\varphi$ : Phasenverschiebung.

### Kenngroessen:

- Periode:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Frequenz:  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  (in Hz)
- Maximalausschlag:  $|A|$

### Beispiel – Federpendel:

Masse  $m$  an Feder mit Federkonstante  $k$ :  $x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$

Fuer  $m = 0,5 \text{ kg}$ ,  $k = 200 \text{ N/m}$ :  $\omega = \sqrt{400} = 20 \text{ s}^{-1}$ ,  $T \approx 0,31 \text{ s}$ .

**Ueberlagerung (Superposition):**  $x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)$

Bei  $\omega_1 \approx \omega_2$ : Schwebung (langsame Amplitudenmodulation).

---

Harmonische Schwingungen = Grundbaustein der Fourier-Analysis.

## Motivation

Der **Black-Scholes-Preis** einer europäischen Call-Option zeigt, wie Verkettung und Komposition in der Finanzwelt auftreten.

$$C(S, t) = S \cdot \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2)$$

mit den **verketteten Funktionen**:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

**Beteiligte elementare Funktionen:**

- $\ln(S/K)$ : Logarithmus (Verhaeltnis Aktienkurs zu Ausuebungspreis)
- $e^{-r(T-t)}$ : Exponentialfunktion (Diskontierung)
- $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$ : kumulative Normalverteilung (Integral ueber  $e^x$ )
- $\sqrt{T - t}$ : Wurzelfunktion (Zeitskalierung der Volatilitaet)

Black-Scholes 1973 – ein Meilenstein der mathematischen Finanzwissenschaft.

## Historische Entwicklung

Der Funktionsbegriff hat sich ueber Jahrhunderte entwickelt – von konkreten Kurven zu abstrakten Zuordnungen.



- **Leibniz (1694):** Praegte den Begriff "functio" fuer Groessen, die von einer Kurve abhaengen.
- **Euler (1748):** Funktion = analytischer Ausdruck:  $f(x) = \sum a_n x^n$ ,  $\sin x$ ,  $e^x$ , etc.
- **Dirichlet (1837):** Moderne Definition – *beliebige* eindeutige Zuordnung, kein Ausdruck noetig.

Dirichlets Definition erlaubt Funktionen wie  $1_{\mathbb{Q}}$  – ohne geschlossene Formel.

## Die $f(x)$ -Notation

Die heute selbstverstaendliche Schreibweise  $f(x)$  hat eine lange Entstehungsgeschichte.

### Wichtige Meilensteine der Notation:

- **Leibniz (1694)**: Verwendete Buchstaben wie  $X, Y$  fuer abhaengige Groessen, “functio” als Oberbegriff.
- **Johann Bernoulli (1718)**: Schrieb  $\varphi x$  fuer eine Funktion von  $x$  – noch ohne Klammern.
- **Euler (1734)**: Fuehrte  $f(x)$  ein – die Klammer-Notation, die wir heute verwenden.
- **Euler (1748)**: Systematische Verwendung in *Introductio in analysin infinitorum*.
- **Lagrange (1797)**:  $f'(x)$  fuer die Ableitung (“Lagrange-Notation”).
- **Leibniz**:  $\frac{dy}{dx}$  fuer die Ableitung (“Leibniz-Notation”).

### Moderne Konventionen:

- $f, g, h$  fuer allgemeine Funktionen;  $p, q$  fuer Polynome
- $x, y, z$  fuer Variablen;  $a, b, c$  fuer Konstanten
- $f: A \rightarrow B$  mit Pfeilnotation (Bourbaki, ab ca. 1935)
- $x \mapsto f(x)$  fuer die Zuordnungsvorschrift

---

Eulers  $f(x)$ -Notation ist eine der erfolgreichsten Notationen der gesamten Mathematik.

# Warum abstrahieren? Von Kurven zu Abbildungen

**Motivation:** Warum genuegt Eulers “analytischer Ausdruck” nicht?

## 1. Fouriers Entdeckung (1807/1822):

- Jede “vernuenftige” Funktion laesst sich als Fourier-Reihe darstellen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- Auch *unstetige* Funktionen (z.B. Rechteckwelle) sind darstellbar – aber was *ist* dann eine Funktion?

## 2. Dirichlets Funktion (1829):

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- Ueberall unstetig, kein Graph im klassischen Sinn zeichnenbar.
- Kein “analytischer Ausdruck” – und trotzdem eine wohldefinierte Funktion!

## 3. Konsequenz fuer die moderne Analysis:

- Funktion = *Zuordnung*, nicht *Formel*.
- Erlaubt allgemeine Raeume:  $f: X \rightarrow Y$  mit beliebigen Mengen  $X, Y$ .
- Grundlage fuer Funktionalanalysis, Masstheorie, moderne Stochastik.

---

Die Abstraktion oeffnete die Tuer zu moderner Mathematik – auf Kosten der Anschauung.

# Direkter Beweis: Injektivitaet zeigen

## Methode

Um  $f: A \rightarrow B$  als **injektiv** zu beweisen, zeigt man:

$$f(a) = f(b) \implies a = b \quad \text{fuer alle } a, b \in A.$$

**Beispiel:** Zeige, dass  $f(x) = 2x + 3$  injektiv ist.

**Beweis (Schritt fuer Schritt):**

1. **Annahme:** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $f(a) = f(b)$ .
2. **Einsetzen:**  $2a + 3 = 2b + 3$ .
3. **Vereinfachen:**  $2a = 2b$  (Subtraktion von 3).
4. **Schluss:**  $a = b$  (Division durch 2).

□

**Gegenbeispiel:**  $g(x) = x^2$  ist *nicht* injektiv auf  $\mathbb{R}$ :

- $g(2) = g(-2) = 4$ , aber  $2 \neq -2$ . (Ein Gegenbeispiel genuegt!)

**Allgemeines Schema fuer direkte Beweise:**

1. Annahme:  $f(a) = f(b)$
2. Definition von  $f$  einsetzen
3. Algebraisch umformen bis  $a = b$  folgt

**Alternativ:** Strenge Monotonie impliziert Injektivitaet – oft der einfachere Weg.

## Methode

Um zu zeigen, dass  $f: A \rightarrow B$  **nicht surjektiv** ist, findet man ein  $y_0 \in B$ , fuer das *kein*  $x \in A$  mit  $f(x) = y_0$  existiert.

**Beispiel:** Zeige, dass  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , nicht surjektiv ist.

**Beweis (Widerspruch):**

1. **Waehle**  $y_0 = -1 \in \mathbb{R}$  (Zielmenge).
2. **Annahme zum Widerspruch:** Es existiert  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit  $f(x_0) = -1$ .
3. **Einsetzen:**  $x_0^2 = -1$ .
4. **Widerspruch:** Fuer jedes  $x_0 \in \mathbb{R}$  gilt  $x_0^2 \geq 0 > -1$ .  $\Rightarrow \Leftarrow$
5. **Schluss:**  $y_0 = -1$  hat kein Urbild, also ist  $f$  nicht surjektiv. □

**Vergleich der Beweisstrategien:**

Ziel	Methode	Aufwand
$f$ ist injektiv	Direkt: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$	Fuer <i>alle</i> $a, b$
$f$ ist <i>nicht</i> injektiv	Gegenbeispiel: $a \neq b$ , $f(a) = f(b)$	Ein Paar genuegt
$f$ ist surjektiv	Fuer jedes $y \in B$ : Loese $f(x) = y$	Fuer <i>alle</i> $y$
$f$ ist <i>nicht</i> surjektiv	Gegenbeispiel: $y_0$ ohne Urbild	Ein $y_0$ genuegt

Widerspruchsbeweise sind besonders nuetzlich fuer Nichtexistenz-Aussagen.

## Prinzip der vollstaendigen Induktion

Sei  $A(n)$  eine Aussage fuer  $n \in \mathbb{N}$ . Falls:

1. **Induktionsanfang:**  $A(1)$  gilt, und
2. **Induktionsschritt:**  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$  fuer alle  $n \geq 1$ ,

dann gilt  $A(n)$  fuer alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beispiel:** Beweise die Summenformel  $S(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**Induktionsanfang** ( $n = 1$ ):  $S(1) = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \checkmark$

**Induktionsschritt** ( $n \rightarrow n+1$ ): Angenommen,  $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$  gilt.

$$\begin{aligned} S(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=1}^n k}_{= \frac{n(n+1)}{2} \text{ (IV)}} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

**Fazit:** Die Funktionsidentitaet  $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$  gilt fuer alle  $n \in \mathbb{N}$ . □

Induktion beweist Aussagen ueber abzaehlbar viele Faelle – nicht nur fuer Summen, auch fuer Rekursionen

## Vorlage fuer $\varepsilon$ - $\delta$ -Beweise

**Ziel:** Zeige  $f$  stetig in  $x_0$ , d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

**Beispiel:** Beweise Stetigkeit von  $f(x) = x^2$  in  $x = a$ .

**Schritt 1 – Abschaetzung:**

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a|.$$

**Schritt 2 –  $|x + a|$  kontrollieren:**

Falls  $|x - a| < 1$ , dann  $|x| < |a| + 1$ , also  $|x + a| \leq |x| + |a| < 2|a| + 1$ .

**Schritt 3 – Delta waehlen:**

$$\delta := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|a| + 1}\right).$$

**Schritt 4 – Verifikation:** Falls  $|x - a| < \delta$ :

$$|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a| < \frac{\varepsilon}{2|a| + 1} \cdot (2|a| + 1) = \varepsilon. \quad \square$$

**Allgemeines Rezept:**

1.  $|f(x) - f(x_0)|$  umschreiben, sodass Faktor  $|x - x_0|$  erscheint.
2. Restliche Faktoren nach oben abschaetzen (ggf. mit Hilfsannahme  $|x - x_0| < 1$ ).
3.  $\delta = \min(1, \varepsilon/\text{Schranke})$  waehlen.

Das  $\min(1, \dots)$  sichert gleichzeitig die Hilfsannahme und die  $\varepsilon$ -Schranke.

## Definition

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **gleichmaessig stetig** auf  $D$ , falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D: |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

## Unterschied zur punktwisen Stetigkeit:

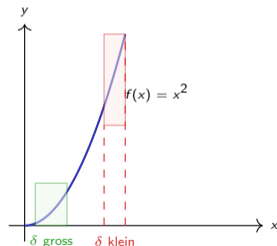
- *Punktweise*:  $\delta$  darf von  $x_0$  und  $\varepsilon$  abhaengen.
- *Gleichmaessig*:  $\delta$  haengt *nur* von  $\varepsilon$  ab – gilt fuer *alle* Punkte gleichzeitig.

**Beispiel 1:**  $f(x) = x^2$  auf  $\mathbb{R}$  ist *nicht* gleichmaessig stetig.

- Fuer grosse  $|a|$  braucht man immer kleineres  $\delta$ .
- Waehle  $x_n = n + \frac{1}{n}$ ,  $y_n = n$ :  
 $|f(x_n) - f(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2$ , aber  $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

**Beispiel 2:**  $f(x) = x^2$  auf  $[0, 1]$  ist gleichmaessig stetig.

- Abgeschlossenes Intervall + stetig  $\implies$  gleichmaessig stetig (Satz von Heine).



**Satz von Heine:** Stetig auf  $[a, b]$  (kompakt)  $\implies$  gleichmaessig stetig.

Gleiches  $\varepsilon$  erfordert verschiedene  $\delta$  je nach Position.

## Definition

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **Lipschitz-stetig** mit Konstante  $L \geq 0$ , falls:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \text{fuer alle } x, y \in D.$$

Die kleinste solche Konstante heisst **Lipschitz-Konstante** von  $f$ .

**Hierarchie der Stetigkeitsbegriffe:**

$$\text{Lipschitz-stetig} \implies \text{gleichmaessig stetig} \implies \text{stetig}$$

Die Umkehrungen gelten *nicht* im Allgemeinen!

	<b>Funktion</b>	<b>Lipschitz?</b>	<b>Konstante <math>L</math></b>	<b>Begrueundung</b>
<b>Beispiele:</b>	$\sin x$	Ja	$L = 1$	$ \sin x - \sin y  \leq  x - y $ (MWS)
	$ x $	Ja	$L = 1$	$  x  -  y   \leq  x - y $
	$x^2$ auf $[0, 1]$	Ja	$L = 2$	$ x^2 - y^2  \leq 2 x - y $
	$x^2$ auf $\mathbb{R}$	Nein	–	Kein endliches $L$ moeglich
	$\sqrt{x}$ auf $[0, 1]$	Nein	–	$ \sqrt{x} - \sqrt{0} / x - 0  = 1/\sqrt{x} \rightarrow \infty$

**Zusammenhang mit Ableitung:**

Falls  $f$  differenzierbar ist und  $|f'(x)| \leq L$  fuer alle  $x$ , dann ist  $f$  Lipschitz-stetig mit Konstante  $L$  (Mittelwertsatz).

Lipschitz-Stetigkeit kontrolliert die maximale "Steigung" – wichtig fuer Differentialgleichungen.

# Fixpunktsatz von Banach

## Satz (Banachscher Fixpunktsatz, vereinfacht fuer $\mathbb{R}$ )

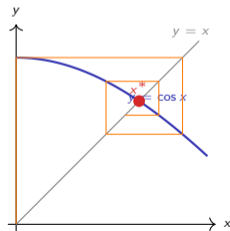
Sei  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  eine **Kontraktion**, d.h. es existiert  $0 \leq q < 1$  mit

$$|f(x) - f(y)| \leq q \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Dann besitzt  $f$  genau einen **Fixpunkt**  $x^* \in [a, b]$  mit  $f(x^*) = x^*$ , und die Iteration  $x_{n+1} = f(x_n)$  konvergiert fuer jeden Startwert  $x_0 \in [a, b]$  gegen  $x^*$ .

**Beispiel:**  $f(x) = \cos(x)$  auf  $[0, 1]$ .

- $|\cos'(x)| = |\sin x| \leq \sin(1) \approx 0,84 < 1 \checkmark$
- Fixpunkt:  $x^* \approx 0,7391$  (Dottie-Zahl)
- Iteration:  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 0,540, x_3 = 0,858, \dots$



Spinnwebdiagramm (Cobweb): Konvergenz gegen  $x^*$ .

Der Fixpunktsatz garantiert Existenz, Eindeutigkeit und ein Berechnungsverfahren.

## Definition

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **konvex** auf dem Intervall  $I$ , falls fuer alle  $x, y \in I$  und  $\lambda \in [0, 1]$ :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

$f$  heißt **konkav**, falls  $-f$  konvex ist.

**Anschaulich:** Die Sekante liegt oberhalb (konvex) bzw. unterhalb (konkav) des Graphen.

**Kriterium:** Falls  $f$  zweimal differenzierbar:  $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$  konvex.

## Jensensche Ungleichung

Ist  $f$  konvex und  $X$  eine Zufallsvariable mit  $\mathbb{E}[X] \in I$ , so gilt:

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)].$$

Fuer konkaves  $f$  gilt " $\geq$ ".

**Beispiele konvexer Funktionen:**  $x^2$ ,  $e^x$ ,  $|x|$ ,  $x \ln x$  (auf  $(0, \infty)$ ).

**Beispiele konkaver Funktionen:**  $\ln x$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $-x^2$ .

**Anwendung (Finanzwissenschaft):**

Fuer eine konkave Nutzenfunktion  $U$  gilt  $U(\mathbb{E}[W]) \geq \mathbb{E}[U(W)]$  – ein risikoaverser Investor bevorzugt den sicheren

## Idee

Manche Gleichungen  $F(x, y) = 0$  definieren  $y$  nicht explizit als Funktion von  $x$ , aber *lokal* kann man nach  $y$  auflösen.

### Beispiel 1 – Einheitskreis:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

- Global: *keine* Funktion  $y = f(x)$  (vertikaler Linientest scheitert).
- Lokal um  $(0, 1)$ :  $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  fuer  $x \in (-1, 1)$ .
- Lokal um  $(0, -1)$ :  $y = g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$  fuer  $x \in (-1, 1)$ .

## Satz ueber implizite Funktionen (informell)

Ist  $F(x_0, y_0) = 0$  und  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , so existiert lokal um  $(x_0, y_0)$  eine differenzierbare Funktion  $y = f(x)$  mit  $F(x, f(x)) = 0$ .

Die Ableitung berechnet sich als:

$$f'(x) = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}.$$

### Beispiel 2 – Angebot und Nachfrage:

Gleichgewichtsbedingung  $D(p, Y) = S(p, w)$  definiert den Gleichgewichtspreis  $p^*$  implizit als Funktion von Einkommen  $Y$  und Inputkosten  $w$ .

Der Satz ueber implizite Funktionen ist fundamental fuer komparative Statik in der Oekonomie.

**Aufgabe 1.1:** Bestimme den maximalen Definitionsbereich von  $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-4}$ .

**Aufgabe 1.1:** Bestimme den maximalen Definitionsbereich von  $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-4}$ .

**Loesung:**  $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ ;  $x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$ . Also  $\text{dom}(f) = [-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$ .

**Aufgabe 1.2:** Bestimme den Wertebereich von  $g(x) = 3 - 2e^{-x}$  fuer  $x \in [0, \infty)$ .

**Aufgabe 1.1:** Bestimme den maximalen Definitionsbereich von  $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-4}$ .

**Loesung:**  $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ ;  $x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$ . Also  $\text{dom}(f) = [-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$ .

**Aufgabe 1.2:** Bestimme den Wertebereich von  $g(x) = 3 - 2e^{-x}$  fuer  $x \in [0, \infty)$ .

**Loesung:**  $e^{-x} \in (0, 1]$  fuer  $x \geq 0$ , also  $-2e^{-x} \in [-2, 0)$ , also  $g(x) \in [1, 3)$ .

**Aufgabe 1.3:** Skizziere den Graphen von  $h(x) = |x-1| + |x+1|$  und vereinfache.

**Aufgabe 1.1:** Bestimme den maximalen Definitionsbereich von  $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-4}$ .

**Loesung:**  $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ ;  $x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$ . Also  $\text{dom}(f) = [-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$ .

**Aufgabe 1.2:** Bestimme den Wertebereich von  $g(x) = 3 - 2e^{-x}$  fuer  $x \in [0, \infty)$ .

**Loesung:**  $e^{-x} \in (0, 1]$  fuer  $x \geq 0$ , also  $-2e^{-x} \in [-2, 0)$ , also  $g(x) \in [1, 3)$ .

**Aufgabe 1.3:** Skizziere den Graphen von  $h(x) = |x-1| + |x+1|$  und vereinfache.

**Loesung:** Fallunterscheidung:  $h(x) = \begin{cases} -2x & x < -1, \\ 2 & -1 \leq x \leq 1, \\ 2x & x > 1. \end{cases}$

**Aufgabe 1.4:** Ist die Zuordnung  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \pm\sqrt{|x|}$ , eine Funktion? Begruende.

**Aufgabe 1.1:** Bestimme den maximalen Definitionsbereich von  $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-4}$ .

**Loesung:**  $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ ;  $x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$ . Also  $\text{dom}(f) = [-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$ .

**Aufgabe 1.2:** Bestimme den Wertebereich von  $g(x) = 3 - 2e^{-x}$  fuer  $x \in [0, \infty)$ .

**Loesung:**  $e^{-x} \in (0, 1]$  fuer  $x \geq 0$ , also  $-2e^{-x} \in [-2, 0)$ , also  $g(x) \in [1, 3)$ .

**Aufgabe 1.3:** Skizziere den Graphen von  $h(x) = |x-1| + |x+1|$  und vereinfache.

**Loesung:** Fallunterscheidung:  $h(x) = \begin{cases} -2x & x < -1, \\ 2 & -1 \leq x \leq 1, \\ 2x & x > 1. \end{cases}$

**Aufgabe 1.4:** Ist die Zuordnung  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \pm\sqrt{|x|}$ , eine Funktion? Begruende.

**Loesung:** Nein – fuer  $x \neq 0$  werden *zwei* Werte zugeordnet ( $+\sqrt{|x|}$  und  $-\sqrt{|x|}$ ). Eine Funktion muss *genau einen* Wert zuordnen.

**Aufgabe 2.1:** Zeige, dass  $f(x) = x^3 + x$  streng monoton steigend auf  $\mathbb{R}$  ist.

**Aufgabe 2.1:** Zeige, dass  $f(x) = x^3 + x$  streng monoton steigend auf  $\mathbb{R}$  ist.

**Loesung:**  $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$  fuer alle  $x \in \mathbb{R}$ . Also ist  $f$  streng monoton steigend.

**Aufgabe 2.2:** Pruefe, ob  $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  gerade, ungerade oder weder noch ist.

**Aufgabe 2.1:** Zeige, dass  $f(x) = x^3 + x$  streng monoton steigend auf  $\mathbb{R}$  ist.

**Loesung:**  $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$  fuer alle  $x \in \mathbb{R}$ . Also ist  $f$  streng monoton steigend.

**Aufgabe 2.2:** Pruefe, ob  $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  gerade, ungerade oder weder noch ist.

**Loesung:**  $g(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x}{x^2 + 1} = -g(x)$ . Also ist  $g$  ungerade.

**Aufgabe 2.3:** Seien  $f(x) = \ln x$  und  $g(x) = x^2 + 1$ . Bestimme  $(f \circ g)(x)$  und  $(g \circ f)(x)$ .

## Aufgabenblock 2: Eigenschaften und Operationen

**Aufgabe 2.1:** Zeige, dass  $f(x) = x^3 + x$  streng monoton steigend auf  $\mathbb{R}$  ist.

**Loesung:**  $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$  fuer alle  $x \in \mathbb{R}$ . Also ist  $f$  streng monoton steigend.

**Aufgabe 2.2:** Pruefe, ob  $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  gerade, ungerade oder weder noch ist.

**Loesung:**  $g(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x}{x^2 + 1} = -g(x)$ . Also ist  $g$  *ungerade*.

**Aufgabe 2.3:** Seien  $f(x) = \ln x$  und  $g(x) = x^2 + 1$ . Bestimme  $(f \circ g)(x)$  und  $(g \circ f)(x)$ .

**Loesung:**  $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 + 1)$ ,  $\text{dom} = \mathbb{R}$ .  $(g \circ f)(x) = (\ln x)^2 + 1$ ,  $\text{dom} = (0, \infty)$ .

**Aufgabe 2.4:** Bestimme die Periode von  $f(x) = \sin(3x) + \cos(6x)$ .

## Aufgabenblock 2: Eigenschaften und Operationen

**Aufgabe 2.1:** Zeige, dass  $f(x) = x^3 + x$  streng monoton steigend auf  $\mathbb{R}$  ist.

**Loesung:**  $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$  fuer alle  $x \in \mathbb{R}$ . Also ist  $f$  streng monoton steigend.

**Aufgabe 2.2:** Pruefe, ob  $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  gerade, ungerade oder weder noch ist.

**Loesung:**  $g(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x}{x^2 + 1} = -g(x)$ . Also ist  $g$  ungerade.

**Aufgabe 2.3:** Seien  $f(x) = \ln x$  und  $g(x) = x^2 + 1$ . Bestimme  $(f \circ g)(x)$  und  $(g \circ f)(x)$ .

**Loesung:**  $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 + 1)$ ,  $\text{dom} = \mathbb{R}$ .  $(g \circ f)(x) = (\ln x)^2 + 1$ ,  $\text{dom} = (0, \infty)$ .

**Aufgabe 2.4:** Bestimme die Periode von  $f(x) = \sin(3x) + \cos(6x)$ .

**Loesung:** Periode von  $\sin(3x)$ :  $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ . Periode von  $\cos(6x)$ :  $T_2 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ . Die Gesamtperiode ist  $\text{kgV}(T_1, T_2) = \frac{2\pi}{3}$ .

**Aufgabe 3.1:** Bestimme die Umkehrfunktion von  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$  fuer  $x \neq 3$ .

**Aufgabe 3.1:** Bestimme die Umkehrfunktion von  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$  fuer  $x \neq 3$ .

**Loesung:**  $y = \frac{2x+1}{x-3}$ . Auflösen:  $y(x-3) = 2x+1 \Rightarrow x(y-2) = 3y+1 \Rightarrow x = \frac{3y+1}{y-2}$ . Also  $f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-2}$ ,  
 $\text{dom}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

**Aufgabe 3.2:** Beweise, dass  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f(x) = x^2 + 2x$ , bijektiv ist.

## Aufgabenblock 3: Umkehrfunktionen und Beweise

**Aufgabe 3.1:** Bestimme die Umkehrfunktion von  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$  fuer  $x \neq 3$ .

**Loesung:**  $y = \frac{2x+1}{x-3}$ . Auflösen:  $y(x-3) = 2x+1 \Rightarrow x(y-2) = 3y+1 \Rightarrow x = \frac{3y+1}{y-2}$ . Also  $f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-2}$ ,  
 $\text{dom}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

**Aufgabe 3.2:** Beweise, dass  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f(x) = x^2 + 2x$ , bijektiv ist.

**Loesung:** *Injektiv:*  $f'(x) = 2x + 2 > 0$  fuer  $x \geq 0$ , also streng monoton steigend. *Surjektiv:*  $f(0) = 0$ ,  $f(x) \rightarrow \infty$  fuer  $x \rightarrow \infty$ ,  $f$  stetig, also nimmt  $f$  nach ZWS jeden Wert in  $[0, \infty)$  an. □

**Aufgabe 3.3:** Beweise mit  $\varepsilon$ - $\delta$ :  $f(x) = 3x - 1$  ist stetig in  $x_0 = 2$ .

## Aufgabenblock 3: Umkehrfunktionen und Beweise

**Aufgabe 3.1:** Bestimme die Umkehrfunktion von  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$  fuer  $x \neq 3$ .

**Loesung:**  $y = \frac{2x+1}{x-3}$ . Auflösen:  $y(x-3) = 2x+1 \Rightarrow x(y-2) = 3y+1 \Rightarrow x = \frac{3y+1}{y-2}$ . Also  $f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-2}$ ,  
 $\text{dom}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

**Aufgabe 3.2:** Beweise, dass  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f(x) = x^2 + 2x$ , bijektiv ist.

**Loesung:** *Injektiv:*  $f'(x) = 2x + 2 > 0$  fuer  $x \geq 0$ , also streng monoton steigend. *Surjektiv:*  $f(0) = 0$ ,  $f(x) \rightarrow \infty$  fuer  $x \rightarrow \infty$ ,  $f$  stetig, also nimmt  $f$  nach ZWS jeden Wert in  $[0, \infty)$  an. □

**Aufgabe 3.3:** Beweise mit  $\varepsilon$ - $\delta$ :  $f(x) = 3x - 1$  ist stetig in  $x_0 = 2$ .

**Loesung:**  $|f(x) - f(2)| = |3x - 1 - 5| = 3|x - 2|$ . Waehle  $\delta = \varepsilon/3$ . Dann:  
 $|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| = 3|x - 2| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ . □

**Aufgabe 3.4:** Zeige per Induktion:  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

## Aufgabenblock 3: Umkehrfunktionen und Beweise

**Aufgabe 3.1:** Bestimme die Umkehrfunktion von  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$  fuer  $x \neq 3$ .

**Loesung:**  $y = \frac{2x+1}{x-3}$ . Auflösen:  $y(x-3) = 2x+1 \Rightarrow x(y-2) = 3y+1 \Rightarrow x = \frac{3y+1}{y-2}$ . Also  $f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-2}$ ,  
 $\text{dom}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

**Aufgabe 3.2:** Beweise, dass  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f(x) = x^2 + 2x$ , bijektiv ist.

**Loesung:** *Injektiv:*  $f'(x) = 2x + 2 > 0$  fuer  $x \geq 0$ , also streng monoton steigend. *Surjektiv:*  $f(0) = 0$ ,  $f(x) \rightarrow \infty$  fuer  $x \rightarrow \infty$ ,  $f$  stetig, also nimmt  $f$  nach ZWS jeden Wert in  $[0, \infty)$  an. □

**Aufgabe 3.3:** Beweise mit  $\varepsilon$ - $\delta$ :  $f(x) = 3x - 1$  ist stetig in  $x_0 = 2$ .

**Loesung:**  $|f(x) - f(2)| = |3x - 1 - 5| = 3|x - 2|$ . Waehle  $\delta = \varepsilon/3$ . Dann:  
 $|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| = 3|x - 2| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ . □

**Aufgabe 3.4:** Zeige per Induktion:  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

**Loesung:** IA:  $n = 1$ :  $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$  ✓. IS:  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ . □

**Aufgabe 4.1:** Eine Bakterienpopulation verdoppelt sich alle 3 Stunden. Anfangsbestand: 500. Modelliere  $N(t)$  und berechne  $N(12)$ .

**Aufgabe 4.1:** Eine Bakterienpopulation verdoppelt sich alle 3 Stunden. Anfangsbestand: 500. Modelliere  $N(t)$  und berechne  $N(12)$ .

**Loesung:**  $N(t) = 500 \cdot 2^{t/3}$ .  $N(12) = 500 \cdot 2^4 = 8000$ .

Alternativ:  $N(t) = 500 \cdot e^{kt}$  mit  $k = \frac{\ln 2}{3} \approx 0,231$ .

**Aufgabe 4.2:** Ein Kapital von 10 000 Euro wird mit 5% p.a. stetig verzinst. Nach wie vielen Jahren hat es sich verdoppelt?

## Aufgabenblock 4: Anwendungen

**Aufgabe 4.1:** Eine Bakterienpopulation verdoppelt sich alle 3 Stunden. Anfangsbestand: 500. Modelliere  $N(t)$  und berechne  $N(12)$ .

**Loesung:**  $N(t) = 500 \cdot 2^{t/3}$ .  $N(12) = 500 \cdot 2^4 = 8000$ .

Alternativ:  $N(t) = 500 \cdot e^{kt}$  mit  $k = \frac{\ln 2}{3} \approx 0,231$ .

**Aufgabe 4.2:** Ein Kapital von 10 000 Euro wird mit 5% p.a. stetig verzinst. Nach wie vielen Jahren hat es sich verdoppelt?

**Loesung:**  $20\,000 = 10\,000 \cdot e^{0,05t}$ .  $\Rightarrow e^{0,05t} = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0,05} \approx 13,86$  Jahre.

**Aufgabe 4.3:** Ein Federpendel schwingt mit  $x(t) = 0,1 \sin(10t)$  (in Metern). Bestimme Amplitude, Periode und maximale Geschwindigkeit.

## Aufgabenblock 4: Anwendungen

**Aufgabe 4.1:** Eine Bakterienpopulation verdoppelt sich alle 3 Stunden. Anfangsbestand: 500. Modelliere  $N(t)$  und berechne  $N(12)$ .

**Loesung:**  $N(t) = 500 \cdot 2^{t/3}$ .  $N(12) = 500 \cdot 2^4 = 8000$ .

Alternativ:  $N(t) = 500 \cdot e^{kt}$  mit  $k = \frac{\ln 2}{3} \approx 0,231$ .

**Aufgabe 4.2:** Ein Kapital von 10 000 Euro wird mit 5% p.a. stetig verzinst. Nach wie vielen Jahren hat es sich verdoppelt?

**Loesung:**  $20\,000 = 10\,000 \cdot e^{0,05t}$ .  $\Rightarrow e^{0,05t} = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0,05} \approx 13,86$  Jahre.

**Aufgabe 4.3:** Ein Federpendel schwingt mit  $x(t) = 0,1 \sin(10t)$  (in Metern). Bestimme Amplitude, Periode und maximale Geschwindigkeit.

**Loesung:** Amplitude  $A = 0,1$  m. Periode  $T = \frac{2\pi}{10} \approx 0,628$  s.  $v(t) = x'(t) = \cos(10t)$ , also  $v_{\max} = 1$  m/s.

**Aufgabe 4.4:** Fuer die Cobb-Douglas-Funktion  $Q(K, L) = 5K^{0,4}L^{0,6}$ : Berechne  $Q(100, 200)$  und zeige konstante Skalenertraege.

## Aufgabenblock 4: Anwendungen

**Aufgabe 4.1:** Eine Bakterienpopulation verdoppelt sich alle 3 Stunden. Anfangsbestand: 500. Modelliere  $N(t)$  und berechne  $N(12)$ .

**Loesung:**  $N(t) = 500 \cdot 2^{t/3}$ .  $N(12) = 500 \cdot 2^4 = 8000$ .

Alternativ:  $N(t) = 500 \cdot e^{kt}$  mit  $k = \frac{\ln 2}{3} \approx 0,231$ .

**Aufgabe 4.2:** Ein Kapital von 10 000 Euro wird mit 5% p.a. stetig verzinst. Nach wie vielen Jahren hat es sich verdoppelt?

**Loesung:**  $20\,000 = 10\,000 \cdot e^{0,05t}$ .  $\Rightarrow e^{0,05t} = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0,05} \approx 13,86$  Jahre.

**Aufgabe 4.3:** Ein Federpendel schwingt mit  $x(t) = 0,1 \sin(10t)$  (in Metern). Bestimme Amplitude, Periode und maximale Geschwindigkeit.

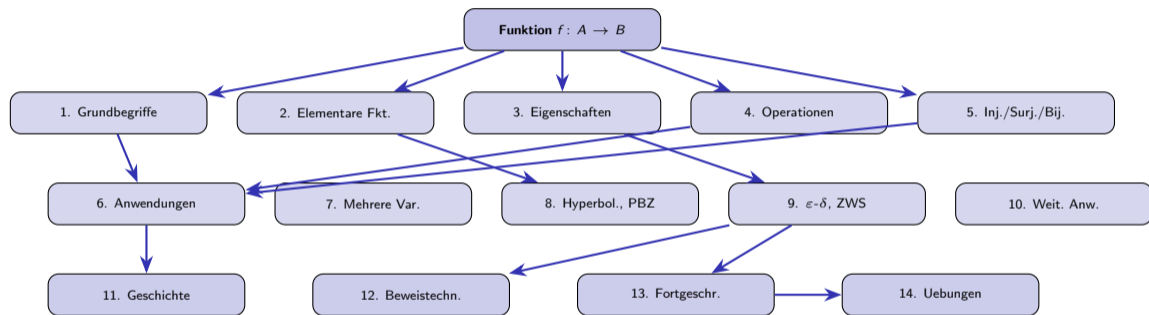
**Loesung:** Amplitude  $A = 0,1$  m. Periode  $T = \frac{2\pi}{10} \approx 0,628$  s.  $v(t) = x'(t) = \cos(10t)$ , also  $v_{\max} = 1$  m/s.

**Aufgabe 4.4:** Fuer die Cobb-Douglas-Funktion  $Q(K, L) = 5K^{0,4}L^{0,6}$ : Berechne  $Q(100, 200)$  und zeige konstante Skalenertraege.

**Loesung:**  $Q(100, 200) = 5 \cdot 100^{0,4} \cdot 200^{0,6} \approx 5 \cdot 6,31 \cdot 27,32 \approx 861,6$ . Skalenertraege:

$Q(\lambda K, \lambda L) = 5(\lambda K)^{0,4}(\lambda L)^{0,6} = \lambda^{0,4+0,6} \cdot 5K^{0,4}L^{0,6} = \lambda \cdot Q(K, L)$ .





**Kerninhalte:** Abschnitte 1–6 (Pflicht fuer Pruefung)

**Vertiefung:** Abschnitte 7–10 (erweitertes Verstaendnis)

**Vollstaendig:** Abschnitte 11–14 (Geschichte, Beweise, fortgeschrittene Konzepte, Uebungen)

## Exponential/Logarithmus:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a^r) = r \ln a$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

## Trigonometrie:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$$

## Hyperbolisch:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

## Verkettung:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

## Umkehrfunktionen:

$$e^x \longleftrightarrow \ln x$$

$$x^2 \longleftrightarrow \sqrt{x}$$

$$\sin x \longleftrightarrow \arcsin x$$

## Wachstumsmodelle:

$$\text{Exp.: } N(t) = N_0 e^{kt}$$

$$\text{Log.: } f(t) = \frac{L}{1 + e^{-k(t-t_0)}}$$

## Cobb-Douglas:

$$Q(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

## Naechste Lektion: L02 – Differentialrechnung

Die hier behandelten Funktionen werden abgeleitet:

$f(x)$	$f'(x)$
$x^n$	$nx^{n-1}$
$e^x$	$e^x$
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

### Schlusselregeln:

- Produktregel:  $(fg)' = f'g + fg'$
- Quotientenregel:  $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$
- **Kettenregel:**  $(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$  – die Verkettung ist zentral!

Solides Funktionsverstaendnis ist die Voraussetzung fuer die gesamte Analysis.