L01: Funktionen – Vertiefung

BSc Analysis

Digital Finance

Inhaltsverzeichnis

Was ist eine Funktion?

Definition (Funktion)

Eine **Funktion** $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die *jedem* Element $x \in A$ **genau ein** Element $y = f(x) \in B$ zuordnet.

Begriffe:

- $A = \mathrm{dom}(f)$: **Definitionsbereich** (Menge aller zulaessigen Eingaben)
- B: **Zielmenge** (Menge, in der die Funktionswerte liegen)
- $\mathrm{ran}(f) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$: **Wertebereich** (tatsaechlich angenommene Werte)
- x: **Argument** (unabhaengige Variable)
- $y = f(x)$: **Funktionswert** (abhaengige Variable)

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{ran}(f) = [0, \infty)$
- $f(3) = 9, \quad f(-2) = 4$

Zentral: Jedem x wird genau ein y zugeordnet – nicht mehrere!

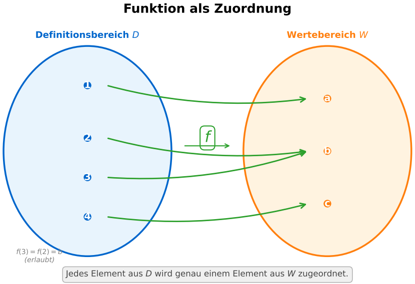
Formale Darstellung als Relation

Mengendarstellung

Der **Graph** einer Funktion $f : A \to B$ ist die Menge

$$\text{Graph}(f) = \big\{(x, f(x)) \mid x \in A\big\} \subseteq A \times B.$$

Vertikaler Linientest: Eine Teilmenge $G \subseteq A \times B$ ist genau dann Graph einer Funktion, wenn jede vertikale Linie $\{a\} \times B$ die Menge G in *hoechstens einem* Punkt schneidet.



Beispiele:

- $y = x^2$ ✓ (Funktion)
- $x^2 + y^2 = 1$ × (Kreis – keine Funktion)
- $y = \pm\sqrt{x}$ × (zwei Werte je x)

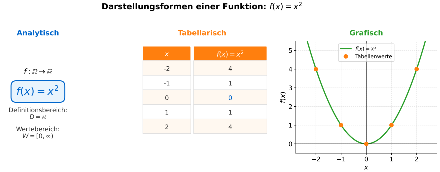
Der vertikale Linientest ist ein schnelles visuelles Kriterium.

Darstellungsformen von Funktionen

1. **Explizit:** $y = f(x) = 2x + 3$
2. **Implizit:** $x^2 + y^2 = 1$ (definiert y *implizit* als Funktion von x)
3. **Parametrisch:** $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t$
4. **Tabellarisch:**

x	0	1	2	3
$f(x)$	3	5	7	9

5. **Graphisch:** Plot von $(x, f(x))$



In der Analysis arbeiten wir meist mit der expliziten Darstellung.

Definitionsbereich bestimmen – Beispiele

Regel

Der **maximale (natuerliche) Definitionsbereich** umfasst alle $x \in \mathbb{R}$, fuer die der Funktionsausdruck definiert ist.

Funktion	**Einschraenkung**	dom(f)
$f(x) = \frac{1}{x-2}$	Nenner $\neq 0$	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$
$g(x) = \sqrt{x-1}$	Radikand ≥ 0	$[1, \infty)$
$h(x) = \ln(x)$	Argument > 0	$(0, \infty)$
$k(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-4}$	$x \geq 0$ und $x \neq 4$	$[0, 4) \cup (4, \infty)$
$m(x) = \frac{1}{\ln(x)}$	$x > 0$ und $\ln(x) \neq 0$	$(0, 1) \cup (1, \infty)$

Strategie: Alle Einschraenkungen einzeln identifizieren, dann schneiden.

Abschnittsweise definierte Funktionen

Definition

Eine Funktion heisst **abschnittsweise definiert**, wenn sie auf verschiedenen Teilintervallen durch unterschiedliche Vorschriften gegeben ist.

Beispiel – Betragsfunktion:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Beispiel – Treppenfunktion (Gauss-Klammer):

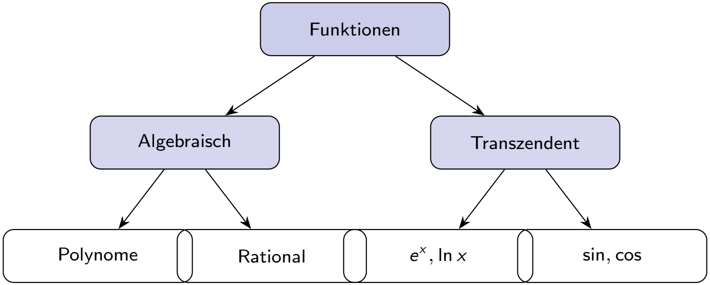
$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

Beispiel – Signumfunktion:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Uebergangsstellen sorgfaeltig pruefen – stimmen die Werte ueberein?

Spezielle Funktionen im Ueberblick



Algebraisch: Loesung einer Polynomgleichung (Polynome, rationale, Wurzelfkt.)
Transzendent: Nicht algebraisch (Exponential-, Logarithmus-, Trigonometrische Fkt.)

Die folgenden Abschnitte behandeln alle diese Typen im Detail.

Polynomfunktionen

Definition

Ein **Polynom** vom Grad n ist eine Funktion der Form

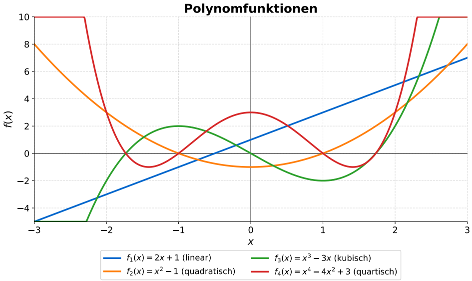
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Wichtige Spezialfaelle:

- $n = 0$: Konstante Funktion $f(x) = c$
- $n = 1$: Lineare Funktion $f(x) = mx + b$
- $n = 2$: Quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$
- $n = 3$: Kubische Funktion

Eigenschaften:

- $\mathrm{dom}(p) = \mathbb{R}$ (immer!)
- Hoechstens n reelle Nullstellen
- Endverhalten: $a_n > 0, n$ gerade $\Rightarrow p(x) \to +\infty$ fuer $x \to \pm\infty$



Polynome sind die "Bausteine" der Analysis – stetig, beliebig oft differenzierbar.

Normalform und Scheitelpunktform

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_s)^2 + y_s$$

mit Scheitelpunkt $S = (x_s, y_s)$, wobei $x_s = -\frac{b}{2a}$, $y_s = c - \frac{b^2}{4a}$.

Nullstellen (Loesungsformel):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminante $D = b^2 - 4ac$:

- $D > 0$: Zwei verschiedene reelle Nullstellen
- $D = 0$: Eine doppelte reelle Nullstelle
- $D < 0$: Keine reelle Nullstelle (zwei komplexe)

Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

- $x_s = \frac{8}{4} = 2$, $y_s = 6 - \frac{64}{8} = -2$, also $S = (2, -2)$
- $D = 64 - 48 = 16 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{4}$, also $x_1 = 1, x_2 = 3$

Exponentialfunktion und Logarithmus

Exponentialfunktion

$$f(x) = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1$$

Spezialfall: $\exp(x) = e^x$ mit $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718$

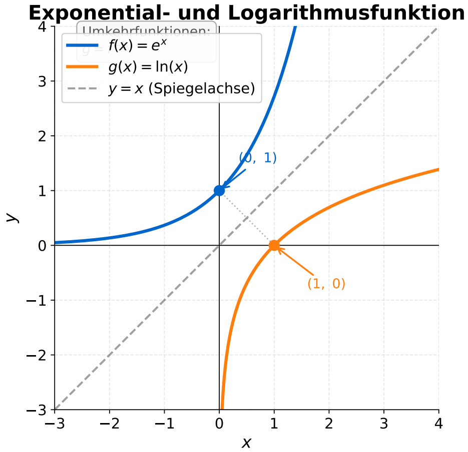
Logarithmus (Umkehrfunktion)

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x$$

Spezialfall: $\ln(x) = \log_e(x)$

Rechenregeln:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln(x^r) = r \ln x$
- $a^x = e^{x \ln a}$



e^x **und** $\ln x$ **sind zueinander invers:** $\ln(e^x) = x$ **und** $e^{\ln x} = x$.

Eigenschaften von e^x und $\ln x$

Exponentialfunktion e^x:

- dom $= \mathbb{R}$, ran $= (0, \infty)$
- Streng monoton steigend
- $e^0 = 1$
- $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- Stetig und differenzierbar
- $(e^x)' = e^x$ (einzigartig!)

Natuerlicher Logarithmus $\ln x$:

- dom $= (0, \infty)$, ran $= \mathbb{R}$
- Streng monoton steigend
- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$
- $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ (langsam!)
- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- Stetig und differenzierbar
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Basiswechsel:

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Der Basiswechsel erlaubt es, jeden Logarithmus durch $\ln$ auszudruecken.

Trigonometrische Funktionen

Definition am Einheitskreis

Fuer einen Winkel α (im Bogenmass) auf dem Einheitskreis:

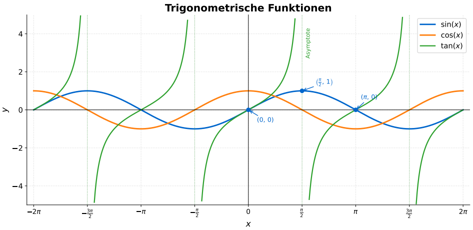
$$\cos\alpha = x\text{-Koordinate}, \quad \sin\alpha = y\text{-Koordinate}$$

Grundeigenschaften:

- Periode: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- Wertebereich: $[-1, 1]$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (Pythagoras)
- sin ungerade, cos gerade

Weitere trigonometrische Funktionen:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$



Bogenmass: $\pi \mathrel{\widehat{=}} 180$. **In der Analysis immer Bogenmass verwenden!**

Wichtige trigonometrische Identitaeten

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Spezialfaelle:

- $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

Wichtige Werte:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Gebrochen-rationale Funktionen

Definition

Eine **gebrochen-rationale Funktion** hat die Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei p und q Polynome sind und q nicht das Nullpolynom.

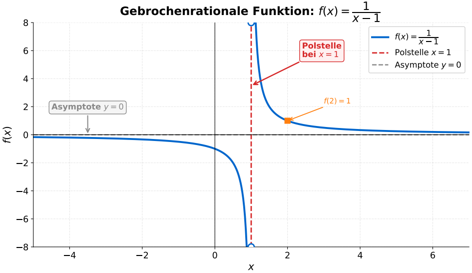
Definitionsbereich:

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$$

Asymptoten:

- *Vertikal:* bei Nullstellen des Nenners (Polstellen)
- *Horizontal:* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ (Grad $p \leq$ Grad q)
- *Schraeg:* bei Grad $p =$ Grad $q + 1$

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$ fuer $x \neq 1$
(Hebbare Luecke bei $x = 1$)



Immer zuerst kuerzen – hebbare Luecken von echten Polstellen unterscheiden!

Potenz- und Wurzelfunktionen

Potenzfunktionen:

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Fuer $n \geq 1$:

- n gerade: $f(-x) = f(x)$ (gerade), ran $= [0, \infty)$
- n ungerade: $f(-x) = -f(x)$ (ungerade), ran $= \mathbb{R}$

Fuer $n \leq -1$:

- dom $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Polstelle bei $x = 0$

Wurzelfunktionen:

$$f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

- n gerade: dom $= [0, \infty)$, ran $= [0, \infty)$
- n ungerade: dom $= \mathbb{R}$, ran $= \mathbb{R}$

Allgemein: $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$
mit dom $\supseteq [0, \infty)$

Potenz- und Wurzelfunktionen sind Spezialfaelle der allgemeinen Potenz x^α.

Uebersicht: Elementare Funktionen

Typ	**Form**	dom	ran
Konstant	$f(x) = c$	$\mathbb{R}$	$\{c\}$
Linear	$f(x) = mx + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ (fuer $m \neq 0$)
Quadratisch	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$	abh. von a
Polynom (Grad n)	$\sum a_k x^k$	$\mathbb{R}$	abh. von n, a_n
Rational	$p(x)/q(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{q = 0\}$	verschieden
Exponential	a^x	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
Logarithmus	$\log_a x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
Sinus/Cosinus	$\sin x, \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
Tangens	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\mathbb{R}$
Wurzel	$\sqrt[n]{x}$	$[0, \infty)$ (n ger.)	$[0, \infty)$

Diese Tabelle als Nachschlagewerk nutzen – Definitions- und Wertebereiche pruefen.

Definitionen

f heisst **gerade**, falls $f(-x) = f(x)$ fuer alle $x \in \mathrm{dom}(f)$.
f heisst **ungerade**, falls $f(-x) = -f(x)$ fuer alle $x \in \mathrm{dom}(f)$.

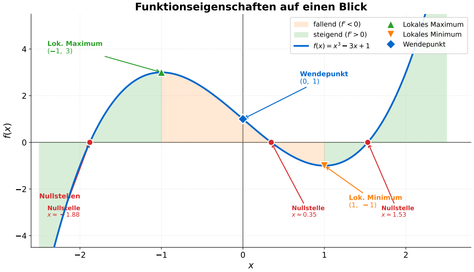
Gerade Funktionen:

- Symmetrisch zur y-Achse
- Beispiele: $x^2,\ x^4,\ |x|,\ \cos x$

Ungerade Funktionen:

- Symmetrisch zum Ursprung
- Beispiele: $x^3,\ x,\ \sin x,\ \tan x$

Weder noch: $e^x,\ x^2 + x,\ \ln x$



Symmetrie erleichtert das Zeichnen und vereinfacht Integralberechnungen.

Monotonie

Definition

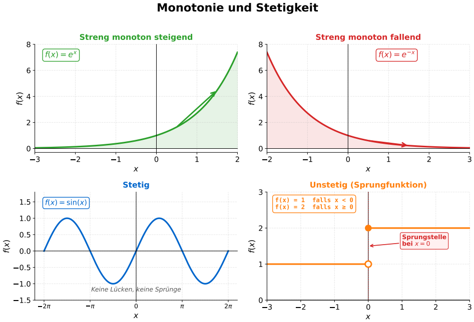
f heisst auf $I \subseteq \text{dom}(f)$

- **(streng) monoton steigend**, falls fuer alle $x_1 < x_2$ in I: $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $<$)
- **(streng) monoton fallend**, falls fuer alle $x_1 < x_2$ in I: $f(x_1) \geq f(x_2)$ (bzw. $>$)

Beispiele:

- e^x: streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$
- e^{-x}: streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$
- x^2: fallend auf $(-\infty, 0]$, steigend auf $[0, \infty)$
- $\sin x$: steigend auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Zusammenhang mit Ableitung (Vorausschau):
$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ streng monoton steigend
$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend



Streng monotone Funktionen sind injektiv – daher umkehrbar!

Beschraenktheit und Extrema

Definitionen

- f ist **nach oben beschraenkt**, falls ein $M \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) \leq M$ fuer alle $x \in \text{dom}(f)$.
- f ist **nach unten beschraenkt**, falls ein $m \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) \geq m$ fuer alle $x \in \text{dom}(f)$.
- f ist **beschraenkt**, falls nach oben und unten beschraenkt.

Extrema:

- **Globales Maximum:** $f(x_0) \geq f(x)$ fuer *alle* $x \in \text{dom}(f)$
- **Lokales Maximum:** $f(x_0) \geq f(x)$ fuer alle x in einer Umgebung von x_0

Beispiele:

- $\sin x$: beschraenkt, globales Max. $= 1$, globales Min. $= -1$
- e^x: nach unten beschraenkt (durch 0), nach oben unbeschraenkt
- x^3: unbeschraenkt (in beide Richtungen)

Stetigkeit – Intuition und Definition

Intuitive Beschreibung

Eine Funktion ist **stetig**, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, *ohne den Stift abzusetzen*.

Formale Definition (Folgenstetigkeit)

f ist stetig in x_0, falls fuer jede Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Stetige Funktionen:

- Alle Polynome, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$ (auf dom)
- Summe, Produkt, Quotient (Nenner $\neq 0$) stetiger Funktionen
- Verkettung stetiger Funktionen

Unstetiges Beispiel: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ (Sprung bei $x = 0$)

Stetigkeit ist zentral fuer den Zwischenwertsatz und Extremwertsatz.

Periodizitaet

Definition

f heisst **periodisch** mit Periode $T > 0$, falls

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{fuer alle } x \in \mathrm{dom}(f).$$

Die **kleinste** solche Periode heisst *Grundperiode*.

Beispiele:

Funktion	Grundperiode
$\sin x,\ \cos x$	2π
$\tan x,\ \cot x$	π
$\sin(2x)$	π
$\sin(\omega x)$	$\frac{2\pi}{\omega}$
$\lvert \sin x \rvert$	π

Amplitude und Phase: $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ mit Amplitude $|A|$, Kreisfrequenz ω, Phase φ.

Periodische Funktionen modellieren Schwingungen, Wellen, saisonale Effekte.

Nullstellen

Definition

x_0 heisst **Nullstelle** von f, falls $f(x_0) = 0$.

Methoden zur Nullstellenbestimmung:

1. **Algebraisch:** Loesungsformel (quadratisch), Faktorisierung
2. **Graphisch:** Schnittpunkte mit der x-Achse
3. **Numerisch:** Bisektionsverfahren, Newton-Verfahren

Vielfachheit:

- $p(x) = (x - x_0)^k \cdot q(x)$ mit $q(x_0) \neq 0$: x_0 ist Nullstelle der Vielfachheit k
- k ungerade: Vorzeichenwechsel; k gerade: kein Vorzeichenwechsel

Beispiel: $p(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$

- Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$ (alle einfach)

Arithmetische Operationen

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $D = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$.

Operation	**Definition**	**Definitionsbereich**
Summe	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	D
Differenz	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	D
Produkt	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	D
Quotient	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D \setminus \{x : g(x) = 0\}$
Skalar	$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$	D

Beispiel: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$

- $(f+g)(x) = x^2 + \sin x$
- $(f \cdot g)(x) = x^2 \sin x$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{\sin x}$, $\text{dom} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Verkettung (Komposition)

Definition

Die **Verkettung** von f und g ist

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

g wird *zuerst* ausgewertet, dann f.

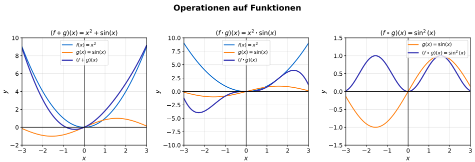
Definitionsbereich:

$$\mathrm{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{dom}(g) \mid g(x) \in \mathrm{dom}(f)\}$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1 - x^2$

- $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\mathrm{dom} = \{x : 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$

Achtung: $f \circ g \neq g \circ f$ im Allgemeinen!
$(g \circ f)(x) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x$, $\mathrm{dom} = [0, \infty)$



Die Kettenregel (Differentialrechnung) betrifft genau diese Operation.

Transformationen von Funktionsgraphen

Ausgehend von $y = f(x)$:

Transformation	**Ausdruck**	**Wirkung**
Verschiebung nach oben	$f(x) + c$	Graph um c nach oben
Verschiebung nach rechts	$f(x - c)$	Graph um c nach rechts
Vertikale Streckung	$c \cdot f(x)$	Faktor c in y-Richtung
Horizontale Stauchung	$f(c \cdot x)$	Faktor $\frac{1}{c}$ in x-Richtung
Spiegelung an x-Achse	$-f(x)$	y-Werte negieren
Spiegelung an y-Achse	$f(-x)$	x-Werte negieren

Beispiel: Von $y = x^2$ zu $y = 2(x-3)^2 + 1$:

1. Verschiebung um 3 nach rechts: $y = (x-3)^2$
2. Vertikale Streckung um Faktor 2: $y = 2(x-3)^2$
3. Verschiebung um 1 nach oben: $y = 2(x-3)^2 + 1$

Merke: Aenderungen "am x" wirken horizontal und gegenlauffig!

Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

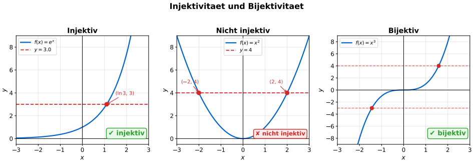
Definitionen

Sei $f: A \to B$ eine Funktion.

- f ist **injektiv**, falls $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- f ist **surjektiv**, falls $\text{ran}(f) = B$ (jedes $b \in B$ wird getroffen).
- f ist **bijektiv**, falls injektiv und surjektiv.

Beispiele:

f	inj.	surj.	bij.
$x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\times$	$\times$	$\times$
$x^2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\checkmark$	$\times$	$\times$
$e^x : \mathbb{R} \to (0,\infty)$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$\sin x : \mathbb{R} \to [-1,1]$	$\times$	$\checkmark$	$\times$



Bijektivitaet ist Voraussetzung fuer die Existenz einer Umkehrfunktion.

Umkehrfunktionen

Satz

Ist $f: A \to B$ bijektiv, so existiert die **Umkehrfunktion**

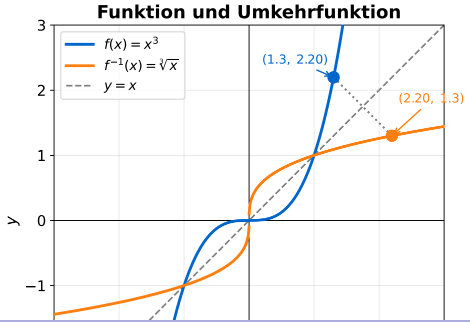
$$f^{-1}: B \to A \quad \text{mit} \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Eigenschaften:

- $f^{-1}(f(x)) = x$ und $f(f^{-1}(y)) = y$
- Graph von f^{-1} entsteht durch Spiegelung an $y = x$
- $\text{dom}(f^{-1}) = \text{ran}(f)$, $\text{ran}(f^{-1}) = \text{dom}(f)$

Wichtige Umkehrfunktionen:

f	f^{-1}
e^x	$\ln x$
x^2 $(x \geq 0)$	$\sqrt{x}$
$\sin x$ $([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$	$\arcsin x$
$\cos x$ $([0, \pi])$	$\arccos x$
$\tan x$ $((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$	$\arctan x$



Einschraenkung des Definitionsbereichs

Problem: Viele Funktionen sind nicht injektiv auf ganz $\mathbb{R}$.
Loesung: Definitionsbereich einschraenken, um Bijektivitaet herzustellen.

Beispiel $f(x) = x^2$:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist *nicht* injektiv ($f(2) = f(-2) = 4$)
- $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ist bijektiv, Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
- $f : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ ist ebenfalls bijektiv, Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

Beispiel $f(x) = \sin x$:

- $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ ist surjektiv aber nicht injektiv
- $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist bijektiv
- Umkehrfunktion: $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Die Wahl der Einschraenkung ist konventionsabhaengig – Hauptzweig beachten.

Exponentielles Wachstum und Zerfall

Modell

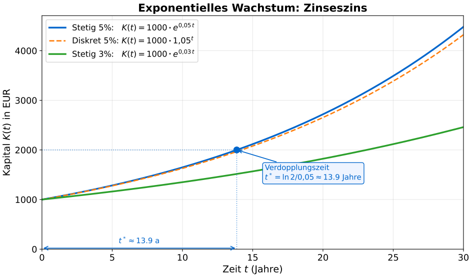
$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$$

$k > 0$: exponentielles Wachstum, $k < 0$: exponentieller Zerfall.

Beispiel – Zinseszins:
Kapital $K(t) = K_0 \cdot (1 + r)^t$ mit Zinssatz r.
Stetige Verzinsung: $K(t) = K_0 \cdot e^{rt}$.

Beispiel – Radioaktiver Zerfall:
$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$
Halbwertszeit: $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

Verdopplungszeit:
$t_d = \frac{\ln 2}{k}$



Exponentielles Wachstum ist auf Dauer unrealistisch – begrenzte Ressourcen!

Funktionen in der Oekonomie

Kosten-, Erloes- und Gewinnfunktionen:

- **Kostenfunktion:** $K(x) = K_f + K_v(x)$ (fixe + variable Kosten)
- **Erlosfunktion:** $E(x) = p(x) \cdot x$ (Preis mal Menge)
- **Gewinnfunktion:** $G(x) = E(x) - K(x)$

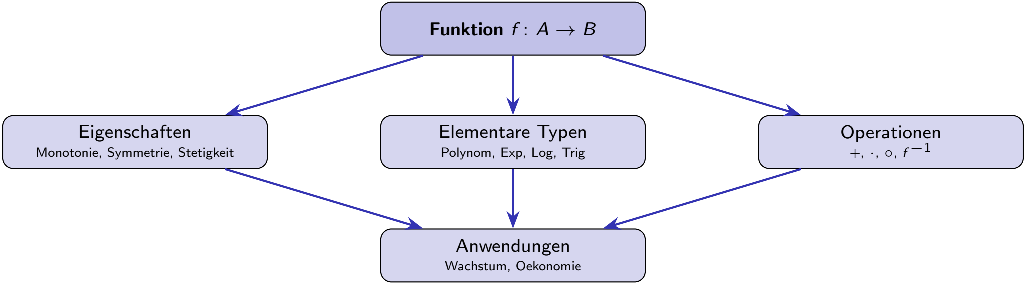
Beispiel: $K(x) = 100 + 5x + 0{,}01x^2, \quad p = 15$ (Festpreis)

- $E(x) = 15x$
- $G(x) = 15x - 100 - 5x - 0{,}01x^2 = -0{,}01x^2 + 10x - 100$
- Break-Even: $G(x) = 0 \Rightarrow x \approx 10{,}1$ oder $x \approx 989{,}9$

Nachfragefunktion: $D(p) = a - bp$ (linear, fallend)
Angebotsfunktion: $S(p) = c + dp$ (linear, steigend)
Gleichgewicht: $D(p^*) = S(p^*) \Rightarrow p^* = \frac{a-c}{b+d}$

Verkettung: Gewinn $= E(x(t)) - K(x(t))$ **– Funktionskomposition in der Praxis.**

Zusammenfassung Kerninhalte



Kernkompetenzen nach Abschnitt 1–6:

1. Definitionsbereich und Wertebereich bestimmen
2. Elementare Funktionen erkennen und anwenden
3. Eigenschaften (Symmetrie, Monotonie, Stetigkeit) pruefen
4. Funktionen verknuepfen und transformieren
5. Umkehrfunktionen bestimmen

Definition und Notation

Definition

Eine **Funktion mehrerer Variablen** ist eine Abbildung

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Spezialfall $n = 2$: $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y)$

Beispiele:

- Temperatur auf einer Platte: $T(x, y)$ – jedem Punkt (x, y) wird eine Temperatur zugeordnet
- Kosten abhaengig von zwei Inputfaktoren: $K(x_1, x_2)$
- Nutzenfunktion: $U(x_1, x_2) = x_1^{0.4} \cdot x_2^{0.6}$

Definitionsbereich:

- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$: $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ (Einheitskreisscheibe)
- $f(x, y) = \ln(x) + \ln(y)$: $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ (1. Quadrant)

Von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$: Definitionsbereich wird zur Teilmenge der Ebene (oder des Raums).

Definition

Die **Hoehenlinie** (Niveaulinie) zum Wert c von $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist

$$N_c = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}.$$

Interpretation:

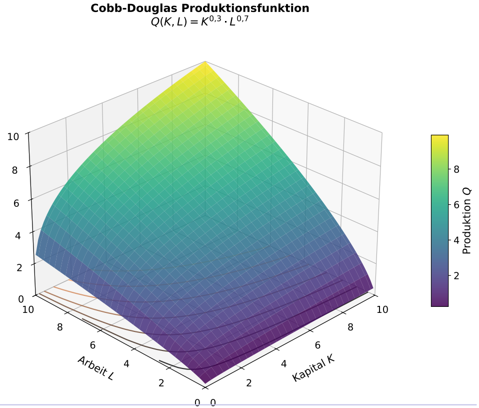
- Punkte gleicher "Hoehe" (gleicher Funktionswert)
- Analog zu Hoehenlinien auf Landkarten
- Enge Linien = steiler Anstieg, weite Linien = flach

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$

- N_c: Kreise mit Radius $\sqrt{c}$
- $c = 1$: Einheitskreis
- $c = 4$: Kreis mit Radius 2

Beispiel: $f(x, y) = x \cdot y$

- N_c: Hyperbeln $y = c/x$



Hoehenlinien sind Isoquanten (Oekonomie), Isobaren (Meteorologie), Aequipotentiallinien (Physik).

Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Definition

Die **Cobb-Douglas-Produktionsfunktion** ist

$$Q(K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha},$$

mit $A > 0$ (Technologieparameter), $0 < \alpha < 1$, $K =$ Kapital, $L =$ Arbeit.

Eigenschaften:

- **Konstante Skalenertraege:** $Q(\lambda K, \lambda L) = \lambda \cdot Q(K, L)$ fuer $\lambda > 0$
- **Positive, abnehmende Grenzertraege:**
  - $\frac{\partial Q}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} > 0$ (mehr Kapital $\rightarrow$ mehr Output)
  - $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0$ (abnehmender Grenzertrag)
- **Isoquanten:** $K = \left(\frac{Q_0}{AL^{1-\alpha}}\right)^{1/\alpha}$ – konvex, fallend

Zahlenbeispiel: $Q(K, L) = 10K^{0,3}L^{0,7}$, $K = 100$, $L = 200$:

$$Q = 10 \cdot 100^{0,3} \cdot 200^{0,7} \approx 10 \cdot 7{,}94 \cdot 52{,}78 \approx 4191$$

α **misst den Anteil des Kapitals am Gesamtertrag,** $(1 - \alpha)$ **den Arbeitsanteil.**

3D-Darstellung und Schnitte

Visualisierung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

1. **3D-Graph:** Flaeche im $\mathbb{R}^3$ mit Punkten $(x, y, f(x, y))$
2. **Hoehenlinien:** 2D-Projektion (Contour Plot)
3. **Schnitte:**
   - $x = c$ fixiert: Schnittkurve $g(y) = f(c, y)$ (Funktion einer Variablen)
   - $y = c$ fixiert: Schnittkurve $h(x) = f(x, c)$ (Funktion einer Variablen)

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$ (Paraboloid)

- Schnitt $y = 0$: $f(x, 0) = x^2$ (Parabel)
- Schnitt $x = 1$: $f(1, y) = 1 + y^2$ (nach oben verschobene Parabel)
- Hoehenlinien: konzentrische Kreise

Beispiel: $f(x, y) = x^2 - y^2$ (Sattelpunkt bei Ursprung)

- Schnitt $y = 0$: Parabel nach oben; Schnitt $x = 0$: Parabel nach unten

---

Schnitte reduzieren mehrdimensionale Probleme auf bekannte 1D-Funktionen.

Partielle Ableitungen – Ausblick

Definition (Vorausschau auf Differentialrechnung)

Die **partielle Ableitung** von $f(x, y)$ nach x ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Man leitet nach x ab und behandelt y als *Konstante* (und umgekehrt).

Beispiel: $f(x, y) = 3x^2 y + y^3$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy \quad (y^3$ faellt weg, da bezueglich x konstant)
- $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2$

Gradient:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs.

Partielle Ableitungen werden in Lektion 2 (Differentialrechnung) vertieft.

Partialbruchzerlegung – Motivation

Ziel

Jede echt gebrochen-rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ (mit $\deg p < \deg q$) laesst sich als **Summe einfacher Brueche** schreiben – die sogenannte **Partialbruchzerlegung**.

Wozu?

- Integration gebrochen-rationaler Funktionen (Lektion 3)
- Laplace-Ruecktransformation (Ingenieurwissenschaften)
- Vereinfachung algebraischer Ausdruecke

Grundansatz fuer reelle, einfache Nullstellen:
Falls $q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$, dann:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Die Konstanten $A_1, \ldots, A_n$ werden durch Koeffizientenvergleich oder Einsetzen bestimmt.

Voraussetzung: Zaehlergrad $<$ Nennergrad. Sonst zuerst Polynomdivision!

Partialbruchzerlegung – Beispiel

Aufgabe: Zerlege $\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)}$.

Ansatz:

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

Schritt 1: Beide Seiten mit $(x-1)(x+2)$ multiplizieren:

$$3x + 5 = A(x+2) + B(x-1)$$

Schritt 2: Einsetzen spezieller Werte:

- $x = 1$: $8 = 3A \Rightarrow A = \frac{8}{3}$
- $x = -2$: $-1 = -3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

Ergebnis:

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{8/3}{x-1} + \frac{1/3}{x+2}$$

Probe: $\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{8(x+2)+(x-1)}{3(x-1)(x+2)} = \frac{9x+15}{3(x-1)(x+2)} = \frac{3x+5}{(x-1)(x+2)}$ ✓

Hyperbolische Funktionen

Definitionen

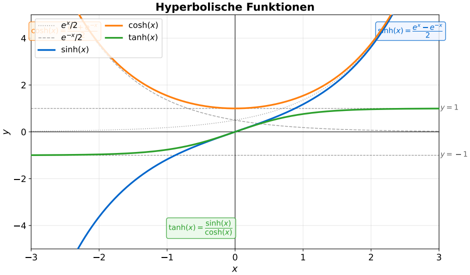
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Eigenschaften:

- sinh: ungerade, streng monoton steigend, ran $= \mathbb{R}$
- cosh: gerade, Minimum bei $\cosh(0) = 1$, ran $= [1, \infty)$
- tanh: ungerade, streng monoton steigend, ran $= (-1, 1)$

Ableitungen:

- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$



Der Name "hyperbolisch" kommt daher, dass $(\cosh t, \sinh t)$ **auf der Hyperbel** $x^2 - y^2 = 1$ **liegt.**

Hyperbolische Identitaeten

Fundamentale Identitaet

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \text{fuer alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Weitere Identitaeten:

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
- $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$
- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1$

Vergleich mit Trigonometrie:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$	$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$

Einschraenkung und Umkehrung:

Funktion	**Einschraenkung**	**Umkehrung**	dom(Umk.)
$\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$	$\arcsin x$	$[-1,1]$
$\cos x$	$[0,\pi] \to [-1,1]$	$\arccos x$	$[-1,1]$
$\tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

Wichtige Werte:

- $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$
- $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(1) = 0$
- $\arctan(0) = 0$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

Beziehung: $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ fuer alle $x \in [-1,1]$.

Ableitungen: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Die Arcusfunktionen geben den Winkel zu einem gegebenen Funktionswert zurueck.

Logarithmus als Umkehrung von e^x – formaler Nachweis

Satz

Die Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist der **natuerliche Logarithmus** $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Beweis der Bijektivitaet von $\exp$**:**

Injektivitaet: Sei $e^a = e^b$. Da $\exp$ streng monoton steigend ($(\exp)' = \exp > 0$), folgt $a = b$.

Surjektivitaet: Fuer jedes $y > 0$ muessen wir $x \in \mathbb{R}$ mit $e^x = y$ finden.

- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ und $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$
- e^x ist stetig
- Zwischenwertsatz: Jedes $y \in (0, \infty)$ wird angenommen. ✓

Zusammenfassung:

$$\ln(e^x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^{\ln y} = y \ \ \forall y > 0.$$

Konsequenz fuer die Ableitung:
Aus $e^{\ln y} = y$ folgt mit der Kettenregel: $e^{\ln y} \cdot (\ln y)' = 1$, also $(\ln y)' = \frac{1}{y}$.

Dieser Nachweis nutzt Stetigkeit und den Zwischenwertsatz – beides wird in Abschnitt 9 vertieft.

Allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktionen

Fuer beliebige Basis $a > 0$, $a \neq 1$:

$$a^x = e^{x \ln a}, \qquad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Wichtige Basen:

Basis	Name	Verwendung
$e \approx 2{,}718$	Natuerlicher Log. (ln)	Analysis, stetige Modelle
10	Dekadischer Log. (lg)	Naturwissenschaften, dB-Skala
2	Binaerer Log. (ld)	Informatik

Ableitung:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Beispiel – pH-Wert: $\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+] = -\frac{\ln[\mathrm{H}^+]}{\ln 10}$

In der Analysis bevorzugen wir e und $\ln$ – Ableitungen werden einfacher.

Epsilon-Delta-Definition der Stetigkeit

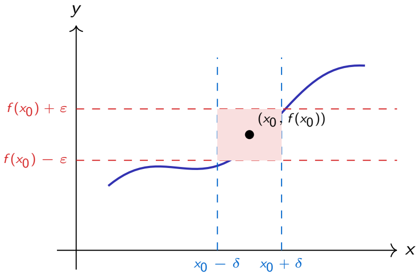
Definition (ε-δ-Stetigkeit)

f ist **stetig in** x_0, falls:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in \mathrm{dom}(f): \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Anschaulich:

- Egal wie eng das “Toleranzband” ε um $f(x_0)$ ist ...
- ... es gibt immer eine Umgebung δ um x_0, sodass alle Funktionswerte innerhalb des Toleranzbands liegen.



Beispiel: Beweis der Stetigkeit von $f(x) = 2x + 1$

Behauptung

$f(x) = 2x + 1$ ist stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir muessen $\delta > 0$ finden mit

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Abschaetzung:

$$|f(x) - f(x_0)| = |(2x + 1) - (2x_0 + 1)| = |2x - 2x_0| = 2|x - x_0|.$$

Wahl von δ: Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$.
Dann gilt: Falls $|x - x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$:

$$|f(x) - f(x_0)| = 2|x - x_0| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Schema fuer ε-δ-Beweise:

1. $|f(x) - f(x_0)|$ vereinfachen (Terme mit $|x - x_0|$ isolieren)
2. δ in Abhaengigkeit von ε waehlen
3. Verifizieren, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Lineare Funktionen sind "einfach" stetig – bei nichtlinearen ist die δ-Wahl trickreicher.

Zwischenwertsatz

Satz (Zwischenwertsatz von Bolzano)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \neq f(b)$. Dann nimmt f jeden Wert c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, d.h. es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$.

Spezialfall (Nullstellensatz):
Ist f stetig auf $[a, b]$ mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ (Vorzeichenwechsel), so existiert mindestens eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$.

Beispiel: $f(x) = x^3 - x - 1$ auf $[1, 2]$:

- $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$
- $f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0$
- $\Rightarrow$ Es existiert $\xi \in (1, 2)$ mit $f(\xi) = 0$.

Anwendung – Bisektionsverfahren:

1. Intervallmitte $m = \frac{a+b}{2}$ berechnen
2. Vorzeichenwechsel in $[a, m]$ oder $[m, b]$?
3. Intervall halbieren und wiederholen

Der ZWS garantiert Existenz, sagt aber nichts ueber Eindeutigkeit der Nullstelle.

Typen von Unstetigkeitsstellen

Klassifikation

Sei f unstetig in x_0. Man unterscheidet:

1. Hebbare Unstetigkeit:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existiert, aber } \neq f(x_0)$$

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ bei $x_0 = 1$
$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, aber $f(1)$ undefiniert.

2. Sprungstelle:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Beide einseitige Grenzwerte existieren.
Beispiel: $f(x) = \text{sgn}(x)$ bei $x_0 = 0$

3. Wesentliche Unstetigkeit:
Mindestens ein einseitiger Grenzwert existiert *nicht* (auch nicht als $\pm\infty$).

Beispiel: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ bei $x_0 = 0$

- Fuer $x \to 0$ oszilliert $\sin(1/x)$ unendlich schnell zwischen -1 und 1
- Kein Grenzwert vorhanden
- $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ existiert nicht

Vergleich: $g(x) = x\sin(1/x)$ bei $x_0 = 0$:
$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$ (hebbar!)

Hebbare Unstetigkeiten kann man “reparieren”, Sprung- und wesentliche nicht.

Wichtige Saetze ueber stetige Funktionen

Extremwertsatz (Weierstrass)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem abgeschlossenen Intervall, so nimmt f auf $[a, b]$ ein **Maximum** und ein **Minimum** an.

Voraussetzungen sind wichtig:

- $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0, 1]$: stetig, aber kein Maximum (unbeschraenkt)
- $f(x) = x$ auf $(0, 1)$: stetig, aber weder Max noch Min werden angenommen
- $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$: unstetig, $\sup = 1$ wird nicht angenommen

Satz ueber Verkettung

Sind f und g stetig, so ist auch $f \circ g$ stetig.

Konsequenz: $e^{\sin x}$, $\ln(x^2 + 1)$, $\sin(\cos(x))$ – alle stetig auf ihrem Definitionsbereich.

Stetig + abgeschlossenes Intervall = garantierte Existenz von Extrema.

Logistisches Wachstum

Modell

$$f(t) = \frac{L}{1 + e^{-k(t-t_0)}}$$

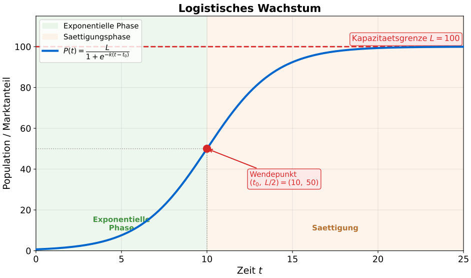
L: Saettigungsgrenze (Kapazitaet), $k > 0$: Wachstumsrate, t_0: Wendepunkt.

Eigenschaften:

- $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$ (Anfang)
- $\lim_{t\to\infty} f(t) = L$ (Saettigung)
- $f(t_0) = L/2$ (Wendepunkt)
- S-foermiger (sigmoider) Verlauf

Anwendungen:

- **Epidemiologie:** Ausbreitung von Infektionskrankheiten
- **Marketing:** Marktdurchdringung neuer Produkte
- **Biologie:** Populationswachstum mit Kapazitaetsgrenze
- **Machine Learning:** Sigmoid-Aktivierungsfunktion



Logistisch = exponentielles Wachstum mit "Bremse" – realistischer als rein exponentiell.

Logistisches Wachstum – Zahlenbeispiel

Szenario: Marktdurchdringung eines neuen Smartphones.

Parameter: $L = 1\,000\,000$ (potenzielle Kaeufer), $k = 0{,}5$, $t_0 = 10$ (Monate).

$$N(t) = \frac{1\,000\,000}{1 + e^{-0{,}5(t-10)}}$$

t (Monate)	$N(t)$	Phase
0	$\approx 6\,693$	Fruehe Adoptierer
5	$\approx 75\,858$	Wachstumsphase
10	$500\,000$	Wendepunkt
15	$\approx 924\,142$	Saettigungsphase
20	$\approx 993\,307$	Fast gesaettigt

Vergleich mit exponentiellem Wachstum:
Exponentiell: $N(t) = 6\,693 \cdot e^{0{,}5t}$ – bei $t = 20$ waere $N \approx 145\,000\,000$ (unrealistisch!).

Die logistische Funktion modelliert das "Abbremsen" bei Annaeherung an die Kapazitaetsgrenze.

Allgemeine harmonische Schwingung

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

A: Amplitude, ω: Kreisfrequenz, φ: Phasenverschiebung.

Kenngroessen:

- Periode: $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Frequenz: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ (in Hz)
- Maximalausschlag: $|A|$

Beispiel – Federpendel:

Masse m an Feder mit Federkonstante k: $x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$

Fuer $m = 0{,}5\,\text{kg}$, $k = 200\,\text{N/m}$: $\omega = \sqrt{400} = 20\,\text{s}^{-1}$, $T \approx 0{,}31\,\text{s}$.

Ueberlagerung (Superposition): $x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)$
Bei $\omega_1 \approx \omega_2$: Schwebung (langsame Amplitudenmodulation).

Harmonische Schwingungen = Grundbaustein der Fourier-Analysis.

Black-Scholes als Funktionskomposition

Motivation

Der **Black-Scholes-Preis** einer europaeischen Call-Option zeigt, wie Verkettung und Komposition in der Finanzwelt auftreten.

$$C(S, t) = S \cdot \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2)$$

mit den **verketteten Funktionen**:

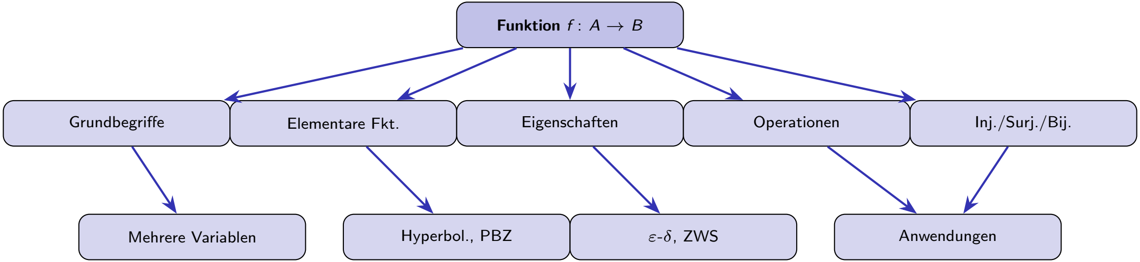
$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

Beteiligte elementare Funktionen:

- $\ln(S/K)$: Logarithmus (Verhaeltnis Aktienkurs zu Ausuebungspreis)
- $e^{-r(T-t)}$: Exponentialfunktion (Diskontierung)
- $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} \, \mathrm{d}u$: kumulative Normalverteilung (Integral ueber e^x)
- $\sqrt{T - t}$: Wurzelfunktion (Zeitskalierung der Volatilitaet)

Black-Scholes 1973 – ein Meilenstein der mathematischen Finanzwissenschaft.

Gesamtuebersicht: Funktionen



Kerninhalte: Abschnitte 1–6 (Pflicht fuer Pruefung)
Vertiefung: Abschnitte 7–10 (erweitertes Verstaendnis, Ausblick)

Wichtige Formeln auf einen Blick

Exponential/Logarithmus:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$
$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$
$$\ln(a^r) = r \ln a$$
$$a^x = e^{x \ln a}$$

Trigonometrie:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$$

Hyperbolisch:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Verkettung:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Umkehrfunktionen:

$$e^x \longleftrightarrow \ln x$$
$$x^2 \longleftrightarrow \sqrt{x}$$
$$\sin x \longleftrightarrow \arcsin x$$

Wachstumsmodelle:

$$\text{Exp.: } N(t) = N_0 e^{kt}$$
$$\text{Log.: } f(t) = \frac{L}{1 + e^{-k(t-t_0)}}$$

Cobb-Douglas:

$$Q(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

Ausblick: Differentialrechnung

Naechste Lektion: L02 – Differentialrechnung

Die hier behandelten Funktionen werden abgeleitet:

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

Schluesselregeln:

- Produktregel: $(fg)' = f'g + fg'$
- Quotientenregel: $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$
- **Kettenregel:** $(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ – die Verkettung ist zentral!

Solides Funktionsverstaendnis ist die Voraussetzung fuer die gesamte Analysis.